This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06633382 8

H.M

Apollonius von Pergen

ebene Oerter.

Wiederhergeſtellt

von

Robert Simſon.

Aus dem Lateiniſchen überſezt,

mit Berechnungen, Bemerkungen, und einer Sammlung geometriſcher Aufgaben begleitet

von

Johann Wilhelm Camerer.

Mit Kupfern.

Leipzig,

bey Adam Friedrich Böhme.

1796.

SG

Apollonius von Pergen

ebene Oerter.

Wiederhergeſtellt

von

Robert Simſon.

Aus dem Lateiniſchen überſezt,

mit Berechnungen, Bemerkungen, und einer Sammlung geometriſcher Aufgaben begleitet

von

Johann Wilhelm Camerer.

Mit Kupfern.

Leipzig,

bey Adam Friedrich Böhme.

1796.

SG

Vorrede des Uebersezers.

Pappus giebt uns in der Einleitung zum 7ten Buch seiner mathematischen Sammlungen von mehreren Schriften der griechischen Geometer Nachricht, von denen die meisten für uns verlohren gegangen sind. Eine von Pappus am angeführten Ort beygebrachte Innhalts-Anzeige, nebst einigen zu diesen Schriften gehörigen Lehnsäzen, die er im 7ten Buch selbst liefert, ist bey vielen derselben alles, was uns davon noch übrig ist. Nach diesen wenigen Bruchstüken suchten seit zwey Jahrhunderten verschiedene Mathematiker mit mehr oder minder glüklichem Erfolg das verlohrengegangene wieder zu ersezen. Unter ihnen zeichnet sich der Engelländer Robert Simson durch seine Genauigkeit, und ächt altgeometrischen Geist vorzüglich aus. Ausser mehrern andern dahin gehörigen Schriften lieferte er 1749 die Wiederherstellung von Apollonius ebenen Oertern. Schon vor ihm beschäftigten sich Fermat und Schooten mit eben dieser Schrift. Der Versuch des Leztern, der meist in algebraischer Rechnung besteht, kann wenigstens nicht als Wiederherstellung von Apollonius Werk betrachtet

trachtet werden. Was aber auch an Fermats Arbeit noch vermißt werde, giebt Simſon in ſeiner hienächſt folgenden leſenswürdigen Vorrede ſelbſt richtig an, worzu man ſicher noch hinzu ſezen darf, daß Fermats **Kompoſitionen** ſogar, die übrigens der Hauptſache nach, beſonders im erſten Buch mit den Simſonſchen beynahe überall einerley ſind, ihnen doch an vollſtändiger Entwiklung und Genauigkeit weit nachſtehen. So wird, um nur Ein Beyſpiel anzuführen, bey 5, 1. von Fermat nicht, wie von Simſon, erwieſen, ſondern blos voraus geſezt, daß dieſelbe gerade Linie, die dem einen Kreis begegnet, nothwendig auch dem andern begegnen müſſe. Ein ähnlicher vorläuffiger Beweis, der faſt überall nothwendig wäre, fehlt überhaupt bey Fermat durchgängig. Ein anderer Unterſchied zwiſchen Fermats und Simſons Verfahren iſt dieſer, daß, wo Simſon einen Ort auf einen der vorhergehenden zurük bringt, Fermat gewöhnlich, ohne dieſe Beyhülffe, Verzeichnung und Beweis unmittelbar herleitet. Fermats Verfahren kann manchmahl die kurze Ueberſicht, beſonders bey der Verzeichnung, erleichtern, indem man nicht erſt auf das Vorhergehende zurük gewieſen wird. Simſons Verfahren hingegen iſt kürzer, beſonders in Anſehung des Beweiſes, methodiſcher, und hat vorzüglich den Vortheil, daß, wenn nun einmahl bey dem vorhergehenden Ort gezeigt iſt, daß, oder, unter welchen Umſtänden, der geſuchte Ort nothwendig geſchnitten werden müſſe,

diß bey einem folgenden auf dieſen zurük gebrachten Ort nimmer ausführlich gezeigt zu werden braucht. *) Wo ſonſt noch Simſon und Fermat verſchiedene Wege einſchlagen, iſt überhaupt immer höchſte Wahrſcheinlichkeit, daß Simſon den Fußſtapfen des Pergäers am nächſten folge, weil er dieſelben Lehnſäze zu ſeiner Arbeit anzuwenden wußte, welche man nach Pappus Zeugniß ſchon zu ſeiner Zeit darzu brauchte, welches Fermat nicht thut. So ſchäzbar aber dieſe Schrift, theils ihres intereſſanten Innhalts, theils der treflichen Simſonſchen Ausführung wegen, dem Geometer ſeyn muß; ſo ſelten war ſie doch bisher in Deutſchland, und ſelbſt auch auswärts zu bekommen. Dieſer Umſtand allein kann die Unternehmung gegenwärtiger Ausgabe rechtfertigen, über welche ich jezt noch ein paar Worte beyzufügen habe.

Die paar Seiten griechiſchen Texts, welche eigentlich die Säze des Apollonius enthalten, ſind, wie Simſon zeigt, in allen bisher vergli-

 chenen

*) Wollte man mit einigen der ſpäter folgenden Säze den Anfang machen, und ſie ungefähr nach Fermats Art unmittelbar erweiſen; ſo lieſſe ſich alsdann das Simſonſche Verfahren umkehren, und viele der Säze, die jezt voran ſtehen, als bloſſe Zuſäze aus den nachfolgenden herleiten. So lieſſen ſich z. B. die Säze des erſten Buchs 4—19 auf die vier 16—19 bringen. Kürzer wäre nun diß Verfahren freylich, aber wohl nicht eben ſo einfach oder methodiſch, als das Fermatſche oder Simſonſche. Doch kann dieſe Bemerkung dienen, die Säze ſowohl, als die ihnen zugehörigen Berechnungen, deſto leichter unter einander zu vergleichen.

Apollonius von Pergen

ebene Oerter.

Wiederhergeſtellt

von

Robert Simſon.

Aus dem Lateiniſchen überſezt,

mit Berechnungen, Bemerkungen, und einer Sammlung geometriſcher Aufgaben begleitet

von

Johann Wilhelm Camerer.

Mit Kupfern.

Leipzig,

bey Adam Friedrich Böhme.

1796.

SG

Vorrede des Uebersezers.

Pappus giebt uns in der Einleitung zum 7ten Buch seiner mathematischen Sammlungen von mehreren Schriften der griechischen Geometer Nachricht, von denen die meisten für uns verlohren gegangen sind. Eine von Pappus am angeführten Ort beygebrachte Innhalts-Anzeige, nebst einigen zu diesen Schriften gehörigen Lehnsäzen, die er im 7ten Buch selbst liefert, ist bey vielen derselben alles, was uns davon noch übrig ist. Nach diesen wenigen Bruchstüken suchten seit zwey Jahrhunderten verschiedene Mathematiker mit mehr oder minder glüklichem Erfolg das verlohrengegangene wieder zu ersezen. Unter ihnen zeichnet sich der Engelländer Robert Simson durch seine Genauigkeit, und ächt altgeometrischen Geist vorzüglich aus. Ausser mehrern andern dahin gehörigen Schriften lieferte er 1749 die Wiederherstellung von Apollonius ebenen Oertern. Schon vor ihm beschäftigten sich Fermat und Schooten mit eben dieser Schrift. Der Versuch des Leztern, der meist in algebraischer Rechnung besteht, kann wenigstens nicht als Wiederherstellung von Apollonius Werk betrachtet

trachtet werden. Was aber auch an Fermats Arbeit noch vermißt werde, giebt Simson in seiner hienächst folgenden lesenswürdigen Vorrede selbst richtig an, worzu man sicher noch hinzu sezen darf, daß Fermats **Kompositionen** sogar, die übrigens der Hauptsache nach, besonders im ersten Buch mit den Simsonschen beynahe überall einerley sind, ihnen doch an vollständiger Entwiklung und Genauigkeit weit nachstehen. So wird, um nur Ein Beyspiel anzuführen, bey 5, 1. von Fermat nicht, wie von Simson, erwiesen, sondern blos voraus gesezt, daß dieselbe gerade Linie, die dem einen Kreis begegnet, nothwendig auch dem andern begegnen müsse. Ein ähnlicher vorläuffiger Beweis, der fast überall nothwendig wäre, fehlt überhaupt bey Fermat durchgängig. Ein anderer Unterschied zwischen Fermats und Simsons Verfahren ist dieser, daß, wo Simson einen Ort auf einen der vorhergehenden zurük bringt, Fermat gewöhnlich, ohne diese Beyhülffe, Verzeichnung und Beweis unmittelbar herleitet. Fermats Verfahren kann manchmahl die kurze Uebersicht, besonders bey der Verzeichnung, erleichtern, indem man nicht erst auf das Vorhergehende zurük gewiesen wird. Simsons Verfahren hingegen ist kürzer, besonders in Ansehung des Beweises, methodischer, und hat vorzüglich den Vortheil, daß, wenn nun einmahl bey dem vorhergehenden Ort gezeigt ist, daß, oder, unter welchen Umständen, der gesuchte Ort nothwendig geschnitten werden müsse,

diß bey einem folgenden auf dieſen zurük gebrachten Ort nimmer ausführlich gezeigt zu werden braucht. *) Wo ſonſt noch Simſon und Fermat verſchiedene Wege einſchlagen, iſt überhaupt immer höchſte Wahrſcheinlichkeit, daß Simſon den Fußſtapfen des Pergäers am nächſten folge, weil er dieſelben Lehnſäze zu ſeiner Arbeit anzuwenden wußte, welche man nach Pappus Zeugniß ſchon zu ſeiner Zeit darzu brauchte, welches Fermat nicht thut. So ſchäzbar aber dieſe Schrift, theils ihres intereſſanten Innhalts, theils der treflichen Simſonſchen Ausführung wegen, dem Geometer ſeyn muß; ſo ſelten war ſie doch bisher in Deutſchland, und ſelbſt auch auswärts zu bekommen. Dieſer Umſtand allein kann die Unternehmung gegenwärtiger Ausgabe rechtfertigen, über welche ich jezt noch ein paar Worte beyzufügen habe.

Die paar Seiten griechiſchen Texts, welche eigentlich die Säze des Apollonius enthalten, ſind, wie Simſon zeigt, in allen bisher vergli-

 chenen

*) Wollte man mit einigen der ſpäter folgenden Säze den Anfang machen, und ſie ungefähr nach Fermats Art unmittelbar erweiſen; ſo lieſſe ſich alsdann das Simſonſche Verfahren umkehren, und viele der Säze, die jezt voran ſtehen, als bloſſe Zuſäze aus den nachfolgenden herleiten. So lieſſen ſich z. B. die Säze des erſten Buchs 4—19 auf die vier 16—19 bringen. Kürzer wäre nun diß Verfahren freylich, aber wohl nicht eben ſo einfach oder methodiſch, als das Fermatſche oder Simſonſche. Doch kann dieſe Bemerkung dienen, die Säze ſowohl, als die ihnen zugehörigen Berechnungen, deſto leichter unter einander zu vergleichen.

trachtet werden. Was aber auch an Fermats Arbeit noch vermißt werde, giebt Simſon in ſeiner hienächſt folgenden leſenswürdigen Vorrede ſelbſt richtig an, worzu man ſicher noch hinzu ſezen darf, daß Fermats **Kompoſitionen** ſogar, die übrigens der Hauptſache nach, beſonders im erſten Buch mit den Simſonſchen beynahe überall einerley ſind, ihnen doch an vollſtändiger Entwiklung und Genauigkeit weit nachſtehen. So wird, um nur Ein Beyſpiel anzuführen, bey 5, l. von Fermat nicht, wie von Simſon, erwieſen, ſondern blos voraus geſezt, daß dieſelbe gerade Linie, die dem einen Kreis begegnet, nothwendig auch dem andern begegnen müſſe. Ein ähnlicher vorläuffiger Beweis, der faſt überall nothwendig wäre, fehlt überhaupt bey Fermat durchgängig. Ein anderer Unterſchied zwiſchen Fermats und Simſons Verfahren iſt dieſer, daß, wo Simſon einen Ort auf einen der vorhergehenden zurük bringt, Fermat gewöhnlich, ohne dieſe Beyhülffe, Verzeichnung und Beweis unmittelbar herleitet. Fermats Verfahren kann manchmahl die kurze Ueberſicht, beſonders bey der Verzeichnung, erleichtern, indem man nicht erſt auf das Vorhergehende zurük gewieſen wird. Simſons Verfahren hingegen iſt kürzer, beſonders in Anſehung des Beweiſes, methodiſcher, und hat vorzüglich den Vortheil, daß, wenn nun einmahl bey dem vorhergehenden Ort gezeigt iſt, daß, oder, unter welchen Umſtänden, der geſuchte Ort nothwendig geſchnitten werden müſſe,

diß bey einem folgenden auf dieſen zurük gebrachten Ort nimmer ausführlich gezeigt zu werden braucht. *) Wo ſonſt noch Simſon und Fermat verſchiedene Wege einſchlagen, iſt überhaupt immer höchſte Wahrſcheinlichkeit, daß Simſon den Fußſtapfen des Pergäers am nächſten folge, weil er dieſelben Lehnſäze zu ſeiner Arbeit anzuwenden wußte, welche man nach Pappus Zeugniß ſchon zu ſeiner Zeit darzu brauchte, welches Fermat nicht thut. So ſchäzbar aber dieſe Schrift, theils ihres intereſſanten Innhalts, theils der treflichen Simſonſchen Ausführung wegen, dem Geometer ſeyn muß; ſo ſelten war ſie doch bisher in Deutſchland, und ſelbſt auch auswärts zu bekommen. Dieſer Umſtand allein kann die Unternehmung gegenwärtiger Ausgabe rechtfertigen, über welche ich jezt noch ein paar Worte beyzufügen habe.

Die paar Seiten griechiſchen Texts, welche eigentlich die Säze des Apollonius enthalten, ſind, wie Simſon zeigt, in allen bisher vergli-

 chenen

*) Wollte man mit einigen der ſpäter folgenden Säze den Anfang machen, und ſie ungefähr nach Fermats Art unmittelbar erweiſen; ſo lieſſe ſich alsdann das Simſonſche Verfahren umkehren, und viele der Säze, die jezt voran ſtehen, als bloſſe Zuſäze aus den nachfolgenden herleiten. So lieſſen ſich z. B. die Säze des erſten Buchs 4—19 auf die vier 16—19 bringen. Kürzer wäre nun diß Verfahren freylich, aber wohl nicht eben ſo einfach oder methodiſch, als das Fermatſche oder Simſonſche. Doch kann dieſe Bemerkung dienen, die Säze ſowohl, als die ihnen zugehörigen Berechnungen, deſto leichter unter einander zu vergleichen.

chenen Mſcpten von Pappus, an einigen Stellen unrichtig. Ich verglich zwar aufs neue ſorgfältig die 2 Codd. 2368 und 2440 der ehemals königlichen Bibliothek zu Paris, welche die einzigen ſind, die unter den daſelbſt aufbehaltenen das 7te Buch des Pappus enthalten, und noch, wiewohl dieſen leztern ſehr flüchtig, einen Cod. der Strasburger Univerſitäts-Bibliothek, der ehmals Daſypodius zugehört hatte. Alle dieſe Codd. aber ſind ſehr jung, und offenbahr erſt aus dem 16ten Jahrhundert, ſtimmen auch alle in den fehlerhaften Lesarten überein. Zum Glük hat die Kritik für mathematiſche Werke etwas minder ſtrenge Regeln, als für die Schriften aus jeder andern Wiſſenſchaft. Wenn Zuſammenhang, wenn mathematiſche Evidenz eine Lesart verwirft, oder anzunehmen befiehlt, ſo muß ſie troz aller Codd. verworffen oder angenommen werden, und ſolche kritiſche Konjecturen ſind, wie Herr Hofrath Käſtner irgendwo ſagt, ſicherer als Bentleys Verbeſſerungen des Horaz. Aus dieſem Grunde erlaubte ich mir auch, bey den Lehnſäzen des Pappus, die, um alles beyſammen zu haben, was wir noch von den koſtbaren Ueberbleibſeln dieſes Werks beſizen, aus den angeführten Mſcpten der ehmals königlichen Pariſer Bibliothek, hier zum erſtenmahl im Original gedrukt erſcheinen, die nöthigen Verbeſſerungen ſogleich einzurüken, wo ich jedoch um der Leſer willen, die etwa ein allzuzärtliches kritiſches Gewiſſen haben möchten, die

fehler-

fehlerhafte Lesart der Mscpte bey solchen Stellen unten am Rand beyfügte. Wo aber wenigstens eins der Mscpte eine richtige Lesart hatte, hielt ichs für überflüssig, eine Variante anzugeben. In Ansehung des Simsonschen Texts änderte ich nichts, einige wenige Abkürzungen ausgenommen, welche die Deutlichkeit zu erlauben schien. Euklids Data sind in der Uebersezung nach der verbesserten Simsonschen Ordnung, die seit Hrn. Geheimen Hofrath Schwabs Ausgabe der Data ohnehin jezt unter uns die bekannteste ist, nicht wie im lateinischen Original nach der Gregorischen angeführt. Zu der Simsonschen Arbeit fügte ich noch analytisch-trigonometrische Rechnung in allen denjenigen Fällen bey, wo sie nicht ganz unmittelbar aus der Komposition floß. Endlich sind in dem von mir beygesezten ersten Anhang noch Bemerkungen über einige dieser Oerter, und in dem zweyten Anwendungen der Oerter bey Auflösung geometrischer Aufgaben enthalten. Ueber diese Anwendung der Oerter zur Auflösung der Aufgaben, und eben so auch über die verschiedenen umgekehrten Säze, die sich aus den Oertern herleiten lassen, könnten noch manche Bemerkungen gemacht werden, wenn es der Raum hier erlaubte.

Noch erfülle ich hier eine angenehme Pflicht, indem ich meinem verehrungswürdigsten Lehrer, Herrn Professor Pfleiderer zu Tübingen, dessen Unterricht, litterarischer Unterstüzung, und sonstiger Gewogenheit ich überhaupt sehr vieles zu

danken

danken habe, insbesondere für Seine gütige Theilnahme bey der gegenwärtigen Arbeit, öffentlich meinen lebhaftesten Dank bezeuge. Ausserdem, daß mich der Herr Professor zuerst zu dieser Arbeit aufmunterte, war Er noch besonders so gütig, mein Mscpt durchzusehen, und mir Bemerkungen darüber mitzutheilen.

Ich würde mich glüklich schäzen, wenn meine Bemühungen auch nur etwas darzu beytragen sollten, das Studium der so trefflichen analytisch-geometrischen Bücher der Alten unter uns allgemeiner zu machen. Es wäre doch wirklich schimpflich, wenn es noch länger Gelehrte *) geben sollte, die Euklids Data für Geschenke ansähen, welche irgend ein arabischer Emir dem Beherrscher der Glaubigen zu Füssen gelegt habe, oder Bibliothekare **), die Apollonius Büchern von Kegelschnitten, oder andern geometrischen Abschnitten, ihren Plaz neben den Abhandlungen vom Kaiserschnitte anwiesen.

*) S. Otium Hannoueran. siue Miscellan. Leibnit. p. 154.

**) S. Kraft Institutiones Geometr. sublim. p. 20.

Simsons Vorrede.

Die alten Geometer haben nicht weniger als drey und dreyßig zur Analyse gehörige Bücher geschrieben. Diß erzählt Pappus von Alexandrien, der allein die Nahmen dieser Bücher, und die Säze, welche sie enthielten, zu großem Vortheil der Geometrie uns aufbehalten hat. Er sagt zugleich, diese Bücher seyen blos für diejenigen nüzlich, die sich eine Fertigkeit in Auflösung der Aufgaben erwerben wollen. Da die Neuern die Deutlichkeit und Zierlichkeit der Alten bey den Beweisen und Verzeichnungen der Lehrsäze und Aufgaben bemerkten, schlossen sie zwar mit Recht, jene müßten die Analyse vorzüglich bearbeitet, und es darinn sehr weit gebracht haben; dabey aber äusserten einige den wunderlichen Gedanken, die Alten haben diese Kunst gefliſſentlich geheim gehalten. So schreibt Franz Schooten in seiner Abhandlung de concinnandis demonstrationibus, die zu Amsterdam 1661 gedruckt worden, von den alten Geometern folgendes: „sie (die Alten) scheinen, „um mit ihren Erfindungen und deren Beweisen bey der „Nachwelt desto größere Bewunderung zu erregen, sich „recht Mühe gegeben zu haben, die Art, wie sie auf „diese Erfindungen und Beweise gekommen waren, völ„lig zu unterdrüken und zu verstekken.“ Und noch deutlicher drükt Peter Schooten, Franzens Bruder, in der

Vorrede zu eben dieſem Buch, Franzens Meinung ſo aus: „Er (Franz) zweifelte auch gar nicht daran, daß „wohl die Alten das meiſte, womit ſie ſich ſo großen „Ruhm erwarben, durch die Analyſe gefunden, und nur, „um mit ihren Erfindungen deſto größeres Aufſehen zu „machen, dieſe Kunſt geheim halten, und ihre Säze „blos in der gewöhnlichen ſynthetiſchen Form dargeſtellt „haben. Weil er nun ſahe, daß es durch dieſe Ver„heimlichung der Alten dahin gekommen ſeye, daß Viele „nicht nur dieſen treflichen Nuzen der analytiſchen Me„thode nicht kennen, und vernachläſſigen, ſondern auch „ſelbſt an ihrer Gewisheit und Evidenz zweifeln, und „deßwegen unglücklich genug ſeyen, ſich über der Syn„theſe allein müde zu arbeiten, hielt er es für gut u. ſ. w.“ Wirklich eine ſtarke Anklage der Alten, zu der ſie aber wahrhaftig gar keine Veranlaſſung gegeben haben, ſondern die ſich blos auf die geringe Bekanntſchaft der Neuern zu Schootens Zeiten mit den Schriften der Alten gründet! Denn da Schooten und andere gewiß wußten, daß den Alten eine Analyſe bekannt geweſen ſeye, und doch aus eigener Schuld keine andere Analyſe kannten, als die Algebraiſche, von der Algebra aber vor Diophant keine Spur fanden; ſchloſſen ſie daraus, die Alten haben die Analyſe mit Abſicht verborgen gehalten. Peter Nunnez ſcheint dieſe Meinung zuerſt aufgeſtellt zu haben, der fol. 114. b. ſeiner Algebra ſo über die Alten klagt: „Wie gut wäre es, wenn diejenigen, die über „mathematiſche Gegenſtände geſchrieben haben, ihre Er„findungen nach eben der Methode, und eben den Schlüſ„ſen aufgezeichnet hätten, durch welche ſie ſelbſt darauf „gekommen ſind, und es nicht gemacht hätten, wie Ari„ſtoteles in ſeiner Mechanik von Künſtlern ſagt, die uns „ihre Maſchinen nur von auſſen zeigen, aber das Kunſt„werk verſteken, damit ſie deſto mehr bewundert werden „mögen. Die Erfindung iſt ſicher in jeder Kunſt von

„dem

»dem Lehrvortrag ſehr verſchieden, und man darf gar »nicht glauben, daß die meiſten Säze Euklids oder Ar»chimeds auf dem Weg erfunden worden ſeyen, auf wel»chem ſie uns darzu führen.« Und dieſe Meinung nimmt dann auch Wallis an im Anfang des 2ten Kapitels ſeiner Algebra, wo er eben dieſe Stelle des Nunnez aus dem Spaniſchen ins Lateiniſche überſezt hat. Der nemlichen Meinung iſt, wie ich ſchon bemerkt habe, auch Schooten, und die meiſten Neuern. Was Peter Nunnez betrift, ſo verdient er Entſchuldigung, weil er wahrſcheinlich die mathematiſchen Sammlungen des Pappus von Alexandrien niemahls geſehen hat. Denn Nunnez Algebra iſt zu Antwerpen im Jahr 1567. gedrukt worden, von Pappus Sammlungen aber hatte man vor dem Jahr 1588. keine Ausgabe. Aber Wallis (ſ. S. 2 ſeiner Algebra Vol. 2. Opp.) und Schooten (ſ. ſeine Vorrede zu den Locis Planis Apollonii) ſahen Pappus Vorrede zum 7ten Buch ſeiner Sammlungen, worinn er die angeführten analytiſchen Bücher der Alten der Reihe nach hererzählt, und aus dem Innhalt dieſer Bücher, von dem in eben dieſer Vorrede ein vollſtändiger Auszug geliefert iſt, ſieht man ſehr deutlich, daß die Alten ihre analytiſche Kunſt ſogar nicht unterdrükt und geheim gehalten haben, daß ſie vielmehr dieſelbe nicht nur mit großem Fleis bearbeiteten, ſondern auch durch ſo viele darüber geſchriebene Bücher öffentlich bekannt machten. Nun waren dieſe Bücher 600 Jahre und drüber, nemlich von Apollonius bis auf Pappus Zeiten in den Händen der Geometer. Folglich iſt dieſe Anklage gegen die Alten ſo abgeſchmakt, daß ſie blos von der Unachtſamkeit der Neuern herrührt, aber keineswegs für wahr gehalten werden kann.

Der berühmte Halley, dem ächte Geometrie ſo viel zu danken hat, meynt (ſ. ſeine Vorrede zu den Büchern des Apollonius de ſectione rationis), Pappus habe die

angeführten 33 Bücher unter dem Titel τόπος ἀναλυόμενος gesammelt, um zum Unterricht in der Analyse recht treffende, und der Fassungs-Kraft der Lernenden anpassende Beyspiele zu geben. Man sieht aber aus dem, was wir von dem Innhalt dieser Bücher wissen, deutlich, daß sie in der Absicht geschrieben worden, um dadurch den Liebhabern der Analyse die zu Auflösung der Aufgaben vorzüglich nothwendigen Hülfsmittel, schon ganz zum Gebrauch vorbereitet, in die Hände zu liefern. Zu diesem Zweck nun dienten sie auf verschiedene Art. Euklids Data enthalten Säze, die bey Auflösung der Aufgaben jeder Art beständige und nothwendige Anwendung finden. Die Bücher von den ebenen Oertern, von den Oertern an den Kegelschnitten (loca solida) und von den Oertern an der Oberfläche (loca ad superficiem), so wie auch die Porismen sind bey der Auflösung verschiedener Aufgaben brauchbar. Denn, wenn z. B. aus einer Voraussezung, oder Bedingung einer Aufgabe folgt, daß ein in der Aufgabe gesuchter Punkt einen der Lage nach gegebenen Ort berühre, und aus einer andern Bedingung folgt, daß derselbe Punkt einen andern der Lage nach gegebenen Ort berühre; so muß, wenn man diese Oerter beschreibt, der gesuchte Punkt nothwendig in ihrem Durchschnitt liegen, und eben damit ist folglich die Aufgabe aufgelöst. Die Bücher von dem Verhältniß-Schnitt, Schnitt des Raums, und bestimmten Schnitt, von den Berührungen und Neigungen (libri de sectione rationis, spatii, de sectione determinata, de tactionibus et inclinationibus) enthalten sehr allgemeine Aufgaben, auf welche die Auflösungen anderer Aufgaben öfters zurükgebracht werden. So oft nun diß geschieht, so ist die Aufgabe aufgelöst, und man darf nur das Buch und den Saz zitiren, auf welchen sie zurükgebracht worden, wovon man bey Pappus Beyspiele findet. Deßwegen waren auch in allen diesen

analy

analytiſchen Büchern alle Fälle, und alle Beſtimmungen der in ihnen aufgelöſten Aufgaben vollſtändig hergezählt und aufgelöſt, damit, ſo oft eine Aufgabe auf einen dieſer Fälle zurükgebracht wäre, die Auflöſung dieſes Falls, und ſeine Beſtimmung, wenn er eine hatte, ſogleich in die Augen fiele.

Unter dieſen Büchern der Alten für die geometriſche Analyſe haben die zwey Bücher des Apollonius von ebenen Oertern bey der Auflöſung verſchiedener Aufgaben beſonders häufige und vorzügliche Anwendung. Es hatte dieſelbige der ſcharfſinnige Fermat noch vor dem Jahr 1629 wieder hergeſtellt, wie man aus einem Brief von ihm S. 153 ſeiner Opp. ſieht. Sie wurden aber erſt im Jahr 1670 unter Fermats Operibus Variis gedrukt. Auch Schooten hat ſie wiederhergeſtellt, und von dieſem erſchienen ſie gedrukt im Jahr 1657 unter ſeinen Exercitationibus Mathematicis. Beyde aber ließen die beſondern Fälle und Beſtimmungen der Oerter hinweg, ohne welche ſie nur wenig brauchbar ſind; auch zeigen ſie bloß die Syntheſe der Oerter ohne ihre Analyſe, auſſer etwa bey 2 oder 3 Oertern, wo Schooten den arithmetiſchen Kalkul braucht.

Es ſchien mir alſo der Mühe werth zu ſeyn, dieſe Bücher vollſtändiger, und mehr dem Zwek des Apollonius gemäß darzuſtellen: auch glaubte ich, der Gebrauch und die Erklärung der Lehnſäze, welche Pappus für dieſe Bücher ſchrieb, oder, wenn ſie von Apollonius herrühren, für uns aufbehielt, dürften den Geometern nicht unangenehm ſeyn. Der größte und vorzüglichſte Theil davon iſt von Fermat, Schooten und Andern gar nicht berührt worden, und man wußte ſeit der erſten Ausgabe von Pappus Sammlungen bis auf unſre Zeiten nicht, zu welchem Ort ſie gehörten, und zu welchem Gebrauch ſie dienten. Mit Hülfe einiger von dieſen Lehnſäzen iſt die Auflöſung, welche Apollonius ſelbſt von dem Ort ge-

geben hatte, der in dem 5ten Saz des 2ten Buchs vorkommt, und den Fermat einen der schönsten Säze der Geometrie nennt, mit einer Zierlichkeit wiederhergestellt worden, die Fermats Auflösung weit übertrift. Schootens Auflösung ist ein blos arithmetischer Kalkul.

Vielleicht werden einige, die mehr an algebraischen Kalkul als an geometrische Analyse gewöhnt sind, meynen, die ebenen Oerter, und die Oerter an Kegelschnitten haben nur geringen Nuzen, weil sie keine Säze enthalten, die man nicht auf wenige allgemeine (algebraische) Regeln zurükbringen könne, dergleichen man von Descartes und Johannes de Wit hat, welche nachher Johannes Craig, und aus ihm der Marquis de l'Hôpital noch allgemeiner ausgedrükt haben. Allein diese Regeln sind von keinem Gebrauch beym Aufsuchen der Oerter, sondern dienen nur darzu, einen Ort, der in einer schon gefundenen Gleichung enthalten ist, mit Hülfe einer dieser Regeln zu verzeichnen. Ja selbst darzu sind diese Regeln nur wenig tauglich, wenn der zu verzeichnende Ort entweder weit einfacher, oder weit zusammengesezter ist, als derjenige, welcher in der Regel enthalten ist, nach welcher er verzeichnet werden soll. Denn in diesem Fall wird man immer die Verzeichnung durch Umwege auf eine gar nicht natürliche Art erhalten. Ueberdiß, wenn einmahl die geometrische Analyse einer Aufgabe oder eines Orts gut gemacht ist; so ergiebt sich gemeiniglich die Komposition ohne weitere Schwierigkeit von selbst. Hingegen, wenn ein Ort auf eine Gleichung gebracht ist; so wird öfters, die Komposition nach der allgemeinen Regel zu machen, mehr Arbeit und Scharfsinn erfodert, als die Gleichung zu finden. Es könnte diß leicht mit vielen Beyspielen aus dem Marquis de l'Hôpital und andern Schriftstellern bewiesen werden; ich will aber nur eines davon anführen.

Die

Die Regeln: $y = c + \frac{bx}{a}$, und $y = c - \frac{bx}{a}$ ſind zwey von denen, welche die Schriftſteller zur Verzeichnung der Oerter an der geraden Linie angeben. Nun wollen wir dann ſehen, wie ſie dieſe Regeln anwenden bey der Verzeichnung eines Orts, z. B. deſſen, der in dem 11ten Saz des 1ſten Buchs der von Schooten wiederhergeſtellten ebenen Oerter des Apollonius vorkommt. Dieſer Ort wird nach Schootens Auflöſung (Exercitat. Mathem. S. 246) auf folgende Gleichung gebracht; 246
$y = cdio + efko + ghlo + abnx + cdox - efox - ghox$ getheilt durch $mzz + bnz - doz - foz + hoz$. Nun ſagt Schooten, man ſolle Kürze halber p ſchreiben ſtatt $cdio + efko + ghlo$ getheilt durch $mzz + bnz - doz - foz + hoz$, und $\frac{q}{r}$ ſtatt $abn + cdo - efo - gho$ getheilt durch $mzz + bnz - doz - foz + hoz$; ſo erhält man $y = p \pm \frac{q}{r} x$. Weil man nun dieſe Gleichung, wenn p, q und r bekannt ſind, leicht verzeichnen kann; ſo glaubt er damit die Verzeichnung der vorgelegten Gleichung gelehrt zu haben; denn auſſer dem angeführten findet man nichts bey Schooten für die Kompoſition, d. i. die Verzeichnung und den Beweis des Orts. Und ſo haben diejenigen, welche dieſen Weg einſchlagen, mit ſolchen kindiſchen Operationen ſich und die Schüler der Geometrie zum Beſten. Aber auſſerdem daß dieſe und ihr ähnliche Gleichungen völlig ungeometriſch ſind, wer ſieht nicht, daß, die Größen p, q, r geometriſch zu finden, um vermittelſt derſelben die Gleichung zu verzeichnen, weit ſchwerer ſeyn müßte, als die Gleichung ſelbſt zu finden, und daß hierzu die Regel $y = p \pm \frac{q}{r} x$ gar nichts helfe? Und das nemliche muß

man von den Regeln sagen, welche sie für die Verzeichnung der Oerter am Kreise, und an den Kegelschnitten angeben. Diejenigen, die bloß an dergleichen algebraische Rechnungen gewöhnt sind, werden nie, als etwa von ohngefähr, im Stande seyn, natürliche und schöne Beweise der Lehrsäze, oder Auflösungen der Aufgaben und Oerter zu geben. Und man hat für geometrische Analyse und Composition von den in den angeführten analytischen Büchern der Alten enthaltenen Säzen mit Recht mehr zu erwarten, als von allen Lehren der Algebra.

Der hier folgende griechische Text ist aus der Vorrede des Pappus von Alexandrien zu dem 7ten Buch seiner mathematischen Sammlungen, die der berühmte Halley den 2 Büchern des Apollonius von dem Verhältniß-Schnitt vordruken ließ. Dieser gedrukte Text ist mit zwey in der königlichen Bibliothek zu Paris befindlichen Mscpten genau verglichen worden von Herrn Jacob Moor, der sich sowohl mit der Mathematik, als mit der griechischen Sprache, die er auf unserer Universität (zu Glasgow) lehrt, viel und glüklich beschäftigt hat. Mit Hülfe dieser Mscpte sind einige Verbesserungen vorgenommen worden, die unten am Rand bemerkt sind. Der eine Kodex ist No. 2368, der andere No. 2440.

ΤΟΠΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ β'.

Τῶν τόπων καθόλε οἱ μὲν εἰσὶν ἐφεκτικοὶ, ὃς καὶ Ἀπολλώνιος πρὸ τῶν ἰδίων a) στοιχείων λέγει σημεῖε μὲν τόπον σημεῖον, γραμμῆς δὲ τόπον γραμμὴν, ἐπιφανείας δὲ ἐπιφάνειαν, στερεᾶ δὲ στερεόν· οἱ δὲ διεξοδικοὶ, ὡς σημείε μὲν γραμμὴν, γραμμῆς ἐπιφάνειαν, ἐπιφανείας δὲ στερεόν· οἱ δὲ ἀναστροφικοὶ, ὡς σημείε μὲν ἐπιφάνειαν, γραμμῆς δὲ στερεόν. Τῶν δὲ ἐν τῷ ἀναλυομένῳ, οἱ μὲν τῶν θέσει δεδομένων ἐφεκτικοί εἰσιν· οἱ δὲ ἐπίπεδοι λεγόμενοι καὶ οἱ στερεοὶ καὶ γραμμικοὶ διεξοδικοί εἰσι σημείων· οἱ δὲ πρὸς ἐπιφανείας ἀναστροφικοὶ μὲν εἰσὶ σημείων, διεξοδικοὶ δὲ γραμμῶν. οἱ μέν τοι γραμμικοὶ ἀπὸ τῶν πρὸς ἐπιφάνειαν δείκνυνται. Λέγονται δὲ ἐπίπεδοι μὲν τόποι ἕτοί τε περὶ ὧν ἐπάγομεν, καθόλε ὅσοι εἰσὶν εὐθεῖαι γραμμαὶ ἢ κύκλοι· στερεοὶ δὲ, ὅσοι εἰσὶ κώνων τομαὶ, παραβολαὶ, ἢ ἐλλείψεις, ἢ ὑπερβολαί. Γραμμικοὶ δὲ τόποι λέγονται, ὅσαι γραμμαί εἰσιν ἤτε εὐθεῖαι, ἤτε κύκλοι, ἤτε τις τῶν εἰρημένων κωνικῶν τομῶν. Οἱ δὲ ὑπὸ Ἐρατοσθένες ἐπιγραφέντες τόποι πρὸς μεσότητας, ἐκ τῶν

a) In Halleys griechiſchen Text rükte ich noch aus den angeführten Mſcten der königlichen Pariſer Bibliothek das Wort ἰδίων ein. (Diß Wort hat auch das Mſcpt von Daſypodius.)

προειρημένων εἰσὶ τῷ γένει· ἀπὸ δὲ τῆς ἰδιότητος τῶν ὑποθέσεων * ἐκείνοις. Οἱ μὲν ἓν ἀρχαῖοι τῶν ἐπιπέδων τόπων τάτων τάξιν ἀποβλέποντες ἐστοιχείωσαν· ἧς ἀμελήσαντες οἱ μετ' αὐτὸς προσέθηκαν ἕτερος, ὡς ἐκ ἀπείρων τὸ πλῆθος ὄντων, εἰ θέλοι τις προσγράφειν ἐ τῆς τάξεως ἐκείνης ἐχόμενα. Θήσω ἓν τὰ μὲν προκείμενα ὕστερα, τὰ δὲ τῆς [b]) τάξεως πρότερα, μιᾷ περιλαβὼν προτάσει ταύτῃ. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἀχθῶσιν [c]), ἤτοι ἀπὸ ἑνὸς δεδομένυ σημείυ, ἢ ἀπὸ δύο, καὶ ἤτοι ἐπ' εὐθείας, ἢ παράλληλοι, ἢ δεδομένην περιέχυσαι γωνίαν, καὶ ἤτοι λόγον ἔχυσαι πρὸς ἀλλήλας, ἢ χωρίον περιέχυσαι δεδομένον, ἅπτηται δὲ τὸ τῆς μιᾶς πέρας ἐπιπέδυ τόπυ θέσει δεδομένυ ἄψεται καὶ τὸ τῆς ἑτέρας πέρας ἐπιπέδυ τόπυ θέσει δεδομένυ, ὅτε μὲν τῷ ὁμογενῶς, ὅτε δὲ τῷ ἑτέρυ, καὶ ὅτε μὲν ὁμοίως κειμένυ πρὸς τὴν εὐθεῖαν, ὅτε δὲ ἐναντίως· ταῦτα δὲ γίνεται παρὰ τὰς διαφορὰς τῶν ὑποκειμένων. Τὰ δὲ προσκείμενα ἐν ἀρχῇ ὑπὸ Χαρμάνδρυ γ' συμφωνεῖ [d]) ταῦτα. Ἐὰν εὐθείας τῷ μεγέθει δεδομένης τὸ ἓν πέρας ἓν δεδομένον, τὸ ἕτερον ἅψεται θέσει δεδομένης περιφερείας κοίλης. Ἐὰν ἀπὸ δύο δεδομένων σημείων κλασθῶσιν εὐθεῖαι δεδομένην περιέχυσαι γωνίαν, τὸ κοινὸν αὐτῶν σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης περιφερείας κοίλης. Ἐὰν τριγώνυ χωρίυ μεγέθει δεδομένυ ἡ βάσις θέσει καὶ μεγέθει δεδομένη ᾖ, ἡ κορυφὴ αὐτῆ ἅψεται θέσει δεδομένης εὐθείας. Ἕτερα δὲ τοιαῦτα. Ἐὰν εὐθείας τῷ μεγέθει δεδομένης, καὶ παρά τινα θέσει δεδομένην εὐθεῖαν ἠγμένης, τὸ ἓν πέρας ἅπτηται θέσει δεδομένης εὐθείας, ἅψεται καὶ τὸ ἕτερον εὐθείας δεδομένης. Ἐὰν ἀπό τινος σημείυ ἐπὶ θέσει δεδομένας

δύο

b) Die angeführten Mscpte haben: ἐκ τῆς τάξεως.

c) Die angeführten Mscpte lesen ganz richtig das Wort ἀχθῶσιν, das in Halleys gedrucktem Text fehlt.

d) Ich sezte aus den Mscpten συμφωνεῖ statt des im gedrukten Text stehenden συμφερονεῖ.

δύο εὐθείας, παραλλήλως ἢ συμπιπτούσας καταχθῶσιν ἐν δεδομέναις γωνίαις ἤτοι λόγον ἔχουσαι πρὸς ἀλλήλας δεδομένον, ἢ ὧν ἡ μία, μεθ' ἧς πρὸς ἣν ἡ ἑτέρα λόγον ἔχει δοθέντα, δεδομένη ἐστίν· ἄψεται τὸ σημεῖον θέσει δεδομένης εὐθείας. Καὶ ἐὰν ὦσιν ὁποσαιοῦν εὐθεῖαι θέσει δεδομέναι, καὶ ἐπ' αὐτὰς ἀπό τινος σημείου καταχθῶσιν εὐθεῖαι ἐν δεδομέναις γωνίαις, ἢ δὲ τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ κατηγμένης, μετὰ τοῦ ὑπὸ δοθείσης καὶ ἑτέρας κατηγμένης ἴσον τῷ ὑπὸ δοθείσης καὶ ἑτέρας κατηγμένης, καὶ τῶν λοιπῶν ὁμοίως, τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης εὐθείας. Ἐὰν ἀπό τινος σημείου ἐπὶ θέσει δεδομένας παραλλήλως καταχθῶσιν εὐθεῖαι ἐν δεδομέναις γωνίαις, ἤτοι e) ἀποτέμνουσαι πρὸς τοῖς ἐπ' αὐτῶν δοθεῖσι σημείοις εὐθείας λόγον ἐχούσας δοθέντα, ἢ χωρίον περιέχουσαι δεδομένον, ἢ ὥστε τὰ ἐπ' αὐτῶν τῶν κατηγμένων δεδομένα εἶδη, ἢ τὴν ὑπεροχὴν τῶν εἰδῶν ἴσην εἶναι δεδομένῳ χωρίῳ, τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης εὐθείας.

Τὸ δὲ δεύτερον βιβλίον περιέχει τάδε. Ἐὰν ἀπὸ δύο δεδομένων σημείων εὐθεῖαι κλασθῶσιν, καὶ ἢ τὰ ἀπ' αὐτῶν δοθέντι χωρίῳ διαφέροντα, τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης εὐθείας. Ἐὰν δὲ ὦσιν ἐν λόγῳ δοθέντι, ἤτοι εὐθείας ἢ περιφερείας. Ἐὰν ἢ θέσει δεδομένη εὐθεῖα, καὶ ἐπ' αὐτῆς δοθὲν σημεῖον, καὶ ἀπὸ τάτε διαχθεῖσά τις πεπερασμένη, ἀπὸ δὲ τοῦ πέρατος ἀχθῇ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὴν θέσει δεδομένην, καὶ ἢ τὸ ἀπὸ τῆς διαχθείσης ἴτον τῷ ὑπὸ δοθείσης καὶ ἧς ἀπολαμβάνει, ἤτοι πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ ἢ πρὸς ἑτέρῳ δοθέντι σημείῳ ἐπὶ τῆς θέσει δεδομένης, τὸ πέρας

e) Diese Aenderung erlaubte ich mir nothgedrungen, denn Halleys gedrukter Text, und so auch die Mscpte haben die Lesart: ἀποτέμνουσαι πρὸς τοῖς ἐπ' αὐτῶν δοθεῖσι σημείοις εὐθείας, ἤτοι λόγον ἐχούσας δοθέντα, ἢ χωρίον περιεχούσας. Bey dieser Lesart wäre der Ort im zweyten Fall kein ebener Ort, sondern ein Ort an einer Hyperbel.

δύο εὐθείας, παραλλήλες ἢ συμπιπτώσας καταχθῶσιν ἐν δεδομέναις γωνίαις ἤτοι λόγον ἔχουσαι πρὸς ἀλλήλας δεδομένον, ἢ ὧν ἡ μία, μεθ' ἧς πρὸς ἣν ἡ ἑτέρα λόγον ἔχει δοθέντα, δεδομένη ἐστίν· ἄψεται τὸ σημεῖον θέσει δεδομένης εὐθείας. Καὶ ἐὰν ὦσιν ὁποσαιῶν εὐθεῖαι θέσει δεδομέναι, καὶ ἐπ' αὐτὰς ἀπό τινος σημείε καταχθῶσιν εὐθεῖαι ἐν δεδομέναις γωνίαις, ἢ δὲ τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ κατηγμένης, μετὰ τῆ ὑπὸ δοθείσης καὶ ἑτέρας κατηγμένης ἴσον τῷ ὑπὸ δοθείσης καὶ ἑτέρας κατηγμένης, καὶ τῶν λοιπῶν ὁμοίως, τὸ σημεῖον ἄψεται θέσει δεδομένης εὐθείας. Ἐὰν ἀπό τινος σημείε ἐπὶ θέσει δεδομένας παραλλήλες καταχθῶσιν εὐθεῖαι ἐν δεδομέναις γωνίαις, ἤτοι e) ἀποτέμνουσαι πρὸς τοῖς ἐπ' αὐτῶν δοθεῖσι σημείοις εὐθείας λόγον ἐχούσας δοθέντα, ἢ χωρίον περιέχουσαι δεδομένον, ἢ ὥστε τὰ ἐπ' αὐτῶν τῶν κατηγμένων δεδομένα εἴδη, ἢ τὴν ὑπεροχὴν τῶν εἰδῶν ἴσην εἶναι δεδομένῳ χωρίῳ, τὸ σημεῖον ἄψεται θέσει δεδομένης εὐθείας.

Τὸ δὲ δεύτερον βιβλίον περιέχει τάδε. Ἐὰν ἀπὸ δύο δεδομένων σημείων εὐθεῖαι κλασθῶσιν, καὶ ἢ τὰ ἀπ' αὐτῶν δοθέντι χωρίῳ διαφέροντα, τὸ σημεῖον ἄψεται θέσει δεδομένης εὐθείας. Ἐὰν δὲ ὦσιν ἐν λόγῳ δοθέντι, ἤτοι εὐθείας ἢ περιφερείας. Ἐὰν ἢ θέσει δεδομένη εὐθεῖα, καὶ ἐπ' αὐτῆς δοθὲν σημεῖον, καὶ ἀπὸ τάτε διαχθεῖσά τις πεπερασμένη, ἀπὸ δὲ τῆ πέρατος ἀχθῇ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὴν θέσει δεδομένην, καὶ ἢ τὸ ἀπὸ τῆς διαχθείσης ἴσον τῷ ὑπὸ δοθείσης καὶ ἧς ἀπολαμβάνει, ἤτοι πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ ἢ πρὸς ἑτέρῳ δοθέντι σημείῳ ἐπὶ τῆς θέσει δεδομένης, τὸ πέρας

e) Diese Aenderung erlaubte ich mir nothgedrungen, denn Halleys gedrukter Text, und so auch die Mscpte haben die Lesart: ἀποτέμνουσαι πρὸς τοῖς ἐπ' αὐτῶν δοθεῖσι σημείοις εὐθείας, ἤτοι λόγον ἐχούσας δοθέντα, ἢ χωρίον περιεχούσας. Bey dieser Lesart wäre der Ort im zweyten Fall kein ebener Ort, sondern ein Ort an einer Hyperbel.

ρας τῆςδε ἄψεται θέσει δεδομένης περιφερείας. Ἐὰν ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων εὐθεῖαι κλασθῶσιν, καὶ ἡ τὸ ἀπὸ τῆς μιᾶς τῶ ἀπὸ τῆς ἑτέρας δοθέντι μεῖζον ἢ ἐν λόγῳ, τὸ σημεῖον ἄψεται θέσει δεδομένης περιφερείας. Ἐὰν ἀπὸ ὁσωνῶν δεδομένων σημείων κλασθῶσιν εὐθεῖαι πρὸς ἑνὶ σημείῳ, καὶ ἡ τὰ ἀπὸ πασῶν εἴδη ἴσα δοθέντι χωρίῳ, τὸ σημεῖον ἄψεται θέσει δεδομένης περιφερείας. Ἐὰν ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων κλασθῶσιν εὐθεῖαι, ἀπὸ δὲ τῶ σημείῳ παρὰ τὴν θέσει ἀχθεῖσα εὐθεῖα ἀπολαμβανομένη ἀπὸ θέσει δεδομένης εὐθείας πρὸς δοθέντι σημείῳ, καὶ ἡ τὰ ἀπὸ τῶν κεκλασμένων εἴδη ἴσα τῷ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης, τὸ πρὸς τῇ κλάσει σημεῖον ἄψεται θέσει δεδομένης περιφερείας. Ἐὰν ἐντὸς κύκλω θέσει δεδομένω δοθέν τι σημεῖον ᾖ, καὶ δι' αὐτῶ ἀχθῇ τις εὐθεῖα, καὶ ἐπ' αὐτῆς ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, καὶ ἡ τὸ ἀπὸ τῆς ἄχρι τῶ δοθέντος ἐντὸς σημείω ἴσον τῷ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης, ἢ τὸ μόνον, ἢ τετό τε καὶ τὸ [f]) ὑπὸ τῶν ἐντὸς δύο τμημάτων, τὸ ἐκτὸς σημεῖον ἄψεται θέσει δεδομένης εὐθείας. Καὶ ἐὰν τῶτο μὲν σημεῖον ἅπτηται θέσει δεδομένης εὐθείας, ὁ δὲ κύκλος μὴ ὑπόκειται, τὰ ἐφ' ἑκατέρα τῶ δεδομένω σημεῖα ἄψεται θέσει δεδομένης περι-

[redacted]

Παππ. λήμματα εἰς τὰ τῶν ἐπιπέδων τόπων βιβλία.

Εἰς τὴν τῆ δευτέρᾳ περῶτον τόπου. g)

Fig. 1.

α) Τρίγωνον τὸ αβγ, καὶ διήχθω τυχοῦσα ἡ αδ, καὶ ἔστω ὡς ἡ βδ πρὸς τὴν δγ, ἕτω τὸ ἀπὸ βα πρὸς τὸ ἀπὸ αγ· ὅτι γίνεται ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν βδγ τῷ ἀπὸ αδ. Ἤχθω διὰ τοῦ γ τῇ αβ παράλληλος ἡ γε. Ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βδ πρὸς τὴν δγ, ἕτως ἡ αβ πρὸς τὴν γε, καὶ τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ὑπὸ αβ, γε. ὡς δὲ ἡ βδ πρὸς τὴν δγ, ἕτως ἦν τὸ ἀπὸ βα πρὸς τὸ ἀπὸ αγ. Ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ βα, γε τῷ ὑπὸ αγ. Ἀνάλογον ἄρα καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ἐναλλάξ. Ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ γαδ τῇ β. ὥστε ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ βδγ h) τῷ ἀπὸ αδ. Τὸ δὲ ἀναστρεφόμενον φανερόν.

Εἰς τὸν δεύτερον τόπον.

Fig. 2.

β) Τρίγωνον τὸ αβγ, καὶ καθετος ἡ δα· ὅτι μεῖζον ἡ τῶν ἀπὸ βα, αγ ὑπεροχὴ ἴση ἐστὶ τῇ τῶν ἀπὸ βδ, δγ ὑπεροχῇ. Ἐὰν δὲ ἡ βγ δίχα τμηθῇ τὸ ε, ἡ τῶν ἀπὸ βδ, δγ i) ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ βγ, εδ. Ὅτι μὲν οὖν ἡ τῶν ἀπὸ βα, αγ ὑπεροχὴ ἴση ἐστὶ τῇ τῶν ἀπὸ δβ, δγ ὑπεροχῇ, φανερόν. Ἔστι γὰρ τὸ μὲν ἀπὸ τοῦ k) αβ ἴσον

g) Simson macht zwar am gehörigen Ort gegen die Ordnung dieser Lehnsätze bedeutende Einwürfe. Inzwischen ließ ich sie hier doch auf einander folgen, wie sie in den Mscpten stehen. Man wird Simsons Einwendungen nur um so besser verstehen. A. d. U.

h) Die Mscpte haben βαγ.

i) Die Mscte blos: ἡ τῶν ἀπὸ βδ.

k) Mscpte ἀπὸ τῶν αβ.

πρεειρημένων εἰσὶ τῷ γένει· ἀπὸ δὲ τῆς ἰδιότητος τῶν ὑποθέσεων * ἐκείνοις. Οἱ μὲν ἓν ἀρχαῖοι τῶν ἐπιπέδων τόπων τάτων τάξιν ἀποβλέποντες ἐστοιχείωσαν· ἧς ἀμελήσαντες οἱ μετ' αὐτὸς προσέθηκαν ἕτερος, ὡς ἐκ ἀπείρων τὸ πλῆθος ὄντων, εἰ θέλοι τις προσγράφειν ἀ τῆς τάξεως ἐκείνης ἐχόμενα. Θήσω ἓν τὰ μὲν προκείμενα ὕστερα, τὰ δὲ τῆς [b]) τάξεως πρότερα, μιᾷ περιλαβὼν προτάσει ταύτῃ. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἁχθῶσιν [c]), ἤτοι ἀπὸ ἑνὸς δεδομένου σημείου, ἢ ἀπὸ δύο, καὶ ἤτοι ἐπ' εὐθείας, ἢ παράλληλοι, ἢ δεδομένην περιέχουσαι γωνίαν, καὶ ἤτοι λόγον ἔχουσαι πρὸς ἀλλήλας, ἢ χωρίον περιέχουσαι δεδομένον, ἅπτηται δὲ τὸ τῆς μιᾶς πέρας ἐπιπέδου τόπου θέσει δεδομένου ἄψεται καὶ τὸ τῆς ἑτέρας πέρας ἐπιπέδου τόπου θέσει δεδομένου, ὅτε μὲν τοῦ ὁμογενοῦς, ὅτε δὲ τοῦ ἑτέρου, καὶ ὅτε μὲν ὁμοίως κειμένου πρὸς τὴν εὐθεῖαν, ὅτε δὲ ἐναντίως· ταῦτα δὲ γίνεται παρὰ τὰς διαφορὰς τῶν ὑποκειμένων. Τὰ δὲ προσκείμενα ἐν ἀρχῇ ὑπὸ Χαρμάνδρου γ' συμφωνεῖ [d]) ταῦτα. Ἐὰν εὐθείας τῷ μεγέθει δεδομένης τὸ ἓν πέρας ᾖ δεδομένον, τὸ ἕτερον ἅψεται θέσει δεδομένης περιφερείας κοίλης. Ἐὰν ἀπὸ δύο δεδομένων σημείων κλασθῶσιν εὐθεῖαι δεδομένην περιέχουσαι γωνίαν, τὸ κοινὸν αὐτῶν σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης περιφερείας κοίλης. Ἐὰν τριγώνου χωρίου μεγέθει δεδομένου ἡ βάσις θέσει καὶ μεγέθει δεδομένη ᾖ, ἡ κορυφὴ αὐτῆς ἅψεται θέσει δεδομένης εὐθείας. Ἕτερα δὲ τοιαῦτα. Ἐὰν εὐθείας τῷ μεγέθει δεδομένης, καὶ παρά τινα θέσει δεδομένην εὐθεῖαν ἠγμένης, τὸ ἓν πέρας ἅπτηται θέσει δεδομένης εὐθείας, ἅψεται καὶ τὸ ἕτερον εὐθείας δεδομένης. Ἐὰν ἀπό τινος σημείου ἐπὶ θέσει δεδομένας

δύο

b) Die angeführten Mscpte haben: ἐκ τῆς τάξεως.

c) Die angeführten Mscpte lesen ganz richtig das Wort ἁχθῶσιν, das in Halleys gedrucktem Text fehlt.

d) Ich sezte aus den Mscpten συμφωνεῖ statt des im gedrukten Text stehenden συμφερονεῖ.

δύο εὐθείας, παραλλήλους ἢ συμπιπτούσας καταχθῶσιν ἐν δεδομέναις γωνίαις ἤτοι λόγον ἔχουσαι πρὸς ἀλλήλας δεδομένον, ἢ ὧν ἡ μία, μεθ' ἧς πρὸς ἣν ἡ ἑτέρα λόγον ἔχει δοθέντα, δεδομένη ἐστίν· ἄψεται τὸ σημεῖον θέσει δεδομένης εὐθείας. Καὶ ἐὰν ὦσιν ὁποσαιοῦν εὐθεῖαι θέσει δεδομέναι, καὶ ἐπ' αὐτὰς ἀπό τινος σημείου καταχθῶσιν εὐθεῖαι ἐν δεδομέναις γωνίαις, ἢ δὲ τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ κατηγμένης, μετὰ τοῦ ὑπὸ δοθείσης καὶ ἑτέρας κατηγμένης ἴσον τῷ ὑπὸ δοθείσης καὶ ἑτέρας κατηγμένης, καὶ τῶν λοιπῶν ὁμοίως, τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης εὐθείας. Ἐὰν ἀπό τινος σημείου ἐπὶ θέσει δεδομένας παραλλήλους καταχθῶσιν εὐθεῖαι ἐν δεδομέναις γωνίαις, ἤτοι e) ἀποτέμνουσαι πρὸς τοῖς ἐπ' αὐτῶν δοθεῖσι σημείοις εὐθείας λόγον ἐχούσας δοθέντα, ἢ χωρίον περιέχουσαι δεδομένον, ἢ ὥστε τὰ ἐπ' αὐτῶν τῶν κατηγμένων δεδομένα εἶδη, ἢ τὴν ὑπεροχὴν τῶν εἰδῶν ἴσην εἶναι δεδομένῳ χωρίῳ, τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης εὐθείας.

Τὸ δὲ δεύτερον βιβλίον περιέχει τάδε. Ἐὰν ἀπὸ δύο δεδομένων σημείων εὐθεῖαι κλασθῶσιν, καὶ ἢ τὰ ἀπ' αὐτῶν δοθέντι χωρίῳ διαφέροντα, τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης εὐθείας. Ἐὰν δὲ ὦσιν ἐν λόγῳ δοθέντι, ἤτοι εὐθείας ἢ περιφερείας. Ἐὰν ἢ θέσει δεδομένη εὐθεῖα, καὶ ἐπ' αὐτῆς δοθὲν σημεῖον, καὶ ἀπὸ τέτε διαχθεῖσά τις πεπερασμένη, ἀπὸ δὲ τοῦ πέρατος ἀχθῇ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὴν θέσει δεδομένην, καὶ ἢ τὸ ἀπὸ τῆς διαχθείσης ἴσον τῷ ὑπὸ δοθείσης καὶ ἧς ἀπολαμβάνει, ἤτοι πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ ἢ πρὸς ἑτέρῳ δοθέντι σημείῳ ἐπὶ τῆς θέσει δεδομένης, τὸ πέρας

e) Diese Aenderung erlaubte ich mir nothgedrungen, denn Halleys gedrukter Text, und so auch die Mscpte haben die Lesart: ἀποτέμνουσαι πρὸς τοῖς ἐπ' αὐτῶν δοθεῖσι σημείοις εὐθείας, ἤτοι λόγον ἐχούσας δοθέντα, ἢ χωρίον περιεχούσας. Bey dieser Lesart wäre der Ort im zweyten Fall kein ebener Ort, sondern ein Ort an einer Hyperbel.

ρας τῆςδε ἅψεται θέσει δεδομένης περιφερείας. Ἐὰν ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων εὐθεῖαι κλασθῶσιν, καὶ ἡ τὸ ἀπὸ τῆς μιᾶς τῷ ἀπὸ τῆς ἑτέρας δοθέντι μεῖζον ἢ ἐν λόγῳ, τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης περιφερείας. Ἐὰν ἀπὸ ὁσωνῶν δεδομένων σημείων κλασθῶσιν εὐθεῖαι πρὸς ἑνὶ σημείῳ, καὶ ἡ τὰ ἀπὸ παντῶν εἴδη ἴσα δοθέντι χωρίῳ, τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης περιφερείας. Ἐὰν ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων κλασθῶσιν εὐθεῖαι, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου παρὰ τὴν θέσει ἀχθεῖσα εὐθεῖα ἀπολαμβανομένη ἀπὸ θέσει δεδομένης εὐθείας πρὸς δοθέντι σημείῳ, καὶ ἡ τὰ ἀπὸ τῶν κεκλασμένων εἴδη ἴσα τῷ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης, τὸ πρὸς τῇ κλάσει σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης περιφερείας. Ἐὰν ἐντὸς κύκλου θέσει δεδομένου δοθέν τι σημεῖον ᾖ, καὶ δι' αὐτοῦ ἀχθῇ τις εὐθεῖα, καὶ ἐπ' αὐτῆς ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, καὶ ἡ τὸ ἀπὸ τῆς ἄχρι τοῦ δοθέντος ἐντὸς σημείου ἴσον τῷ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης, ἢ τὸ μέσον, ἢ τοῦτό τε καὶ τὸ [f]) ὑπὸ τῶν ἐντὸς δύο τμημάτων, τὸ ἐκτὸς σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης εὐθείας. Καὶ ἐὰν τοῦτο μὲν σημεῖον ἅπτηται θέσει δεδομένης εὐθείας, ὁ δὲ κύκλος μὴ ὑπόκειται, τὰ ἐφ' ἑκατέρᾳ τοῦ δεδομένου σημείου ἅψεται θέσει δεδομένης περι-

Πάππου λήμματα εἰς τὰ τῶν ἐπιπέδων τόπων βιβλία.

Εἰς τὸν τῦ δευτέρου τρίτον τόπον. g)

Fig. 1.

α). Τριγωνον τὸ αβγ, καὶ διήχθω τις ἡ αδ, καὶ ἔτω ὡς ἡ βδ πρὸς τὴν δγ, ἕτω τὸ ἀπὸ βα πρὸς τὸ ἀπὸ αγ· ὅτι γίνεται ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν βδγ τῷ ἀπὸ αδ. Ἤχθω διὰ τῦ γ τῇ αβ παράλληλος ἡ γε. Ἐστιν ἄρα ὡς ἡ βδ πρὸς τὴν δγ, ἕτως ἡ αβ πρὸς τὴν γε, καὶ τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ὑπὸ αβ, γε. ὡς δὲ ἡ βδ πρὸς τὴν δγ, ἕτως ἦν τὸ ἀπὸ βα πρὸς τὸ ἀπὸ αγ. Ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ βα, γε τῷ ὑπὸ αγ. Ἀνάλογον ἄρα καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ἐναλλάξ. Ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ γαδ τῇ β. ὥστε ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ βδγ h) τῷ ἀπὸ αδ. Τὸ δὲ ἀναστρεφόμενον φανερόν.

Εἰς τὸν δεύτερον τόπον.

Fig. 2.

β) Τριγωνον τὸ αβγ, καὶ κάθετος ἡ δα· ὅτι μὲν ἡ τῶν ἀπὸ βα, αγ ὑπεροχὴ ἴση ἐστὶ τῇ τῶν ἀπὸ βδ, δγ ὑπεροχῇ. Ἐὰν δὲ ἡ βγ δίχα τμηθῇ τὸ ε, ἡ τῶν ἀπὸ βδ, δγ i) ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ βγ, εδ. Ὅτι μὲν ἕν ἡ τῶν ἀπὸ βα, αγ ὑπεροχὴ ἴση ἐστὶ τῇ τῶν ἀπὸ δβ, δγ ὑπεροχῇ, φανερόν. Ἔστι γὰρ τὸ μὲν ἀπὸ τῦ k) αβ ἴσον

g) Simſon macht zwar am gehörigen Ort gegen die Ordnung dieſer Lehnſäze bedeutende Einwürfe. Inzwiſchen ließ ich ſie hier doch auf einander folgen, wie ſie in den Mſcpten ſtehen. Man wird Simſons Einwendungen nur um ſo beſſer verſtehen. A. d. U.

h) Die Mſcpte haben βαγ.

i) Die Mſcte blos: ἡ τῶν ἀπὸ βδ.

k) Mſcpte ἀπὸ τῶν αβ.

ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν βδ, αδ. Τὸ δὲ ἀπὸ αγ τοῖς ἀπὸ τῶν αδ, δγ. Ωι ἄρα ὑπερέχει τὸ ἀπὸ αβ τῷ ἀπὸ αγ, τέτῳ ὑπερέχει τὰ [l]) ἀπὸ αδ, δβ τῶν ἀπὸ αδ. δγ. καὶ ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ αδ. λοιπὸν ἄρα, ᾧ ὑπερέχει τὸ ἀπὸ βδ τῷ ἀπὸ δγ, [m]) τέτῳ ὑπερέχει τὸ ἀπὸ αβ τῷ ἀπὸ αγ. Τῶν δὲ ἀπὸ βδ, δγ τὸ δὶς ὑπὸ βγ, εδ ὥσε καὶ τῶν ἀπὸ αβ, αγ. Ὅτι καὶ ἡ τῶν ἀπὸ βδ, δγ ὑπεροχή ἐσι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν βγ, δε ἔτως. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐσιν ἡ βε τῇ εγ, ἡ βδ ἄρα ἴση ἐσὶ συναμφοτέρῳ τῇ γεδ. καὶ τὸ ἀπὸ βδ [n]) ἄρα ἴσον ἐσὶ τῷ ἀπὸ συναμφοτέρε τῆς γεδ. Ἀλλὰ τὸ ἀπὸ συναμφοτέρε τῆς γεδ τῷ ἀπὸ γδ ὑπερέχει τῷ τετράκις ὑπὸ γεδ, τετέσι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν βγ, δε. Ἡ ἄρα τῶν ἀπὸ βδ, δγ ὑπεροχή ἐσι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν βγ, δε.

Εἰς τὸν αὐτὸν, ἐὰν μὴ ὁ λόγος ἴσε πρὸς ἴσον.

Fig. 3.

γ) Τρίγωνον τὸ αβγ, καὶ τὸ ἀπὸ βα τῷ ἀπὸ αγ δοθέντος μεῖζον ἔσω ἢ ἐν λόγῳ· δοθὲν μὲν τὸ ε, λόγῳ δὲ τῷ τῆς βδ πρὸς τὴν δγ. ὅτι μεῖζόν ἐσι τὸ ὑπὸ δβγ [o]) τῷ ε χωρίῳ. Ἀφῃρήσθω γὰρ τὸ δοθὲν χωρίον τὸ ὑπὸ αβη. λοιπῷ [p]) ἄρα τῷ ὑπὸ βαη πρὸς τὸ ὑπὸ αγ λόγος ἐσὶ δοθεὶς ὁ αὐτὸς τῷ τῆς βδ πρὸς τὴν δγ. [q]) Κείσθω τῷ ὑπὸ βαη ἴσον τὸ ὑπὸ ζαγ. λοιπὸν ἄρα τῷ ὑπὸ ζαγ πρὸς τὸ ἀπὸ αγ, τετέσι τῆς ζα πρὸς τὴν αγ, ὁ αὐτὸς τῷ τῆς βδ πρὸς τὴν δγ. Παράλληλος ἄρα ἐσὶν ἡ αδ τῇ ζβ. ἴση ἄρα ἐσὶν ἡ ζ γωνία τῇ ἀπὸ γαδ γωνίᾳ. ἀλλὰ ἡ ζ ἴση ἐσὶ τῇ ὑπὸ αηγ γωνίᾳ. καὶ ἡ ὑπὸ αηγ ἄρα γωνία ἴση ἐσὶ τῇ ὑπὸ γαδ γωνίᾳ. Μείζων ἐσὶν ἡ ἀπὸ αδθ τῆς ὑπὸ γαδ. καὶ τῆς ὑπὸ γηα ἄρα μείζων ἐσὶν ἡ ὑπὸ

l) Mſ. τὸ. m) Mſ. βθ. n) εδ.
o) βδγ. p) λοιπὸν. q) αγ.

ὑπὸ αδθ γωνία. ὥσε μεῖζόν ἐσι τὸ ὑπὸ δβγ τῦ ὑπὸ αβη, τυτέσι τῦ ε τῦ δοθέντος χωρίυ.

Εἰς τὸν τρίτον τόπον.

Fig. 4.

δ) Τριγωνον τὸ αβγ, καὶ διαχθῆ τις ἡ αδ δίχα τέμνυσα τὴν βγ. ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν βα αγ τετράγωνα διπλάσιά ἐσι τῶν ἀπὸ τῶν αδ δγ τετραγώνων. Ἤχθω κάθετος ἡ αε. Τὰ δὲ ἀπὸ τῶν βε [1]) εγ τετράγωνα διπλάσιά ἐσι τῶν ἀπὸ τῶν βδ εδ τετραγώνων. Ἐσὶ δὲ καὶ τὸ δὶς ὑπὸ αε μετὰ τῦ δὶς ἀπὸ δε διπλάσιον τῦ ἀπὸ αδ. τὰ δὲ ἀπὸ τῶν βε εγ μετὰ τῦ δὶς ἀπὸ αε ἴσα ἐσὶ τοῖς ἀπὸ τῶν βα αγ. Τὰ ἄρα ἀπὸ βα αγ διπλάσιά ἐσι τῶν ἀπὸ [2]) βδ αδ τετραγώνων, τυτέσι τῶν ἀπὸ γδ αδ τετραγώνων.

Fig. 5.

ε) Λόγυ ὄντος τῦ τῆς αβ πρὸς τὴν βγ [1]) καὶ χωρίυ τῦ ὑπὸ τῶν γα αδ. ἐὰν τῶν δβ βγ μέση ἀνάλογον ληφθῆ ἡ βε, δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ αε τῦ ἀπὸ εγ μεῖζόν ἐσι τῷ ὑπὸ γα αδ, ἢ ἐν λόγῳ τῷ τῆς αβ πρὸς τὴν βγ. Πεποιήσθω γὰρ ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν βγ, ὕτως ἄλλη τις ἡ ζε πρὸς τὴν εγ. Ἀνάλογον ἄρα ἐσὶ κατὰ διαίρεσιν, ὡς ἡ αγ πρὸς τὴν γβ, ὕτως ἡ ζγ πρὸς τὴν γε. Καὶ ὅλη ἄρα ἡ αζ πρὸς ὅλην τὴν βε ἐσὶν, ὡς ἡ αγ πρὸς τὴν βγ. Ἐναλλαξ ἄρα ἐσὶν ὡς ἡ ζα πρὸς τὴν αγ, ὕτως ἡ εβ πρὸς τὴν βγ. ὡς δὲ ἡ εβ πρὸς τὴν βγ, ὕτως ἐσὶν ἡ δε πρὸς τὴν εγ, ἐκ τῦ εἶναι μέσην ἀνάλογον. Καὶ ὡς ἄρα ἡ ζα πρὸς τὴν αγ, ὕτως ἡ εδ πρὸς

1) ἀπὸ τῶν αε εγ.
2) τῶν ἀπὸ αδ δα τετραγώνων, τυτέσι τῶν ἀπὸ γδ εα τετραγώνων.
1) βδ.

ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν βδ, αδ. Τὸ δὲ ἀπὸ αγ τοῖς ἀπὸ τῶν αδ, δγ. Ὧ ἄρα ὑπερέχει τὸ ἀπὸ αβ τῷ ἀπὸ αγ, τούτῳ ὑπερέχει τὰ l) ἀπὸ αδ, δβ τῶν ἀπὸ αδ. δγ. καὶ ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ αδ. λοιπὸν ἄρα, ᾧ ὑπερέχει τὸ ἀπὸ βδ τῷ ἀπὸ δγ. m) τούτῳ ὑπερέχει τὸ ἀπὸ αβ τῷ ἀπὸ αγ. Τῶν δὲ ἀπὸ βδ, δγ τὸ δὶς ὑπὸ βγ, εδ. ὥστε καὶ τῶν ἀπὸ αβ, αγ. Ὅτι καὶ ἡ τῶν ἀπὸ βδ, δγ ὑπεροχή ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν βγ, δε ἔτως. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστιν ἡ βε τῇ εγ, ἡ βδ ἄρα ἴση ἐστὶ συναμφοτέρῳ τῇ γεδ. καὶ τὸ ἀπὸ βδ n) ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς γεδ. Ἀλλὰ τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς γεδ τῷ ἀπὸ γδ ὑπερέχει τῷ τετράκις ὑπὸ γεδ, τουτέστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν βγ, δε. Ἡ ἄρα τῶν ἀπὸ βδ, δγ ὑπεροχή ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν βγ, δε.

Εἰς τὸν αὐτὸν, ἐὰν μὴ ὁ λόγος ἴσος πρὸς ἴσον.

Fig. 3.

γ) Τρίγωνον τὸ αβγ, καὶ τὸ ἀπὸ βα τῷ ἀπὸ αγ δοθέντος μεῖζον ἔσω ἡ ἐν λόγῳ δοθὲν μὲν τὸ ε, λόγῳ δὲ τῷ τῆς βδ πρὸς τὴν δγ. ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ ὑπὸ δβγ o) τῷ ε χωρίῳ. Ἀφῃρήσθω γὰρ τὸ δοθὲν χωρίον τὸ ὑπὸ αβη. λοιπῷ p) ἄρα τῷ ὑπὸ βαη πρὸς τὸ ὑπὸ αγ λόγος ἐστὶ δοθεὶς ὁ αὐτὸς τῷ τῆς βδ πρὸς τὴν δγ. q) Κείσθω τῷ ὑπὸ βαη ἴσον τὸ ὑπὸ ζαγ. λοιπὸν ἄρα τῷ ὑπὸ ζαγ πρὸς τὸ ἀπὸ αγ, τουτέστι τῆς ζα πρὸς τὴν αγ, ὁ αὐτὸς τῷ τῆς βδ πρὸς τὴν δγ. Παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ αδ τῇ ζβ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ζ γωνία τῇ ἀπὸ γαδ γωνίᾳ. ἀλλὰ ἡ ζ ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αηγ γωνίᾳ. καὶ ἡ ὑπὸ αηγ ἄρα γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γαδ γωνίᾳ. Μεῖζων ἐστὶν ἡ ἀπὸ αδθ τῆς ὑπὸ γαδ. καὶ τῆς ὑπὸ γηα ἄρα μεῖζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ

l) Mſ. τὸ. m) Mſ. βγ. n) εδ.
o) βδγ. p) λοιπὸν. q) αγ.

ὑπὸ αδθ γωνία. ὥσε μεῖζόν ἐσι τὸ ὑπὸ δβγ τῦ ὑπὸ αβη, τυτέσι τῦ ε τῦ δοθέντος χωρίυ.

Εἰς τὸν τρίτον τόπον.

Fig. 4.

δ) Τριγωνον τὸ αβγ, καὶ διαχθῆ τις ἡ αδ δίχα τέμνυσα τὴν βγ. ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν βα αγ τετράγωνα διπλάσιά ἐσι τῶν ἀπὸ τῶν αδ δγ τετραγώνων. Ἤχθω κάθετος ἡ αε. Τὰ δὲ ἀπὸ τῶν βε [r]) εγ τετράγωνα διπλάσιά ἐσι τῶν ἀπὸ τῶν βδ εδ τετραγώνων. Ἐσὶ δὲ καὶ τὸ δις ὑπὸ αε μετὰ τῦ δις ἀπὸ δε διπλάσιον τῦ ἀπὸ αδ. τὰ δὲ ἀπὸ τῶν βε εγ μετὰ τῦ δις ἀπὸ αε ἴσα ἐσὶ τοῖς ἀπὸ τῶν βα αγ. Τὰ ἄρα ἀπὸ βα αγ διπλάσιά ἐσι τῶν ἀπὸ [s]) βδ αδ τετραγώνων, τυτέσι τῶν ἀπὸ γδ αδ τετραγώνων.

Fig. 5.

ε) Λόγυ ὄντος τῦ τῆς αβ πρὸς τὴν βγ [t]) καὶ χωρίυ τῦ ὑπὸ τῶν γα αδ. ἐὰν τῶν δβ βγ μέση ἀνάλογον ληφθῆ ἡ βε, δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ αε τῦ ἀπὸ εγ μεῖζόν ἐσι τῦ ὑπὸ γα αδ, ἢ ἐν λόγῳ τῦ τῆς αβ πρὸς τὴν βγ. Πεποιήσθω γὰρ ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν βγ, ὕτως ἄλλη τις ἡ ζε πρὸς τὴν εγ. Ἀνάλογον ἄρα ἐσὶ κατὰ διαίρεσιν, ὡς ἡ αγ πρὸς τὴν γβ, ὕτως ἡ ζγ πρὸς τὴν γε. Καὶ ὅλη ἄρα ἡ αζ πρὸς ὅλην τὴν βε ἐσὶν, ὡς ἡ αγ πρὸς τὴν βγ. Ἐναλλαξ ἄρα ἐσὶν ὡς ἡ ζα πρὸς τὴν αγ, ὕτως ἡ εβ πρὸς τὴν βγ. ὡς δὲ ἡ εβ πρὸς τὴν βγ, ὕτως ἐσὶν ἡ δε πρὸς τὴν εγ, ἐκ τῦ εἶναι μέσην ἀνάλογον. Καὶ ὡς ἄρα ἡ ζα πρὸς τὴν αγ, ὕτως ἡ εδ πρὸς

r) ἀπὸ τῶν αε εγ.
s) τῶν ἀπὸ αδ δα τετραγώνων, τυτέσι τῶν ἀπὸ γδ εα τετραγώνων.
t) βδ.

πρὸς τὴν γε. Χωρίον χωρίῳ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αζ εγ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ αγ δε. Τὸ δὲ [u]) ὑπὸ αζ γε τῷ ὑπὸ αεγ ὑπερέχει τῷ ὑπὸ ζεγ. Ω δὲ ὑπερέχει τὸ ὑπὸ αγ δε τῷ ὑπὸ αεγ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ ὑπὸ αε τῷ ὑπὸ δαγ. [v]) Τὸ ἄρα ἀπὸ αε τετράγωνον τῷ ὑπὸ γαδ μεῖζόν ἐστι τῷ ὑπὸ ζεγ [x]) λόγον ἔχοντι πρὸς τὸ ἀπὸ εγ τὸν αὐτόν τῷ τῆς αβ πρὸς τὴν βγ. ὥστε τὸ ἀπὸ αε τῷ ἀπὸ εγ μεῖζόν ἐστι τῷ ὑπὸ γαδ, ἢ ἐν λόγῳ τῷ τῆς αβ πρὸς τὴν βγ.

Fig. 6.

ξ) Λόγος τῆς αβ πρὸς τὴν βγ, χωρίον τὸ ὑπὸ γαδ, ἐὰν τῶν δβ βγ [y]) μέση ἀνάλογον ληφθῇ ἡ βε, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς αε τῷ ἀπὸ τῆς εγ μεῖζόν ἐστι τῷ ὑπὸ γαδ [z]) ἢ ἐν λόγῳ τῷ τῆς αβ πρὸς τὴν βγ. Πεποιήσθω γὰρ ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν βγ, οὕτως ἄλλη τις [a]) ἡ ζε πρὸς τὴν εγ. Διελόντι ἄρα καὶ λοιπὴ πρὸς λοιπήν ἐστιν ὡς ἡ ζα [b]) πρὸς τὴν βε οὕτως ἡ αγ πρὸς τὴν βγ. ἐναλλάξ ἐστιν ὡς ἡ ζα πρὸς τὴν αγ, οὕτως ἡ εβ πρὸς τὴν βγ. Ὡς δὲ ἡ εβ πρὸς τὴν βγ, οὕτως καὶ ἡ εδ πρὸς τὴν εγ. καὶ ὡς ἄρα ἡ ζα πρὸς τὴν αγ, οὕτως ἡ εδ [c]) πρὸς τὴν γε. Χωρίον χωρίῳ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ζα γε ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ αγ δε. [d]) Κοινὸν προσκείσθω

Fig. 7.

ζ) Εὐθεῖα ἡ αβ, καὶ δύο σημεῖα τὰ γ, δ. ὅτι τὸ ἀπὸ αδ καὶ τὸ λόγον ἔχον πρὸς τὸ ἀπὸ δβ τὸν αὐτὸν τῷ τῆς αγ πρὸς τὴν βγ [h]) συντεθήσεται, γίνεται τό τε ἀπὸ αγ, καὶ τὸ λόγον ἔχον πρὸς τὸ ἀπὸ γβ τὸν αὐτὸν τῷ τῆς αγ πρὸς τὴν γβ, καὶ ἔτι τὸ λόγον ἔχον πρὸς τὸ ἀπὸ γδ τὸν αὐτὸν τῷ τῆς αβ πρὸς τὴν βγ. Τῷ [i]) γὰρ τῆς αγ πρὸς τὴν γβ λόγῳ ὁ αὐτὸς γεγονέτω ὁ τῆς ζδ πρὸς τὴν δβ. καὶ συντεθήσεται ἄρα, καὶ τὰ λοιπά· ἡ αζ πρὸς λοιπὴν τὴν γδ, τουτέστι τὸ ὑπὸ αζ γδ πρὸς τὸ ὑπὸ γδ ἐστὶν ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν βγ. Ὥστε τὸ μὲν λόγον ἔχον πρὸς τὸ ἀπὸ δβ τὸν αὐτὸν τῷ τῆς αγ πρὸς τὴν βγ ἐστὶ τὸ ὑπὸ ζδβ. Τὸ δὲ λόγον ἔχον πρὸς τὸ ἀπὸ γβ ἐστὶ τὸ ὑπὸ αγβ. Τὸ δὲ λόγον ἔχον πρὸς τὸ ἀπὸ γδ τὸν αὐτὸν τῷ τῆς αὐτῆς αβ πρὸς τὴν βγ ἐστὶ τὸ ὑπὸ αζ δγ. Ὅτι ἄν τὸ ἀπὸ αδ μετὰ τοῦ ὑπὸ ζδβ [k]) ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ βαγ, καὶ τῷ ὑπὸ αζ γδ. Καὶ κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ὑπὸ δαγ. Ὅτι λοιπὸν τὸ ὑπὸ αδγ μετὰ τοῦ ὑπὸ ζδβ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ αγ δβ, καὶ τῷ ὑπὸ αζ γδ. Κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ὑπὸ αζ γδ. Ὅτι ἄρα τὸ ὑπὸ ζδγ [l]) μετὰ τοῦ ὑπὸ ζδβ [m]) (γίνεται ὅλον τὸ ὑπὸ ζδ γβ) ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ αγ δβ. Ἔστι δὲ. ἀνάλογον γὰρ αἱ αγ, γβ, ζδ, δβ [n]) εἰσὶν εὐθεῖαι.

Fig. 8.

η) Θέσει καὶ μεγέθει [o]) εὐθεῖα ἡ αβ, καὶ τυχὸν τὸ γ· ὅτι ἐστὶ δοθὲν ἐπὶ τῆς αβ, ὥστε τὸ ἀπὸ αγ καὶ τὸ λόγον ἔχον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γβ δοθέντα [p]) ἴσον

h) πρὸς τὴν γδ.
i) τῷ γὰρ τῆς αγ πρὸς τὴν γβ λόγον ἔχων ὁ αὐτός.
k) δγζ. l) ζαγ. m) ζδ βα.
n) αβ. o) θέσει εὐθεῖα ἡ αβ. p) δοθέν.

ἴσον ἐστὶ δοθέντι q) καὶ τῷ λόγον ἔχοντι πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν δοθέντος καὶ τοῦ γ r) δοθέντος. Πεποιήσθω γὰρ ὡς ὁ δοθεὶς λόγος, ἕτως ἡ αδ πρὸς τὴν δβ. λόγος ἄρα καὶ τῆς αδ πρὸς τὴν δβ δοθείς. ὥστε δοθὲν ἐστι τὸ δ σημεῖον. Ἐπεὶ δὲ εὐθεῖά ἐστιν ἡ αβ, καὶ δύο σημεῖα τὰ δ, γ· τὸ ἄρα ἀπὸ αγ καὶ τὸ λόγον ἔχον πρὸς τὸ ἀπὸ γβ τὸν αὐτὸν τῷ τῆς αδ πρὸς τὴν δβ, ἴσον ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ αδ, καὶ τῷ λόγον ἔχοντι πρὸς τὸ ἀπὸ δβ s) τὸν αὐτὸν τῷ τῆς αδ πρὸς τὴν δβ, καὶ t) ἔτι τῷ λόγον ἔχοντι πρὸς τὸ ἀπὸ γδ τὸν αὐτὸν τῷ τῆς αβ πρὸς τὴν βδ. Τὸ δὲ λόγον ἔχον πρὸς τὸ ἀπὸ δβ τὸν αὐτὸν τῷ τῆς αδ πρὸς τὴν δβ τὸ ὑπὸ αδβ. Τὸ ἄρα ἀπὸ αγ, καὶ τὸ λόγον ἔχον πρὸς τὸ ἀπὸ γβ τὸν αὐτὸν τῷ τῆς αδ πρὸς τὴν δβ, τετέσι u) δοθέντα, ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ βαβ, τετέσι δοθέντι, καὶ τῷ λόγον ἔχοντι πρὸς τὸ ἀπὸ γδ v) τὸν αὐτὸν τῷ τῆς αβ πρὸς τὴν βδ, τετέσι δοθέντα. x) Ὁμοίως καὶ ἐὰν τὸ δοθὲν τὸ γ ἐκτὸς ᾖ τῆς αβ εὐθείας, τῇ αὐτῇ ἀκολουθίᾳ δείξομεν.

q) δοθὲν. r) καὶ τοῦ ὑπὸ γδ δοθέντος. s) αβ.
t) καὶ ἐν τῷ λόγον ἔχοντι πρὸς τὸ ἀπὸ αβ τὸν αὐτὸν τῷ τῆς αβ πρὸς τὴν βδ, καὶ τῷ λόγον ἔχοντι πρὸς τὸ ἀπὸ αγ τὸν αὐτὸν τῷ τῆς αβ πρὸς τὴν βδ, τὸ ὑπὸ αδβ. τὸ ἄρα ἀπὸ αγ

[redacted]

Ebene Oerter. 2 Bücher.

Von den Oertern überhaupt ſind einige ἑφεκτικοὶ (gleichſam an einer einzigen Stelle anhängende), in dieſem Sinn ſagt Apollonius vor ſeinen Elementen, der Ort eines Punkts ſeye ein Punkt, der Ort einer Linie eine Linie, einer Oberfläche eine Oberfläche, eines Körpers ein Körper; andere ſind διεξοδικοὶ (fortſchreitende), wenn nemlich der Ort eines Punkts eine Linie, der Ort einer Linie eine Oberfläche, der Ort einer Oberfläche ein Körper iſt; noch andere ſind ἀναστροφικοὶ (doppelt fortbewegte), wenn der Ort eines Punkts eine Oberfläche, der Ort einer Linie ein Körper iſt. Von den Oertern nun, die in den analytiſchen Büchern vorkommen, ſind die von den der Lage nach gegebenen Stüken ἑφεκτικοὶ; diejenige, die man ebene Oerter nennt, und eben ſo die Kegelſchnitte und übrige krumme Linien oder ſogenannte Loci ſolidi und lineares ſind διεξοδικοὶ von Punkten; endlich ſind die Oerter an der Oberfläche (aus denen übrigens auch die loci lineares bewieſen werden) ἀναστροφικοὶ von Punkten, und διεξοδικοὶ von Linien. Man nennt nemlich ebene Oerter *) diejenigen, von

 welchen

*) Um Anfängern diß deſto verſtändlicher zu machen, wird es nicht unnüzlich ſeyn, folgende zwey Beyſpiele von ſehr einfachen ebenen Oertern anzuführen: denn die Oerter an den Kegelſchnitten, und die übrigen gehören nicht zu dem gegenwärtigen Zwek. Es ſey alſo (Fig. 9.) eine Linie

A B

welchen hier die Rede iſt, und dieſe ſind überhaupt gerade Linien, oder Kreis-Linien. Loci ſolidi heiſſen alle

AB der Lage nach, und auf derſelben ein Punkt A gegeben; wenn nun innerhalb des rechten Winkels HAB, oder ſeines Scheitel-Winkels KAL irgend eine gerade Linie CD ſenkrecht auf AB gezogen, und dadurch ein Stük CA abgeſchnitten wird, deſſen einer Endpunkt A iſt; ſo iſt offenbahr, daß auf der geraden Linie CD ein Punkt E genommen werden kann, ſo, daß EC zu CA jedes gegebene Verhältniß habe, z. B. daß EC doppelt ſo groß ſeye als CA. Es können aber unzählich viele gerade Linien ſenkrecht auf AB gezogen werden, und auf jeder derſelben wird ein Punkt ſeyn, der eben das leiſtet, was der Punkt E, d. i. deſſen Entfernung von AB doppelt ſo groß iſt, als das Stük, das dieſe ſenkrecht auf AB gezogene gerade Linie zwiſchen ſich und dem Punkt A abſchneidet. Man ſieht auch, daß, wenn man die Linie AE zieht, und nach beyden Seiten hin verlängert, jeder auf ihr gelegene Punkt, z. B. der Punkt F eben das leiſte, was der Punkt E, d. i. daß, wenn man FG ſenkrecht auf AB zieht, FG doppelt ſo groß ſeye, als GA, weil ſich FG zu GA verhält, wie EC zu CA, und daß kein Punkt, der nicht auf der geraden Linie AE liegt, innerhalb der benannten Winkel daſſelbe leiſten könne. Weil alſo alle dieſe Punkte auf der geraden Linie AE liegen, ſo heißt dieſe ganz eigentlich der Ort dieſer Punkte. Eben ſo, wenn auf die der Lage und Größe nach gegebene Linie AB die Linie CE ſenkrecht gezogen wird; ſo ſieht man leicht, daß auf dieſer ein Punkt D gefunden werden könne, ſo daß das Quadrat über DC gleich ſey dem Rechtek ACB, das zwiſchen den Stüken von AB enthalten iſt; und auf ähnliche Art wird man auf jeder auf AB ſenkrecht gezogenen Linie einen Punkt finden können, der das nemliche leiſtet. Beſchreibt man nun über AB als Durchmeſſer einen Kreis; ſo erhellet aus der Natur des Kreiſes, daß jeder auf dem Umfang dieſes Kreiſes liegende Punkt, z. B. F, und keiner innerhalb oder auſſerhalb des Kreiſes das nemliche leiſte, was der Punkt D. Mithin heißt dieſer Umfang mit Recht der Ort aller dieſer Punkte. Wäre verlangt, einen Punkt zu finden, der dieſe beyden Eigenſchaften habe, d. i. ſo beſchaffen ſey, daß ein von ihm auf AB gefälltes

Per-

alle Kegelschnitte, nemlich die Parabeln, oder Ellipsen, oder Hyperbeln; loci lineares endlich alle Linien, die weder gerade, noch Kreis-Linien, noch Kegelschnitte sind. Diejenigen Oerter, die von Eratosthenes loci ad Medietates genannt werden, gehören ihrer Klasse nach auch unter die vorhin angeführten, und sind nur durch die eigenen dabey vorkommenden Bedingungen davon unterschieden.

Die Alten nun trugen ihre Lehren von diesen ebenen Oertern in Rüksicht auf eine gewisse Ordnung vor, welche aber die spätern Geometer vernachlässigten, und noch andere Oerter beyfügten, ohne zu bedenken, daß es eine unzählige Menge Oerter gebe, wenn man auch solche darzu nehmen will, die nicht in dieser Ordnung enthalten sind. Ich will also die später angehängten zulezt anführen, und diejenigen, welche einer gewissen Ordnung folgen, voranschiken, und sie in folgenden einzigen Saz zusammenfassen.

Wenn aus einem, oder aus zwey gegebenen Punkten zwey gerade Linien gezogen werden, welche entweder Stüke einer und ebenderselben geraden Linie sind, oder einander gleichlaufen, oder einen gegebenen Winkel einschliessen, und wenn überdiß diese zwey Linien entweder ein gegebenes Verhältniß unter einander haben, oder ein

Perpendikel doppelt so groß sey, als das zwischen diesem Perpendikel und dem Punkt A abgeschnittene Stük, und daß das Quadrat dieses Perpendikels gleich sey dem Rchtk, das zwischen den Stüken enthalten ist, die zwischen diesem Perpendikel und den Punkten A und B liegen; so sieht man leicht, daß dieser Punkt wegen der ersten Bedingung nothwendig auf der geraden Linie AE, und wegen der zweyten nothwendig auf dem über dem Durchmesser AB beschriebenen Kreis liegen müsse, daß er also in ihrem Durchschnitts-Punkt F gefunden werde. Und aus diesem Beyspiel erhellet, wie die Lehre von den Oertern zu der Auflösung der Aufgaben diene.

welchen hier die Rede ist, und diese sind überhaup
rade Linien, oder Kreis - Linien. Loci solidi h

AB der Lage nach, und auf derselben ein Punkt A
ben; wenn nun innerhalb des rechten Winkels HAB,
seines Scheitel - Winkels KAL irgend eine gerade Lini
senkrecht auf AB gezogen, und dadurch ein Stük C
geschnitten wird, dessen einer Endpunkt A ist; so ist
bahr, daß auf der geraden Linie CD ein Punkt E ge
men werden kann, so, daß EC zu CA jedes gegebene
hältniß habe, z. B. daß EC doppelt so groß seye als
Es können aber unzählich viele gerade Linien senkrech
AB gezogen werden, und auf jeder derselben wird ein P
seyn, der eben das leistet, was der Punkt E, d. i. d
Entfernung von AB doppelt so groß ist, als das Stük,
diese senkrecht auf AB gezogene gerade Linie zwischen
und dem Punkt A abschneidet. Man sieht auch,
wenn man die Linie AE zieht, und nach beyden S
hin verlängert, jeder auf ihr gelegene Punkt, z. B
Punkt F eben das leiste, was der Punkt E, d. i.
wenn man FG senkrecht auf AB zieht, FG doppelt so
seye, als GA, weil sich FG zu GA verhält, wie EC zu
und daß kein Punkt, der nicht auf der geraden Linie
liegt, innerhalb der benannten Winkel dasselbe leisten
ne. Weil also alle diese Punkte auf der geraden Linie
liegen, so heißt diese ganz eigentlich der Ort dieser Pu
Eben so, wenn auf die der Lage und Größe nach gege
Linie AB die Linie CE senkrecht gezogen wird; so sieht
leicht, daß auf dieser ein Punkt D gefunden werden kö
so daß das Quadrat über DC gleich sey dem Rechtek A
das zwischen den Stüken von AB enthalten ist; und
ähnliche Art wird man auf jeder auf AB senkrecht gez
nen Linie einen Punkt finden können, der das nemliche
stet. Beschreibt man nun über AB als Durchmesser e
Kreis; so erhellet aus der Natur des Kreises, daß jeder
dem Umfang dieses Kreises liegende Punkt, z. B. F,
keiner innerhalb oder ausserhalb des Kreises das nem
leiste, was der Punkt D. Mithin heißt dieser Umf
mit Recht der Ort aller dieser Punkte. Wäre verlangt,
neu Punkt zu finden, der diese beyden Eigenschaften h
d. i. so beschaffen sey, daß ein von ihm auf AB gefä

alle Kegelschnitte, nemlich die Parabeln, oder Ellipsen, oder Hyperbeln; loci lineares endlich alle Linien, die weder gerade, noch Kreis-Linien, noch Kegelschnitte sind. Diejenigen Oerter, die von Eratosthenes loci ad Medietates genannt werden, gehören ihrer Klasse nach auch unter die vorhin angeführten, und sind nur durch die eigenen dabey vorkommenden Bedingungen davon unterschieden.

Die Alten nun trugen ihre Lehren von diesen ebenen Oertern in Rükſicht auf eine gewisse Ordnung vor, welche aber die spätern Geometer vernachlässigten, und noch andere Oerter beyfügten, ohne zu bedenken, daß es eine unzählige Menge Oerter gebe, wenn man auch solche darzu nehmen will, die nicht in dieser Ordnung enthalten sind. Ich will also die später angehängten zulezt anführen, und diejenigen, welche einer gewissen Ordnung folgen, voranschiken, und sie in folgenden einzigen Saz zusammenfassen.

Wenn aus einem, oder aus zwey gegebenen Punkten zwey gerade Linien gezogen werden, welche entweder Stüke einer und ebenderselben geraden Linie sind, oder einander gleichlaufen, oder einen gegebenen Winkel einschlieſſen, und wenn überdiß diese zwey Linien entweder ein gegebenes Verhältniß unter einander haben, oder ein

Perpendikel doppelt so groß sey, als das zwischen diesem Perpendikel und dem Punkt A abgeschnittene Stük, und daß das Quadrat dieses Perpendikels gleich sey dem Rchtk, das zwischen den Stüken enthalten ist, die zwischen diesem Perpendikel und den Punkten A und B liegen; so sieht man leicht, daß dieser Punkt wegen der ersten Bedingung nothwendig auf der geraden Linie AE, und wegen der zweyten nothwendig auf dem über dem Durchmesser AB beschriebenen Kreis liegen müsse, daß er also in ihrem Durchschnitts-Punkt F gefunden werde. Und aus diesem Beyspiel erhellet, wie die Lehre von den Oertern zu der Auflösung der Aufgaben diene.

gegebenes Rechtek einſchlieſſen; und wenn endlich der Endpunkt der einen dieſer Linien einen der Lage nach gegebenen ebenen Ort berührt: ſo wird auch der Endpunkt der andern einen der Lage nach gegebenen ebenen Ort berühren; und zwar manchmahl einen Ort von der nemlichen, manchmahl einen von verſchiedener Gattung; manchmahl einen Ort, deſſen Lage in Bezug auf die gerade Linie mit dem erſten Ort ähnlich — manchmahl einen, deſſen Lage in Bezug auf dieſe Linie mit dem erſten Ort nicht ähnlich iſt. Diß hängt nemlich von den verſchiedenen Bedingungen ab.

Hieher gehören noch folgende drey von Charmander (den Oertern des Apollonius) vorangeſchikte Säze:

Wenn der eine Endpunkt einer der Größe nach gegebenen geraden Linie gegeben iſt; ſo berührt der andere Endpunkt die hole Seite eines der Lage nach gegebenen Umkreiſes.

Wenn aus zwey gegebenen Punkten zwey gerade Linien, die einen gegebenen Winkel einſchlieſſen, gezogen werden; ſo berührt ihr Durchſchnitts-Punkt die hole Seite eines der Lage nach gegebenen Kreiſes.

Wenn die Grundlinie eines der Größe nach gegebenen Dreyecks der Lage und Größe nach gegeben iſt; ſo berührt der Scheitelpunkt des Dreyecks eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Die übrigen Säze ſind folgende:

Wenn der eine Endpunkt einer der Größe nach gegebenen geraden Linie, die mit einer der Lage nach gegebenen gleichlauft, eine der Lage nach gegebene gerade Linie berührt; ſo berührt auch der andere Endpunkt eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Wenn aus einem Punkt an zwey der Lage nach gegebene gerade Linien, die entweder gleichlaufen, oder zuſammenſtoſſen, unter gegebenen Winkeln zwey gerade

Linien

Linien gezogen werden, welche entweder ein gegebenes Verhältniß unter einander haben, oder bey welchen die Summe der einen, und einer dritten Linie, zu welcher die andere ein gegebenes Verhältniß hat, gegeben ist: so berührt der Punkt eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Und wenn eine beliebige Anzahl gerader Linien der Lage nach gegeben ist, und an jede derselben gerade Linien aus einem Punkt gezogen werden, und (z. B. in dem Fall von 3 geraden Linien) die Summe des Rechteks, das zwischen einer gegebenen Linie, und einer der gezogenen Linien enthalten ist, und eines andern Rechteks, das zwischen einer gegebenen Linie, und einer andern der gezogenen Linien enthalten ist, gleich ist dem Rechtek, das zwischen einer gegebenen Linie, und der dritten der gezogenen Linien enthalten ist; und so weiter fort bey den übrigen Fällen; so berührt der Punkt eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Wenn aus einem Punkt an zwey der Lage nach gegebene Parallel-Linien unter gegebenen Winkeln zwey gerade Linien gezogen werden, welche entweder auf den Parallel-Linien zwischen sich und gegebenen Punkten Stüke abschneiden, die ein gegebenes Verhältniß unter einander haben; oder einen gegebenen Raum einschlieſſen; oder so beschaffen sind, daß die Summe, oder der Unterschied von geraden, der Gattung nach gegebenen, über ihnen beschriebenen Figuren gegeben ist: so berührt der Punkt eine der Lage nach gegebene gerade Linie. *)

*) Dieser Paragraph ist in dem griechischen Text fehlerhaft; deßwegen verwarf Fermat seine 3 lezten Bedingungen als unrichtig, und unterschoben; er hätte aber nur die zweyte verwerfen sollen. Mit geringer (oben angegebener) Veränderung wird aber alles richtig. Schooten hat hierinn den Sinn des Pappus ganz gut erklärt.

Das zweyte Buch enthält folgendes:

Wenn aus zwey gegebenen Punkten zwey gerade Linien an einen dritten Punkt hin gezogen werden, und der Unterschied der über ihnen beschriebenen Quadrate gleich ist einem gegebenen Raum: so berührt ihr Durchschnitts-Punkt eine der Lage nach gegebene gerade Linie. Haben aber die gezogenen Linien ein gegebenes Verhältniß unter einander; so berührt ihr Durchschnitts-Punkt entweder eine der Lage nach gegebene gerade Linie, oder einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Wenn eine gerade Linie der Lage nach, und auf derselben ein Punkt gegeben ist, aus dem eine endliche gerade Linie gezogen wird; wenn dann aus dem Endpunkt dieser gezogenen Linie ein Perpendikel auf die der Lage nach gegebene gerade Linie gefällt wird, und das Quadrat der (zuerst) gezogenen Linie gleich ist dem Rechteck, das enthalten ist zwischen einer gegebenen geraden Linie, und dem Stük der der Lage nach gegebenen geraden Linie, welches zwischen dem Perpendikel und dem gegebenen Punkt, oder zwischen dem Perpendikel und einem andern gegebenen Punkt abgeschnitten ist: so berührt der Endpunkt der gezogenen Linie einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Wenn aus zwey gegebenen Punkten gerade Linien an einen dritten Punkt hin gezogen werden, und der Ueberschuß des Quadrats der einen über einen gegebenen Raum zu dem Quadrat der andern ein gegebenes Verhältniß hat: so berührt ihr Durchschnitts-Punkt einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Wenn aus einer beliebigen Anzahl gegebener Punkte an Einen Punkt hin gerade Linien gezogen werden, und die Summe der über diesen Linien beschriebenen, der Gattung nach gegebenen Figuren gleich ist einem gegebenen Raum: so berührt der gemeinschaftliche

Durch-

Durchschnitts-Punkt einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Wenn aus zwey gegebenen Punkten gerade Linien an einen Punkt hingezogen werden, und aus diesem Durchschnitts-Punkt eine gerade Linie mit einer der Lage nach gegebenen gleichlaufend gezogen wird, und diese auf einer der Lage nach gegebenen Linie zwischen sich und einem gegebenen Punkt ein Stük abschneidet, und wenn die Summe von Figuren, die der Gattung nach gegeben, und über den an einen Punkt hin gezogenen Linien beschrieben sind, gleich ist dem Rechtek, das zwischen einer gegebenen Linie, und dem abgeschnittenen Stük enthalten ist: so berührt der Durchschnitts-Punkt (jener zwey aus den gegebenen Punkten gezogenen Linien) einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Wenn innerhalb eines der Lage nach gegebenen Kreises ein Punkt gegeben ist, und man durch diesen Punkt irgend eine gerade Linie zieht, und auf derselben einen Punkt ausserhalb des Kreises nimmt, und wenn entweder das Quadrat des zwischen diesen Punkten abgeschnittenen Stüks allein, oder die Summe dieses Quadrats, und des zwischen den beyden innern Stüken enthaltenen Rechteks gleich ist dem Rechtek, das enthalten ist zwischen der ganzen Linie, und zwischen dem äussern durch den Kreis abgeschnittenen Stük: so berührt der ausserhalb des Kreises genommene Punkt eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Und *) wenn dieser Punkt eine der Lage nach gegebene gerade Linie berührt, der Kreis aber nicht als

*) Dieser lezte Saz ist sicher verstümmelt, denn aus den in demselben gegebenen Stüken wird man nicht beweisen können, daß die Punkte einen der Lage nach gegebenen Umkreis berühren. Ihn wiederherzustellen, muß noch hinzugesezt werden: und wenn das Rechtek gegeben ist, das ent-

hinweg; so ist folglich der Ueberschuß des Quadrats von βδ über das Quadrat von δγ gleich dem Ueberschuß des Quadrats von αβ über das Quadrat von αγ. Es ist aber der Ueberschuß des Quadrats von βδ über das Quadrat von δγ gleich dem doppelten Rchtk zwischen βγ und εδ; folglich auch der Ueberschuß des Quadrats von αβ über das Quadrat von αγ. Daß aber wirklich der Ueberschuß des Quadrats von βδ über das von δγ gleich seye dem doppelten Rchtk zwischen βγ und εδ, läßt sich leicht so zeigen. Weil βε gleich ist εγ; so ist βδ gleich der Summe von γε und εδ, mithin das Quadrat von βδ gleich dem Quadrat, das über γε und εδ als einer Linie beschrieben werden kann. Aber der Ueberschuß dieses über γε und εδ als einer Linie beschriebenen Quadrats über das Quadrat von γδ ist gleich dem vierfachen Rchtk zwischen γε und εδ, das heißt, dem doppelten Rchtk zwischen βγ und δε. Mithin ist der Ueberschuß des Quadrats von βδ über das Quadrat von δγ gleich dem doppelten Rchtk zwischen βγ und δε.

Zu ebendemselben Ort, wenn nicht das Verhältniß der Gleichheit Statt findet.

Fig. 3.

3) Es seye ein Dreyek αβγ, und der Ueberschuß des Quadrats von αβ über einen gegebenen Raum habe zu dem Quadrat von αγ ein gegebenes Verhältniß (dieser gegebene Raum seye ε, das gegebene Verhältniß aber das Verhältniß von βδ zu δγ): zu zeigen, daß das Rchtk δβγ grösser sey, als der gegebene Raum ε. Man mache das Rchtk αβη gleich dem gegebenen Raum, und nehme es von dem Quadrat von αβ hinweg; so ist der Rest, nemlich das Rchtk βαη zu dem Quadrat von αγ in dem gegebenen Verhältniß von βδ zu δγ. Man mache ζα×αγ gleich βα×αη; so bleibt folglich das Verhält-

hältniß des Rchtks ζαγ zu dem Quadrat von αγ, d. h. der Linie ζα zu der Linie αγ das nemliche mit dem Verhältniß der Linie βδ zu δγ. Folglich ist αδ mit ζβ gleichlaufend. Mithin der Winkel ζ gleich dem Winkel γαδ. Aber der Winkel ζ ist gleich dem Winkel αηγ. Folglich der Winkel αηγ gleich dem Winkel γαδ. Nun ist der Winkel αδϑ grösser als der Winkel γαδ, mithin auch grösser als der Winkel αηγ. Mithin ist das Rchtk δβγ grösser als das Rchtk αβη; d. h. grösser, als der gegebene Raum ε.

Zum dritten Ort.

Fig. 4.

4) Es seye ein Dreyek αβγ, und es sey eine gerade Linie αδ gezogen, welche die Grundlinie βγ in zwey gleiche Theile theilt; zu zeigen, daß die Summe der Quadrate über βα und αγ gleich sey der doppelten Summe der Quadrate über αδ und δγ. Man fälle das Perpendikel αε. Nun ist die Summe der Quadrate über βε und εγ gleich der doppelten Summe der Quadrate über βδ und εδ. Es ist ferner das doppelte des Quadrats von αε nebst dem doppelten des Quadrats von εδ gleich dem doppelten des Quadrats von αδ. Und die Summe der Quadrate über βε und εγ, und des doppelten Quadrats über αε ist gleich der Summe der Quadrate über αβ und αγ. Folglich ist die Summe der Quadrate über αβ, und αγ gleich der doppelten Summe der Quadrate über βδ und αδ, d. h. der Quadrate über γδ und αδ.

Fig. 5.

5) Wenn αβ zu βγ irgend ein Verhältniß, und das Rchtk γαδ irgend einen Raum vorstellt, und man nimmt zwischen δβ und βγ die mittlere Proportionallinie βε; zu zeigen, daß der Ueberschuß des Quadrats

von

von αε über das Rchtk γα×αδ zu dem Quadrat von εγ das Verhältniß von αβ zu βγ habe. Denn, man nehme, wie αβ zu βγ, so eine andere Linie ζε zu εγ. Folglich iſt getheilt αγ zu γβ, wie ζγ zu εγ. Mithin auch die ganze Linie αζ zu der ganzen Linie βε, wie αγ zu βγ. Mithin verwechſelt ζα zu αγ, wie εβ zu βγ. Aber, wie εβ zu βγ, ſo δε zu εγ, weil nemlich εβ die mittlere Proportional-Linie iſt zwiſchen δβ und βγ. Folglich iſt, wie ζα zu αγ, ſo εδ zu γε. Und, da das Rchtk der äuſſern Glieder gleich iſt dem Rchtk der mittlern, ſo iſt folglich das Rchtk αζ×εγ gleich dem Rchtk αγ×δε. Es iſt aber der Ueberſchuß des Rchtks αζ×εγ über das Rchtk αεγ gleich dem Rchtk ζεγ. Nun iſt der Ueberſchuß des Rchtks αγ×δε über das Rchtk αεγ gleich dem Ueberſchuß des Quadrats von αε über das Rchtk δαγ. Mithin iſt der Ueberſchuß des Quadrats von αε über das Rchtk δαγ gleich dem Rchtk ζεγ, welches leztere zu dem Quadrat von εγ das Verhältniß von αβ zu βγ hat. Folglich iſt der Ueberſchuß des Quadrats von αε über das Rchtk γαδ zu dem Quadrat von εγ in dem Verhältniß von αβ zu βγ.

Fig. 6.

6) Es ſeye αβ zu βγ ein gewiſſes Verhältniß, das Rchtk γαδ ein gewiſſer Raum, und βε die mittlere Proportional-Linie zwiſchen δβ und βγ; zu zeigen, daß der Ueberſchuß des Quadrats von αε über das Rchtk γαδ zu dem Quadrat von εγ das Verhältniß von αβ zu βγ habe. Denn man nehme, wie αβ zu βγ, ſo eine andere Linie ζε zu εγ. Folglich iſt, getheilt, und den Reſt zum Reſt genommen (D. h. 17, 5. und 19, 5. E.) wie ζα zu εβ, ſo αγ zu βγ. Mithin verwechſelt ζα zu αγ, wie εβ zu βγ. Aber, wie εβ zu βγ, ſo εδ zu εγ. Folglich ζα zu αγ, wie εδ zu εγ. Nun iſt das Rchtk der äuſſern Glieder gleich dem Rchtk der mittlern. Mithin

hin das Rechk $\zeta\alpha\times\gamma\varepsilon$ gleich dem Rechk $\alpha\gamma\times\delta\varepsilon$. Man ſeze beederſeits das Rechk $\alpha\varepsilon\gamma$ nebſt dem Rechk $\gamma\alpha\delta$ hinzu; ſo iſt mithin die Summe einerſeits, d. h. das Quadrat von $\alpha\varepsilon$ gleich der Summe andernſeits, d. h. dem Rechk $\zeta\varepsilon\gamma$ nebſt dem Rechk $\gamma\alpha\delta$. Folglich iſt der Ueberſchuß des Quadrats von $\alpha\varepsilon$ über das Rechk $\gamma\alpha\delta$ zu dem Quadrat von $\varepsilon\gamma$ in dem Verhältniß von $\alpha\beta$ zu $\beta\gamma$. Denn diß Verhältniß hat das Rechk $\zeta\varepsilon\gamma$ zu dem Quadrat von $\varepsilon\gamma$.

Fig. 7.

7) Es ſeye eine gerade Linie $\alpha\beta$, und auf derſelben 2 Punkte γ, δ. Man nehme das Quadrat von $\alpha\delta$, und einen Raum, der ſich zu dem Quadrat von $\beta\delta$ verhält, wie $\alpha\gamma$ zu $\beta\gamma$, zuſammen, und man wird erhalten das Quadrat von $\alpha\gamma$, einen Raum, der ſich zum Quadrat von $\gamma\beta$ verhält, wie $\alpha\gamma$ zu $\gamma\beta$, und noch einen andern Raum, der ſich zu dem Quadrat von $\gamma\delta$ verhält, wie $\alpha\beta$ zu $\beta\gamma$. Denn man nehme $\zeta\delta$ zu $\delta\beta$, wie $\alpha\gamma$ zu $\gamma\beta$: ſo iſt folglich, zuſammengeſezt, und den Reſt zum Reſt genommen, (d. h. 18, 5. und 19, 5. E.) $\alpha\zeta$ zu $\gamma\delta$, d. h. das Rechk $\alpha\zeta\times\gamma\delta$ zu dem Quadrat von $\gamma\delta$, wie $\alpha\beta$ zu $\beta\gamma$. Mithin iſt zuvörderſt das Rechk $\zeta\delta\beta$ der Raum, der ſich zu dem Quadrat von $\delta\beta$ verhält, wie $\alpha\gamma$ zu $\gamma\beta$. Ferner iſt das Rechk $\alpha\gamma\beta$ der Raum, der zu dem Quadrat von $\gamma\beta$ das angezeigte Verhältniß hat. Endlich iſt das Rechk $\alpha\zeta\times\delta\gamma$ der Raum, der ſich zu dem Quadrat von $\gamma\delta$ verhält, wie $\alpha\beta$ zu $\beta\gamma$. Es ſoll alſo gezeigt werden, daß die Summe des Quadrats von $\alpha\delta$ und des Rechks $\zeta\delta\beta$ gleich ſey der Summe des Rechks $\beta\alpha\gamma$, und des Rechks $\alpha\zeta\times\gamma\delta$. Man nehme beederſeits das Rechk $\delta\alpha\gamma$ hinweg; ſo iſt zu erweiſen, daß die Summe des Rechks $\alpha\delta\gamma$ und des Rechks $\zeta\delta\beta$ gleich ſey der Summe des Rechks $\alpha\gamma\times\delta\beta$, und des Rechks $\alpha\zeta\times\gamma\delta$. Man nehme noch das Rechk $\alpha\zeta\times\gamma\delta$ hinweg; ſo iſt zu zeigen, daß

die

die Summe des Rchtks ζδγ und ζδβ (d. h. daß das Rchtk ζδ×γβ) gleich sey dem Rchtk αγ×δβ. Diß ist aber so, weil αγ, γβ, ζδ, δβ proportional sind.

Fig. 8.

8) Es sey αβ der Lage und Größe nach, und auf ihr irgend ein Punkt γ gegeben; zu zeigen, daß auf αβ ein Punkt (δ) gegeben ist, so, daß das Quadrat von αγ, und ein Raum, der zu dem Quadrat von γβ ein gegebenes Verhältniß hat, gleich sey der Summe eines gegebenen Raums, und eines Raums, der ein gegebenes Verhältniß hat zu dem Quadrat der Linie, welche zwischen dem gegebenen Punkt (δ) und dem gegebenen Punkt γ abgeschnitten ist. Denn man nehme αδ zu δβ in dem gegebenen Verhältniß; so ist folglich das Verhältniß von αδ zu δβ gegeben, mithin der Punkt δ gegeben. Weil nun αβ eine gerade Linie, und γ, δ 2 Punkte auf ihr sind; so ist die Summe des Quadrats von αγ, und eines Raums, der sich zu dem Quadrat von γβ verhält, wie αδ zu δβ, gleich der Summe des Quadrats von αδ, eines Raums, der sich zum Quadrat von δβ verhält, wie αδ zu δβ, und noch eines Raums, der sich zum Quadrat von γδ verhält, wie αβ zu βδ. Nun ist das Rchtk αδβ der Raum, der sich zu dem Quadrat von δβ verhält, wie αδ zu δβ. Folglich ist die Summe des Quadrats von αγ, und eines Raums, der zu dem Quadrat von γβ das Verhältniß von αδ zu δβ, d. h. ein gegebenes Verhältniß hat, gleich der Summe des Rchtks βαδ d. h. eines gegebenen Raums, und eines Raums, der zu dem Quadrat von γδ das Verhältniß von αβ zu βδ, d. h. ein gegebenes Verhältniß hat. Auf ähnliche Art wird der Saz noch erwiesen, wenn der gegebene Punkt γ ausserhalb der Linie αβ liegt.

Apollonius von Pergen

ebene Oerter.

Erstes Buch.

1. Saz.

Von Charmander.

Wenn der eine Endpunkt einer der Grösse nach gegebenen geraden Linie gegeben ist; so berührt der dere Endpunkt die hole Seite eines der Lage nach genen Kreis-Umfangs.

Fig. 10.

Es sey die Linie AB der Grösse nach, und auf der- den der Punkt A gegeben; so ist ein aus dem Mittel- nkt A mit dem Halbmesser AB beschriebener Kreis der ge und Grösse nach gegeben (7. Def. D.). Und es ellet von selbst, daß der Umfang dieses Kreises der t sey, auf den der Endpunkt von jeder geraden Linie ft, die aus dem Punkt A gezogen wird und gleich ist B: so wie umgekehrt jede gerade Linie, die aus dem nkt A an den Umkreis gezogen wird, gleich ist AB.

2. Saz.

Von Charmander.

Wenn 2 gerade Linien, die einen Winkel von gener Grösse einschliessen, durch 2 gegebene Punkte hen; so liegt der Durchschnitts-Punkt dieser Linien f einem der Lage nach gegebenen Kreis-Umfang.

die Summe des Rchtks $\zeta\delta\gamma$ und $\zeta\delta\beta$ (d. h. daß das Rchtk $\zeta\delta \times \gamma\beta$) gleich sey dem Rchtk $\alpha\gamma \times \delta\beta$. Diß ist aber so, weil $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$, $\zeta\delta$, $\delta\beta$ proportional sind.

Fig. 8.

8) Es sey $\alpha\beta$ der Lage und Größe nach, und auf ihr irgend ein Punkt γ gegeben; zu zeigen, daß auf $\alpha\beta$ ein Punkt (δ) gegeben ist, so, daß das Quadrat von $\alpha\gamma$, und ein Raum, der zu dem Quadrat von $\gamma\beta$ ein gegebenes Verhältniß hat, gleich sey der Summe eines gegebenen Raums, und eines Raums, der ein gegebenes Verhältniß hat zu dem Quadrat der Linie, welche zwischen dem gegebenen Punkt (δ) und dem gegebenen Punkt γ abgeschnitten ist. Denn man nehme $\alpha\delta$ zu $\delta\beta$ in dem gegebenen Verhältniß; so ist folglich das Verhältniß von $\alpha\delta$ zu $\delta\beta$ gegeben, mithin der Punkt δ gegeben. Weil nun $\alpha\beta$ eine gerade Linie, und γ, δ 2 Punkte auf ihr sind; so ist die Summe des Quadrats von $\alpha\gamma$, und eines Raums, der sich zu dem Quadrat von $\gamma\beta$ verhält, wie $\alpha\delta$ zu $\delta\beta$, gleich der Summe des Quadrats von $\alpha\delta$, eines Raums, der sich zum Quadrat von $\delta\beta$ verhält, wie $\alpha\delta$ zu $\delta\beta$, und noch eines Raums, der sich zum Quadrat von $\gamma\delta$ verhält, wie $\alpha\beta$ zu $\beta\delta$. Nun ist das Rchtk $\alpha\delta\beta$ der Raum, der sich zu dem Quadrat von $\delta\beta$ verhält, wie $\alpha\delta$ zu $\delta\beta$. Folglich ist die Summe des Quadrats von $\alpha\gamma$, und eines Raums, der zu dem Quadrat von $\gamma\beta$ das Verhältniß von $\alpha\delta$ zu $\delta\beta$, d. h. ein gegebenes Verhältniß hat, gleich der Summe des Rchtks $\beta\alpha\delta$ d. h. eines gegebenen Raums, und eines Raums, der zu dem Quadrat von $\gamma\delta$ das Verhältniß von $\alpha\beta$ zu $\beta\delta$, d. h. ein gegebenes Verhältniß hat. Auf ähnliche Art wird der Saz noch erwiesen, wenn der gegebene Punkt γ ausserhalb der Linie $\alpha\beta$ liegt.

Apollonius von Pergen

ebene Oerter.

Erstes Buch.

1. Saz.

Von Charmander.

Wenn der eine Endpunkt einer der Grösse nach gegebenen geraden Linie gegeben ist; so berührt der andere Endpunkt die hole Seite eines der Lage nach gegebenen Kreis-Umfangs.

Fig. 10.

Es sey die Linie AB der Grösse nach, und auf derselben der Punkt A gegeben; so ist ein aus dem Mittelpunkt A mit dem Halbmesser AB beschriebener Kreis der Lage und Grösse nach gegeben (7. Def. D.). Und es erhellet von selbst, daß der Umfang dieses Kreises der gesuchte sey, auf den der Endpunkt von jeder geraden Linie trift, die aus dem Punkt A gezogen wird und gleich ist AB: so wie umgekehrt jede gerade Linie, die aus dem Punkt A an den Umkreis gezogen wird, gleich ist AB.

2. Saz.

Von Charmander.

Wenn 2 gerade Linien, die einen Winkel von gegebener Grösse einschliessen, durch 2 gegebene Punkte gehen; so liegt der Durchschnitts-Punkt dieser Linien auf einem der Lage nach gegebenen Kreis-Umfang.

Fig. 11.

Die geraden Linien AC, BC, welche den Winkel ACB einschließen, der einem gegebenen Winkel gleich ist, gehen durch die gegebenen Punkte A, B. Um das Dreyek ABC sey ein Kreis beschrieben, dessen Mittelpunkt D; und man ziehe AD, BD, AB. Weil der Winkel ACB gegeben ist; so ist auch der Winkel ADB gegeben, der als Winkel am Mittelpunkt doppelt so groß ist, als ACB; überdiß ist das Verhältniß von AD zu BD gegeben, weil AD = BD: also ist das Dreyek ADB der Gattung nach gegeben (44. D.): folglich ist das Verhältniß von AB zu AD gegeben (3. Def. D.). Nun ist AB, also auch AD der Grösse nach gegeben (2. D.). Es ist aber AD auch der Lage nach gegeben; weil die Lage von AB und der Punkt A nebst dem Winkel BAD gegeben sind (32. D.); folglich ist der Punkt D gegeben (30. D.): also ist der aus dem Mittelpunkt D mit dem Halbmesser DA beschriebene Kreis der Lage und Grösse nach gegeben (7. Def. D.).

Die Komposition ist die nemliche mit der Verzeichnung und dem Beweis des 33sten Sazes im 3ten Buch der Elemente. Man beschreibe nemlich über AB einen Kreis-Abschnitt, der den gegebenen Winkel faßt; so ist dessen Umfang der gesuchte Ort, wie von selbst erhellet.

Berechnung.

In dem Dreyek ADB ist die Seite AB nebst allen Winkeln gegeben, folglich läßt sich AD, der Halbmesser des Kreises, leicht berechnen. Es ist nemlich

$$\left.\begin{matrix}\text{sin. C}\\ \text{sin. tot}\end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix}\text{sin. tot.}\\ \text{cosec C}\end{matrix}\right. = \tfrac{1}{2} \text{ AB : AD.}$$

Verlangt man DE, d. i. das aus dem Mittelpunkt D auf AB gefällte Perpendikel; so hat man

$$\text{sin. tot : cotg. C} = \tfrac{1}{2} \text{ AB : DE.}$$

3. Saz.

3. Satz.

Von Charmander.

Wenn die Grundlinie eines der Gröſſe nach gegebenen Dreyeks der Lage und Gröſſe nach gegeben iſt; ſo liegt der Scheitel-Punkt des Dreyeks auf einer der Lage nach gegebenen geraden Linie.

Fig. 12.

Es ſey die gerade Linie AB der Lage und Gröſſe nach, und das Dreyek ABC der Gröſſe nach gegeben; ſo fällt ſein Scheitel-Punkt C auf eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Man fälle auf AB das Perpendikel CD, und ergänze das Prllgrm. ADCE. Weil der Flächen-Innhalt des Dreyeks ABC gegeben iſt; ſo iſt auch das doppelte davon, alſo das Rechtek AB × CD, d. i. das Rechtek EAB gegeben; nun iſt AB und der Winkel BAE der Gröſſe nach gegeben; folglich iſt AE der Gröſſe nach (61. D.), aber auch der Lage nach (32. D.) gegeben, alſo der Punkt E gegeben (30. D.), mithin die gerade Linie EC, auf welcher der Punkt C liegt, der Lage nach gegeben (31. D.).

Kompoſition.

Ueber der Linie AB beſchreibe man das Prllgr. AEFB ſo, daß der Flächen-Innhalt des Prllgrms. doppelt ſo groß wird, als der Flächen-Innhalt des Dreyeks. Die Linie EF auf beeden Seiten verlängert wird der geſuchte Ort ſeyn. Denn wenn man an einen Punkt C dieſer Linie, an welchen man will, die Linien AC, BC zieht; ſo iſt immer das Dreyek ACB = ½ Prllgr. AEFB d. i. gleich dem gegebenen Raum.

Fig. 11.

Die geraden Linien AC, BC, welche den Winkel ACB einſchließen, der einem gegebenen Winkel gleich iſt, gehen durch die gegebenen Punkte A, B. Um das Dreyek ABC ſey ein Kreis beſchrieben, deſſen Mittelpunkt D; und man ziehe AD, BD, AB. Weil der Winkel ACB gegeben iſt; ſo iſt auch der Winkel ADB gegeben, der als Winkel am Mittelpunkt doppelt ſo groß iſt, als ACB; überdiß iſt das Verhältniß von AD zu BD gegeben, weil AD = BD: alſo iſt das Dreyek ADB der Gattung nach gegeben (44. D.): folglich iſt das Verhältniß von AB zu AD gegeben (3. Def. D.). Nun iſt AB, alſo auch AD der Gröſſe nach gegeben (2. D.). Es iſt aber AD auch der Lage nach gegeben; weil die Lage von AB und der Punkt A nebſt dem Winkel BAD gegeben ſind (32. D.); folglich iſt der Punkt D gegeben (30. D.): alſo iſt der aus dem Mittelpunkt D mit dem Halbmeſſer DA beſchriebene Kreis der Lage und Gröſſe nach gegeben (7. Def. D.).

Die Kompoſition iſt die nemliche mit der Verzeichnung und dem Beweis des 33ſten Sazes im 3ten Buch der Elemente. Man beſchreibe nemlich über AB einen Kreis-Abſchnitt, der den gegebenen Winkel faßt; ſo iſt deſſen Umfang der geſuchte Ort, wie von ſelbſt erhellet.

Berechnung.

In dem Dreyek ADB iſt die Seite AB nebſt allen Winkeln gegeben, folglich läßt ſich AD, der Halbmeſſer des Kreiſes, leicht berechnen. Es iſt nemlich

$$\left.\begin{matrix}\text{ſin. C}\\ \text{ſin. tot}\end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix}\text{ſin. tot.}\\ \text{coſec C}\end{matrix}\right. = \tfrac{1}{2}\text{AB} : \text{AD.}$$

Verlangt man DE, d. i. das aus dem Mittelpunkt D auf AB gefällte Perpendikel; ſo hat man

$$\text{ſin. tot} : \text{cotg. C} = \tfrac{1}{2}\text{AB} : \text{DE.}$$

3. Saz.

Von Charmander.

Wenn die Grundlinie eines der Gröſſe nach ge-
benen Dreyeks der Lage und Gröſſe nach gegeben iſt;
liegt der Scheitel-Punkt des Dreyeks auf einer der
je nach gegebenen geraden Linie.

Fig. 12.

Es ſey die gerade Linie AB der Lage und Gröſſe
ch, und das Dreyek ABC der Gröſſe nach gegeben;
fällt ſein Scheitel-Punkt C auf eine der Lage nach
gebene gerade Linie.

Man fälle auf AB das Perpendikel CD, und er-
ize das Prllgrm. ADCE. Weil der Flächen-Innhalt
Dreyeks ABC gegeben iſt; ſo iſt auch das doppelte
von, alſo das Rechtek AB × CD, d. i. das Rechtek
AB gegeben; nun iſt AB und der Winkel BAE der
öſſe nach gegeben; folglich iſt AE der Gröſſe nach
1. D.), aber auch der Lage nach (32. D.) gegeben,
o der Punkt E gegeben (30. D.), mithin die gerade
ie EC, auf welcher der Punkt C liegt, der Lage nach
geben (31. D.).

Kompoſition.

Ueber der Linie AB beſchreibe man das Prllgr.
EFB ſo, daß der Flächen-Innhalt des Prllgrms. dop-
t ſo groß wird, als der Flächen-Innhalt des Drey-
s. Die Linie EF auf beeden Seiten verlängert wird
r geſuchte Ort ſeyn. Denn wenn man an einen Punkt
dieſer Linie, an welchen man will, die Linien AC, BC
ht; ſo iſt immer das Dreyek ACB = ½ Prllgr.
EFB d. i. gleich dem gegebenen Raum.

Allgemeiner Saz des Pappus; in welchem, wie aus Pappus wahrscheinlich wird, diejenigen Säze des ersten Buchs enthalten sind, die von Apollonius selbst herrühren.

Wenn aus einem oder aus zwey gegebenen Punkten zwey gerade Linien gezogen werden, welche entweder Stüke einer und eben derselben geraden Linie sind, oder einander gleichlauffen, oder einen gegebenen Winkel einschlieſſen; wenn überdiß dieſe zwey Linien entweder ein gegebenes Verhältniß unter einander haben, oder ein der Gröſſe nach gegebenes Rechtek einschlieſſen; und wenn endlich der Endpunkt der einen dieſer Linien einen der Lage nach gegebenen Ort berührt: ſo wird auch der Endpunkt der andern einen der Lage nach gegebenen ebenen Ort berühren, deſſen Beſchaffenheit und Lage in Beziehung auf dieſe Linie, jede insbeſondere, von denen des erſten Orts verſchieden ſeyn können, oder nicht.

4. Saz.

Des Apollonius erſter.

Wenn auf einer geraden Linie, von einem auf ihr gegebenen Punkt an, zwey Stüke abgeſchnitten werden, welche ein gegebenes Verhältniß unter einander haben; und der Endpunkt eines dieſer Stüke eine der Lage nach gegebene gerade Linie berührt: ſo berührt auch der Endpunkt des andern Stüks eine der Lage nach gegebene gerade Linie. (Kommt auch in Eukl. Dat. als der 39ſte Saz vor.)

Fig. 13. a. b.

Von dem gegebenen Punkt A an werden auf einer geraden Linie die beeden Stüke AB und AC abgeſchnitten, die ein gegebenes Verhältniß unter einander haben; und

ɔ der Punkt B berühre die der Lage nach gegebene
rade Linie DE: ſo wird auch der Punkt C eine der La-
nach gegebene gerade Linie berühren.

Man fälle aus dem Punkt A auf die Linie DE
is Perpendikel AF, diß wird der Lage nach gegeben
yn (33. D.); weil nun (nach der Vorausſezung) auch
)E der Lage nach gegeben iſt; ſo iſt der Punkt F gege-
en (28. D.); folglich AF der Lage und Gröſſe nach
gegeben (29. D.). Man ziehe durch C die Linie CG
gleichlauffend mit DE; ſo iſt AF : AG = AB : AC,
alſo das Verhältniß von AF zu AG gegeben, und, weil
AF der Gröſſe nach gegeben iſt; ſo iſt auch AG der
Gröſſe nach gegeben; es iſt aber auch die Lage von AG
und der Punkt A gegeben, folglich iſt der Punkt G
(30. D.), mithin die Linie GC, welche der Punkt C be-
rührt, der Lage nach (31. D.) gegeben.

Kompoſition.

Man fälle auf DE das Perpendikel AF, und neh-
me auf demſelben AG ſo, daß AG zu AF das gegebene
Verhältniß hat; durch den Punkt G ziehe man GH mit
DE gleichlauffend: ſo wird GH der verlangte Ort ſeyn.
Denn, wenn man an DE irgend eine gerade Linie AB
zieht, die der Linie GH in C begegnet; ſo iſt AB:
AC = AF : AG, d. i. in dem gegebenen Verhältniß.

5. Saz.

Fig. 14. a. b. c. d.

Wenn auf einer geraden Linie, von einem auf ihr
gegebenen Punkt A an, zwey Stüke AB, AC abge-
ſchnitten werden, welche ein gegebenes Verhältniß un-
ter einander haben; und der Endpunkt B eines dieſer
Stüke den Umfang eines der Lage nach gegebenen Krei-
ſes

ses berührt: so berührt auch der Endpunkt C des andern Stüks den Umfang eines der Lage nach gegebenen Kreises, welcher entweder seine hole oder erhabene Seite gegen die Linie AC kehren wird, je nachdem entweder die hole oder die erhabene Seite des Umfangs, den B berührt, der Linie AB zugekehrt ist.

Denn es sey D der Mittelpunkt des Kreises, dessen Umfang der Punkt B berührt; man ziehe DB, und mit dieser gleichlauffend CE, welche der Linie DA in E begegne. Weil nun DB und EC gleichlauffend sind; so ist $\left.\begin{matrix}AD\\DB\end{matrix}\right\} : \left\}\begin{matrix}AE\\EC\end{matrix}\right. = AB : AC$ (4, 6. E.); also das Verhältniß dieser Linien gegeben. Es ist aber AD der Lage und Grösse nach gegeben, weil die Punkte A, D gegeben sind (29. D.); also ist AE der Grösse nach gegeben (2. D.). Es ist aber auch die Lage von AE, und der Punkt A gegeben, also auch der Punkt E (30. D.); und, weil DB der Grösse nach, und das Verhältniß von DB zu CE gegeben ist, so ist EC der Grösse nach gegeben; es ist aber auch der Punkt E gegeben; also berührt der Punkt C den Umfang eines der Lage nach gegebenen Kreises. (1. Saz.)

Kompoſition.

Man ziehe AD, diese Linie begegne dem Kreise, dessen Mittelpunkt D ist, in F, und man nehme AD : AE in dem gegebenen Verhältniß, und in eben diesem auch DF : EG; (man muß aber AE auf eben derselben Seite mit AD, oder auf der entgegengesezten Seite nehmen, je nachdem AC auf einerley, oder auf der entgegengesezten Seite von AB liegen soll, welches aus der Voraussezung zu beurtheilen ist) aus dem Mittelpunkt E mit dem Halbmesser EG beschreibe man einen Kreis; so wird dessen Umfang der gesuchte Ort seyn, d. h. wenn man

man aus dem Punkt A irgend eine Linie AB an den Umkreis, deſſen Mittelpunkt D iſt, zieht; ſo wird dieſe Linie dem Kreis, deſſen Mittelpunkt E iſt, in einem Punkt C begegnen, und es wird ſeyn AB : AC = AD : AE. Denn man ziehe die Linien DB, EC, und es ſey

Fig. 14. a. b.

1. der Punkt A innerhalb des Kreiſes, deſſen Mittelpunkt D iſt; ſo wird, weil nach der Verzeichnung AD : AE = DF : EG, und AD kleiner iſt, als der Halbmeſſer DF, auch AE kleiner ſeyn, als der Halbmeſſer EG (14, 5. E.), d. i. der Punkt A wird innerhalb des Kreiſes liegen, deſſen Mittelpunkt E iſt; alſo wird dem Umfang dieſes Kreiſes jede Linie AB begegnen, die von dem Punkt A aus gezogen wird. Auf ähnliche Art würde man ſchlieſſen, wenn A auf dem Umfang des Kreiſes läge, deſſen Mittelpunkt D iſt.

Fig. 14. c. d.

2. Es ſey der Punkt A auſſerhalb des Kreiſes, deſſen Mittelpunkt D iſt; man ziehe die Linie AH, welche dieſen Kreis in dem Punkt H auf eben der Seite der Linie AD berühre, auf welcher AB liegt, ferner ziehe man die Linie DH, und mit dieſer gleichlauffend die Linie EK, die dem Kreiſe, deſſen Mittelpunkt E iſt, in K begegne. Weil nun AD : AE = DF : EG = DH : EK, und DH, EK gleichlauffend ſind; ſo ſind die Punkte A, H, K in einer geraden Linie. (Diß erhellet aus 26, 6. E. oder aus 32, 6. E.) Nun iſt aber der Winkel DHA ein rechter (18, 3. E.), alſo iſt auch EKA ein rechter Winkel (29, 1. E.); folglich berührt AK den Kreis GK (16, 3. E.). Jede gerade Linie alſo, die den Kreis FH ſchneidet, d. i. die zwiſchen AD und AH fällt, wird auch zwiſchen AE und die Berührungs-Linie AK fal-

len, d. i. wird den Kreis GK in einem Punkt C schneiden.

In beyden Fällen aber ist, weil D, E die Mittelpunkte der Kreise sind, DB ; EC = (DF : EG, d. i. nach der Verzeichn. =) AD : AE, und in den Dreyeken ADB, AEC, die einen gemeinschaftlichen oder gleichen Winkel bey A haben, sind die Winkel ABD, ACE entweder beyde kleiner, oder beyde nicht kleiner als ein rechter (denn man muß beyde AB und AC entweder zugleich an die erhabene oder an die hole Seite des Umkreises ziehen); folglich ist der Winkel ADB gleich AEC (7, 6. E.), mithin AB : AC = AD : AE, d. i. in dem gegebenen Verhältniß.

6. Saz.

Fig. 15. a. b.

Wenn aus einem gegebenen Punkt A zwey gerade Linien AB, AC gezogen werden, die einen gegebenen Winkel BAC einschlieſſen, und ein gegebenes Verhältniß unter einander haben, und der Endpunkt B einer dieser Linien eine der Lage nach gegebene gerade Linie BG berührt: so berührt auch der Endpunkt C der andern eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Man ziehe an BG die gerade Linie AD unter jedem gegebenen Winkel, z. B. unter dem rechten Winkel ADB, und mache den Winkel DAE gleich dem Winkel BAC, und es sey das Verhältniß von DA zu AE gleich dem Verhältniß von BA zu AC, um nemlich noch einen andern Punkt E auf dem gesuchten Ort zu erhalten, endlich ziehe und verlängere man CE. Weil nun aus dem gegebenen Punkt A an die der Lage nach gegebene gerade Linie BG die Linie AD unter einem gegebenen Winkel gezogen worden ist; so ist AD der Lage nach gegeben (33. D.), also der Punkt D (28. D.), folglich

AD

AD der Lage und Gröſſe nach gegeben (29. D.); und, weil das Verhältniß von AD zu AE gegeben iſt, ſo iſt (2. D.) AE der Gröſſe nach gegeben, aber auch der Lage nach, weil die Lage von AD, der Punkt A, und der Winkel DAE gegeben ſind (32. D.); folglich iſt der Punkt E gegeben (30. D.). Es ſind aber die Winkel DAE, BAC gleich, mithin iſt, einen gemeinſchaftlichen Winkel hinzugeſezt, aber hinweggenommen, der Winkel DAB gleich EAC; und, weil DA : AE = BA : AC, ſo iſt verwechſelt DA : BA = AE : AC; es ſchlieſſen aber DA, BA und AE, AC gleiche Winkel ein; folglich ſind die Dreyeke DAB, EAC gleichwinklicht (6, 6. E.), alſo der Winkel AEC gleich dem gegebenen Winkel ADB. Weil alſo aus einem gegebenen Punkt E, auf einer der Lage nach gegebenen geraden Linie AE, die gerade Linie EC unter einem gegebenen Winkel AEC gezogen worden; ſo iſt EC der Lage nach gegeben (32. D.). Folglich berührt der Punkt C eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Kompoſition.

Aus dem Punkt A ziehe man an die der Lage nach gegebene gerade Linie DG irgend eine gerade Linie AD, mache den Winkel DAE gleich dem gegebenen Winkel, und nehme AE zu AD in dem gegebenen Verhältniß, durch den Punkt E ziehe man EF unter dem Winkel AEF = ADG, ſo, daß dieſe gleiche Winkel auf einerley Seiten der Linien AE, AD liegen: ſo wird die gerade Linie EF der geſuchte Ort ſeyn, d. i. wenn man aus dem Punkt A an die Linie DG irgend eine gerade Linie AB, und an EF eine gerade Linie AC ſo zieht, daß der Winkel BAC gleich wird dem Winkel DAE, ſo wird AB zu AC eben das Verhältniß haben, wie AD zu AE. Denn, weil die Winkel DAE, BAC gleich ſind; ſo ſind

auch DAB, EAC gleich; nun ſind nach der Verzeichnung auch die Winkel ADB, AEC gleich, alſo die Dreyeke DAB, EAC gleichwinklicht, mithin AB : AC = AD : AE, d. i. in dem gegebenen Verhältniß.

Berechnung.

Die Lage und Gröſſe der Linie AE, folglich auch die Lage der Linie FC, läßt ſich leicht nach der Kompoſition auch durch Berechnung beſtimmen. Wollte man den Winkel FLG, unter welchem die gerade Linie, welche der Ort iſt, und die der Lage nach gegebene Linie BG einander ſchneiden, nebſt dem Durchſchnitts-Punkt L beſtimmen; ſo könnte diß ſo geſchehen. Die Linie AE ſchneidet die Linie FC entweder in dem Punkt L, oder unterhalb der Linie BG, oder oberhalb derſelben. Schneidet AE die Linie FC in dem Punkt L, (Fig. 15. c.) ſo iſt ALG, d. h. ALF + FLG = ADL + DAL (32, 1. E.). Nach der Verzeichnung aber iſt AEF, oder hier ALF = ADL: folglich iſt FLG = $\begin{cases} \text{DAL} \\ \text{DAE} \end{cases}$

Schneidet AE (Fig. 15. d.) die Linie FC unterhalb der Linie BG; ſo muß folglich AE die Linie BG in einem Punkt P ſchneiden, und die Linie CF wird die Linie BG auch immer in einem Punkt ſchneiden. Denn wenn diß nicht wäre; ſo müßte CF mit BG gleichlauffen; folglich müßte, da nach der Verzeichnung AD ſenkrecht auf BG, und AE ſenkrecht auf CF iſt, AE ebenfalls ſenkrecht auf BG ſeyn, oder es müßten in dem Dreyek ADP die Winkel bey D und P rechte ſeyn, und diß iſt unmöglich. Es ſchneide alſo CF die Linie BG in L; ſo ſind in den Dreyeken ADP, LEP, die Winkel bey P als Scheitelwinkel, und nach der Verzeichnung auch die Winkel bey D, E gleich, folglich iſt auch der Winkel DAP oder DAE gleich dem ELP oder FLG. Endlich,

wenn

wenn AE (Fig. 15. a. b.) die Linie FC oberhalb BG ſchneidet; ſo werden, wie vorhin erwieſen, ſich auch die Linien FC, BG ſchneiden. Es geſchehe diß wieder in L; ſo entſteht entweder ein Viereck ADEL, um welches ſich ein Kreis beſchreiben läßt (2. Schol. 5, 4. E.), daher iſt der Winkel FLG = DAE (22, 3. E.), oder, wenn die Punkte D, L zuſammen fallen, d. h. wenn der Winkel AED gleich iſt dem Winkel ADB, ſo iſt CDA, d. h. CDB + BDA = DAE + AED, oder BDA ∽ CDB = AED ∽ DAE. Nun iſt BDA nach der Verzeichnung gleich AED, folglich iſt CDB oder FLG gleich DAE. In allen Fällen iſt mithin der Winkel, unter welchem ſich die Linien FC, BG ſchneiden gleich dem Winkel DAE, d. i. dem gegebenen BAC. Um nun auch den Durchſchnitts-Punkt L zu beſtimmen, ſucht man DL, und, wenn AD, wie bey der Verzeichnung, ſenkrecht auf BG ſteht; ſo iſt

In dem Dreyek DEL: DL : ED = ſin DEL { ſin FLG / coſin AED { ſin BAC

Und in dem Dreyek AED: ED : AD = ſin BAC : ſin AED

Folglich gleichförmig DL : AD = coſin AED { ſin AED / cotg AED { ſin. tot.

In dem Dreyek DAE aber, in welchem der Winkel DAE gleich BAC und DA : AE = BA : AC iſt, findet man

$$\text{ctg AED} = \frac{AC}{AB} \cdot \text{cosec BAC} - \text{cotg BAC};$$

folglich iſt $DL:AD = \left(\frac{AC}{AB} \cdot \text{cosec BAC} - \text{ctg BAC}\right) : \text{ſin. tot.}$

Auf die übrigen Fälle, wo entweder das Dreyek DEL, oder das Dreyek AED verſchwindet, wird man die Anwendung leicht machen können.

1. Lehnsaz.

Fig. 16. a.

Wenn aus einem Punkt A an die Mittelpunkte von zwey Kreisen die geraden Linien AD, AG gezogen werden, und diese Linien eben das Verhältniß unter einander haben, wie die Halbmesser ED, FG, und man die geraden Linien AK, AL zieht, welche die Kreise gegen einer Seite hin und AM, AN, welche sie gegen der andern Seite hin berühren: so ist jeder der beeden Winkel KAL, MAN gleich dem Winkel DAG, der zwischen den geraden Linien enthalten ist, welche aus dem Punkt A an die Mittelpunkte gezogen worden.

Denn man ziehe DK, GL, und, weil in den rechtwinklichten Dreyeken (18, 3. E.) AKD, ALG nach der Voraussezung AD : AG = DK : GL, oder verwechselt AD : DK = AG : GL; so sind diese Dreyeke gleichwinklicht (7, 6. E.); also sind die Winkel DAK, GAL gleich, und, wenn man zu jedem derselben den Winkel DAL hinzusezt: so sind die Winkel KAL, DAG gleich. Eben so wird bewiesen, daß MAN, DAG gleich seyen.

7. Saz.

Fig. 16. a. b.

Wenn aus einem gegebenen Punkt A zwey gerade Linien AB, AC gezogen werden, die einen gegebenen Winkel BAC einschliessen, und ein gegebenes Verhältniß unter einander haben, und der Endpunkt B der einen den Umfang eines der Lage nach gegebenen Kreises, z. B. des Kreises, dessen Mittelpunkt D ist, berührt: so berührt auch der Endpunkt C der andern einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Man

Man ziehe AD, BD und dann AF so, daß der Winkel DAF gleich werde dem Winkel BAC; an AF hin ziehe man CG, so, daß der Winkel ACG gleich werde ABD. Weil nun die Winkel DAG, BAC gleich sind; so sind auch DAB, GAC gleich; es sind aber auch die Winkel ACG, ABD gleich, mithin die Dreyeke ACG, ABD gleichwinklicht. Also DA : AG = AB : AC. Und, weil das Verhältniß von AB zu AC gegeben ist; so ist auch das Verhältniß von DA zu AG gegeben; es ist aber DA der Grösse nach gegeben, weil die Punkte A, D gegeben sind (29. D.); also ist auch AG der Grösse nach gegeben (2. D.), aber auch der Lage nach (32. D.); folglich ist der Punkt G gegeben (30. D.). Und wegen der gleichwinklichten Dreyeke ist BD : CG = AB : AC, also das Verhältniß von BD zu CG gegeben; und, weil BD der Grösse nach gegeben ist, ist auch CG der Grösse nach gegeben. Weil also aus einem gegebenen Punkt G eine der Grösse nach gegebene gerade Linie GC gezogen wird: so berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis (1. Saz.).

Kompoſition.

Aus dem gegebenen Punkt A ziehe man die Linie AD an den Mittelpunkt des der Lage nach gegebenen Kreises, diese begegne dem Umkreis in E, ferner ziehe man AF, so, daß der Winkel DAF gleich werde dem gegebenen Winkel, und zwar muß AF auf eben der Seite gegen die Linie AD liegen, auf welcher AC gegen die Linie AB gezogen werden soll; auf AF nehme man AG, so, daß AG zu AD das gegebene Verhältniß hat, und dann GF so, daß GF : DE = AG : AD, und beschreibe aus dem Mittelpunkt G mit dem Halbmesser GF einen Kreis; so wird dessen Umfang der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man aus dem Punkt A an den

Um-

Umkreis, deſſen Mittelpunkt D iſt, irgend eine gerade Linie AB, und dann eine andere AH zieht, ſo, daß der Winkel BAH, den dieſe beeden Linien einſchlieſſen, gleich wird dem Winkel DAG, und daß AH gegen AB eben die Lage bekommt, welche AG gegen AD hat; ſo wird AH dem Umfang des andern Kreiſes in einem Punkt C begegnen, und es wird ſeyn AB: AC = AD: AG, wenn man nemlich immer diejenigen Durchſchnitts-Punkte B, C oder b, c zuſammen nimmt, welche in Anſehung des Punktes A auf einerley Seiten der Kreiſe liegen. Denn, weil AD: AG = DE: GF; ſo iſt, wenn der Punkt A innerhalb des Kreiſes BE, oder auf ſeinem Umfang liegt, d. i. wenn AD kleiner oder gleich iſt DE, auch GA kleiner oder gleich GF, d. i. der Punkt A liegt auch innerhalb des Kreiſes CF, oder auf ſeinem Umfang; folglich begegnet jede aus dem Punkt A gezogene Linie dem Kreiſe CF. Iſt aber der Punkt A auſſerhalb des Kreiſes BE; ſo wird man auf ähnliche Art zeigen, daß er auch auſſerhalb des Kreiſes CF ſey; und, weil der Winkel BAH gleich iſt dem Winkel DAG, d. i. nach dem Lehnſaz gleich dem Winkel KAL, der zwiſchen den von A aus nach einerley Seite der Kreiſe hin gezogenen Berührungs-Linien enthalten iſt; weil überdiß AB den Kreis BE entweder berührt, oder zwiſchen die ihn berührenden Linien fällt; ſo muß auch AH den Kreis CF entweder berühren, oder zwiſchen die ihn berührenden Linien AL, AN fallen: in jedem Fall alſo begegnet AH dem Kreis CF: es geſchehe diß in C, und man ziehe die Linien BD, CG. Weil nun die Winkel DAG, BAC gleich ſind; ſo ſind auch DAB, GAC gleich, und nach der Verzeichnung iſt AD: AG = DB: GC; die Winkel ABD, ACG aber ſind entweder beyde kleiner, oder beyde nicht kleiner, als ein rechter; folglich ſind (7, 6. E.) die Dreyeke ABD, ACG gleichwinklicht, mithin AB: AC = AD: AG, d. i. in gegebenem Verhältniß.

Berech-

Berechnung.

In dem Dreyek ADG ist die Seite AD, und der Winkel DAG gegeben, und die Seite AG wird nach der Komposition leicht gefunden. Sie ist nemlich $= \frac{AD \cdot AC}{AB}$. Hieraus läßt sich nun auch das übrige berechnen. Es ist nemlich ctg $ADG = \frac{AB}{AC} \cdot \text{cosec } BAC - \text{ctg } BAC$, und $DG = AD \sqrt{1 + \frac{AC^2}{AB^2} - \frac{AC}{AB} \cdot \text{cosin } BAC}$. Endlich ist der Halbmesser $GF = \frac{AC}{AB} \cdot DE$.

8. Saz.

Fig. 17.

Wenn aus einem gegebenen Punkt A auf einer geraden Linie zwey Stüke AB, AC abgeschnitten werden, welche ein gegebenes Rechtek enthalten, und der Endpunkt des einen Stüks B eine der Lage nach gegebene gerade Linie DE berührt; so berührt der Endpunkt C des andern Stüks einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Aus dem Punkt A fälle man auf DE das Perpendikel AF; auf AF finde man den Punkt G, in welchem der Ort der Punkte C der Linie AF begegnet, d. i. man bestimme AG so, daß das Rechtek FAG gleich wird dem gegebenen Raum; so ist folglich der Punkt G gegeben, weil, da AF gegeben ist, auch AG gegeben seyn wird (61. D.). Und, weil nach der Vorausseżung das Rchtk BAC eben diesem gegebenen Raum gleich ist; so sind die Rechteke BAC, FAG gleich, also BA : AF = AG : AC; folglich sind, wenn CG gezogen wird, die

Drey-

Dreyeke BFA, GCA gleichwinklicht (6, 6. E.), alſo der Winkel ACG gleich dem rechten Winkel AFB. Wenn alſo durch zwey gegebene Punkte A, G zwey gerade Linien AC, GC gezogen ſind, welche einen gegebenen Winkel einſchlieſſen; ſo berührt der Durchſchnitts-Punkt dieſer Linien einen der Lage nach gegebenen Umkreis (nach dem 2ten Saz).

Kompoſition.

Auf die der Lage nach gegebene gerade Linie DE fälle man das Perpendikel AF, und nehme darauf den Punkt G ſo an, daß das Rechtek FAG gleich werde dem gegebenen Raum, über dem Durchmeſſer AG beſchreibe man einen Kreis; ſo wird deſſen Umfang der geſuchte Ort ſeyn. Denn man ziehe aus dem Punkt A irgend eine gerade Linie AC, welche dem Umkreis in C, der geraden Linie DE aber in B begegne, ferner ziehe man CG. Nun iſt der Winkel ACG im Halbkreis gleich dem rechten Winkel AFB; alſo ſind die Dreyeke ACG, AFB gleichwinklicht; folglich AF : AB = AC : AG, alſo iſt Rchtk BAC gleich dem Rchtk FAG, d. i. gleich dem gegebenen Raum.

9. Saz.

Wenn aus einem gegebenen Punkt A auf einer geraden Linie zwey Stüke AB, AC abgeſchnitten werden, welche ein gegebenes Rechtek enthalten, und der Endpunkt des einen Stüks einen der Lage nach gegebenen Umkreis berührt; ſo wird, wenn der gegebene Punkt A auf dieſem Umkreis liegt, der Endpunkt des andern Stüks eine der Lage nach gegebene gerade Linie berühren. Liegt aber der Punkt A nicht auf dieſem Umkreis; ſo berührt der Endpunkt des andern Stüks einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Fig.

Fig. 17.

1. Fall. Der Endpunkt C des einen Stüks berühre den der Lage nach gegebenen Kreis ACG, und der gegebene Punkt A liege auf dem nemlichen Kreiſe.

Man ziehe den Durchmeſſer AG (dieſer iſt der Lage und Gröſſe nach gegeben) und die Linie CG, auf AG nehme man einen Punkt F ſo, daß das Rchtk GAF gleich wird dem gegebenen Rchtk CAB; ſo iſt, da AG gegeben iſt, auch AF (61. D.), alſo der Punkt F (30. D.) gegeben. Es iſt aber wegen der gleichen Rechteke AG : AC = AB : AF, wenn man alſo FB zieht; ſo ſind die Dreyeke GAC, BAF gleichwinklicht; es iſt aber der Winkel ACG im Halbkreiſe ein rechter, folglich iſt auch AFB ein rechter Winkel; nun iſt die Lage von AF, und der Punkt F gegeben, mithin iſt BF der Lage nach gegeben (32. D.); alſo berührt der Punkt B eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Es iſt diß der umgekehrte vorige Saz, und die Kompoſition ergiebt ſich leicht. Man beſtimme nemlich den Punkt F ſo, daß das Rchtk GAF gleich werde dem gegebenen Raum, aus dem Punkt F errichte man DFE ſenkrecht auf AG.

Fig. 18. a. b.

2. Fall. Der Endpunkt B des einen Stüks berühre den der Lage nach gegebenen Kreis DBE, der gegebene Punkt A aber liege nicht auf dieſem Umkreis. DE ſeye von dem gegebenen Kreis derjenige Durchmeſſer, der durch den Punkt A geht, und AB begegne dem Kreiſe wieder in F. Weil nun aus dem Punkt A, der innerhalb oder auſſerhalb des Kreiſes DBE gegeben iſt, die Linie ABF an einen gegebenen Kreis gezogen iſt; ſo iſt das Rechtek BAF gegeben (95. oder 96. D.). Nach der Vorausſezung aber iſt das Rchtk BAC gegeben; alſo

Dreyeke BFA, GCA gleichwinklicht (6, 6. E.), alſo der Winkel ACG gleich dem rechten Winkel AFB. Weil alſo durch zwey gegebene Punkte A, G zwey gerade Linien AC, GC gezogen ſind, welche einen gegebenen Winkel einſchlieſſen; ſo berührt der Durchſchnitts-Punkt C dieſer Linien einen der Lage nach gegebenen Umkreis (nach dem 2ten Saz).

Kompoſition.

Auf die der Lage nach gegebene gerade Linie DE fälle man das Perpendikel AF, und nehme darauf den Punkt G ſo an, daß das Rechtek FAG gleich werde dem gegebenen Raum, über dem Durchmeſſer AG beſchreibe man einen Kreis; ſo wird deſſen Umfang der geſuchte Ort ſeyn. Denn man ziehe aus dem Punkt A irgend eine gerade Linie AC, welche dem Umkreis in C, der geraden Linie DE aber in B begegne, ferner ziehe man CG. Nun iſt der Winkel ACG im Halbkreis gleich dem rechten Winkel AFB; alſo ſind die Dreyeke ACG, AFB gleichwinklicht; folglich AF : AB = AC : AG, alſo iſt Rchtk BAC gleich dem Rchtk FAG, d. i. gleich dem gegebenen Raum.

9. Saz.

Wenn aus einem gegebenen Punkt A auf einer geraden Linie zwey Stüke AB, AC abgeſchnitten werden, welche ein gegebenes Rechtek enthalten, und der Endpunkt des einen Stüks einen der Lage nach gegebenen Umkreis berührt; ſo wird, wenn der gegebene Punkt A auf dieſem Umkreis liegt, der Endpunkt des andern Stüks eine der Lage nach gegebene gerade Linie berühren. Liegt aber der Punkt A nicht auf dieſem Umkreis; ſo berührt der Endpunkt des andern Stüks einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Fig.

Fig. 17.

1. Fall. Der Endpunkt C des einen Stüks berühre den der Lage nach gegebenen Kreis ACG, und der gegebene Punkt A liege auf dem nemlichen Kreise.

Man ziehe den Durchmesser AG (dieser ist der Lage und Grösse nach gegeben) und die Linie CG, auf AG nehme man einen Punkt F so, daß das Rchtk GAF gleich wird dem gegebenen Rchtk CAB; so ist, da AG gegeben ist, auch AF (61. D.), also der Punkt F (30. D.) gegeben. Es ist aber wegen der gleichen Rechteke AG: AC = AB: AF, wenn man also FB zieht; so sind die Dreyeke GAC, BAF gleichwinklicht; es ist aber der Winkel ACG im Halbkreise ein rechter, folglich ist auch AFB ein rechter Winkel; nun ist die Lage von AF, und der Punkt F gegeben, mithin ist BF der Lage nach gegeben (32. D.); also berührt der Punkt B eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Es ist diß der umgekehrte vorige Saz, und die Komposition ergiebt sich leicht. Man bestimme nemlich den Punkt F so, daß das Rchtk GAF gleich werde dem gegebenen Raum, aus dem Punkt F errichte man DFE senkrecht auf AG.

Fig. 18. a. b.

2. Fall. Der Endpunkt B des einen Stüks berühre den der Lage nach gegebenen Kreis DBE, der gegebene Punkt A aber liege nicht auf diesem Umkreis. DE seye von dem gegebenen Kreis derjenige Durchmesser, der durch den Punkt A geht, und AB begegne dem Kreise wieder in F. Weil nun aus dem Punkt A, der innerhalb oder ausserhalb des Kreises DBE gegeben ist, die Linie ABF an einen gegebenen Kreis gezogen ist; so ist das Rechtek BAF gegeben (95. oder 96. D.). Nach der Vorausseżung aber ist das Rchtk BAC gegeben; also

iſt das Verhältniß der beyden Rechteke BAF, und BAC (1. D.); folglich das Verhältniß von AF zu AG gegeben. Es ſind alſo aus einem gegebenen Punkt A auf einer geraden Linie zwey Stüke AF, AC abgeſchnitten, welche ein gegebenes Verhältniß unter einander haben, und der Endpunkt F des einen Stüks berührt den Umfang des der Lage nach gegebenen Kreiſes BDE; folglich berührt der Endpunkt C des andern Stüks den Umfang eines der Lage nach gegebenen Kreiſes nach dem 5ten Saz.

Kompoſition.

Es ſeye DE von dem der Lage nach gegebenen Kreiſe derjenige Durchmeſſer, der durch den Punkt A geht, und man mache das Rechtek DAG gleich dem gegebenen Raum, nemlich ſo, daß die Punkte D, G auf einerley oder verſchiedene Seiten des Punktes A fallen, je nachdem die Punkte B, C auf einerley oder auf verſchiedene Seiten von eben dieſem Punkt fallen ſollen. Nun beſchreibe man nach dem 5ten Saz den Kreis HCG ſo, daß, wenn aus dem Punkt A irgend eine Linie AF an den Kreis DFE gezogen wird, dieſe dem Kreis HCG in einem Punkt C begegne, und AF : AC gleich ſeye AE : AG; diß geſchieht nemlich, wenn man den Punkt H ſo beſtimmt, daß AE : AG = AD : AH, und dann über dem Durchmeſſer GH einen Kreis beſchreibt; ſo wird deſſen Umfang der geſuchte Ort ſeyn. Denn aus dem Punkt A ziehe man an den Kreis DE irgend eine gerade Linie AB, die dem Kreis wieder in F begegne; ſo begegnet nach der Verzeichnung AF dem Kreis HG in einem Punkte C, und es iſt AF : AC = AE : AG, alſo Rchtk BAF : Rchtk BAC = Rchtk DAE : Rchtk DAG (1, 6. E.). Nun ſind aber die Rechteke BAF, DAE gleich (Zuſ. 36, 3. E.). Alſo iſt das Rechtek BAC gleich dem Rechtek DAG, d. i. gleich dem gegebenen Raum.

Raum. Und man ſieht leicht, daß die Lage der Punkte B, C gerade die entgegengeſezte ſeye von der Lage der Punkte F, C.

10. Saz.

Fig. 19.

Wenn aus einem gegebenen Punkt A zwey gerade Linien AB, AC gezogen werden, welche einen gegebenen Winkel BAC, und ein gegebenes Rechtek BAC enthalten, und der Endpunkt der einen B eine der Lage nach gegebene gerade Linie berührt; ſo berührt der Endpunkt der andern C den Umfang eines der Lage nach gegebenen Kreiſes.

Man fälle aus dem Punkt A auf die gerade Linie DE das Perpendikel AF, und ziehe die Linie AG ſo, daß der Winkel FAG gleich werde dem gegebenen Winkel BAC, den Punkt G beſtimme man ſo, daß das Rechtek FAG gleich ſeye dem Rechtek BAC, endlich ziehe man GC. Weil nun die Winkel FAG, BAC gleich ſind; ſo ſind, einen gemeinſchaftlichen Winkel hinzugeſezt oder hinweggenommen, auch die Winkel FAB, GAC gleich; und, weil die Rechteke FAG, BAC gleich ſind; ſo iſt FA : AB = AC : AG, folglich ſind die Dreyeke FAB, GAC gleichwinklicht (6, 6. E.), alſo iſt der Winkel ACG gleich dem rechten Winkel AFB; nun iſt die Lage (33. D.) und Gröſſe (28. 29. D.) von AF, und auch das Rechtek FAG gegeben, mithin iſt AG der Gröſſe nach gegeben (61. D.), aber auch der Lage nach wegen des gegebenen Winkels FAG (32. D.); alſo iſt der Punkt G gegeben (30. D.). Weil alſo aus zwey gegebenen Punkten A, G zwey Linien AC, GC gezogen ſind, welche einen gegebenen Winkel ACG einſchlieſſen; ſo berührt der Punkt C den Umfang eines der Lage nach gegebenen Kreiſes (nach dem 2ten Saz).

Kompoſition.

Aus dem gegebenen Punkt A ziehe man AF, und AG wie oben, über AG als Durchmeſſer beſchreibe man einen Kreis; ſo wird deſſen Umfang der geſuchte Ort ſeyn. Denn, man ziehe aus A an DE irgend eine gerade Linie AB, und mache den Winkel BAH gleich FAG; ſo wird AH dem Umkreis noch in einem Punkt C begegnen, und das Rchtk BAC wird gleich ſeyn dem Rchtk FAG. Es ſind nemlich wegen der Gleichheit der Winkel FAG, BAH auch die Winkel FAB, GAH gleich; alſo iſt der Winkel GAH ſpizig, folglich ſchneidet die gerade Linie AH den Kreis; ſie ſchneide ihn in C, und man ziehe GC, ſo ſind die Dreyeke FAB, GAC gleichwinklicht, denn der Winkel ACG im Halbkreis iſt gleich dem rechten Winkel AFB; alſo AF : AB = AC : AG, folglich das Rchtk BAC gleich dem Rchtk FAG, d. i. gleich dem gegebenen Raum.

II. Satz.

Wenn aus einem gegebenen Punkt A zwey gerade Linien AB, AC gezogen werden, welche einen gegebenen Winkel BAC, und ein gegebenes Rechtek enthalten, und der Endpunkt der einen den Umfang eines der Lage nach gegebenen Kreiſes berührt; ſo wird, wenn der Punkt A auf dem Umfang dieſes Kreiſes liegt, der Endpunkt der andern eine der Lage nach gegebene gerade Linie berühren. Liegt aber der gegebene Punkt A nicht auf dem Umfang dieſes Kreiſes; ſo berührt der Endpunkt der andern Linie einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Fig. 19.

1. Fall. Der gegebene Punkt A liege auf dem Umfang des der Lage nach gegebenen Kreiſes, deſſen

Durch-

Durchmeſſer AG iſt, welcher Durchmeſſer AG alſo der Lage nach gegeben iſt, und der Endpunkt C der einen der gezogenen Linie berühre den Umfang eben dieſes Kreiſes; ſo berührt der Endpunkt B der andern eine der Lage nach gegebene gerade Linie. Denn man ziehe CG und hernach AF, ſo, daß der Winkel GAF gleich werde dem Winkel CAB, und das Rchtk GAF gleich dem Rchtk CAB, und daß AF, AB auf einerley Seiten der geraden Linien AG, AC fallen, endlich ziehe man noch die Linie BF. Es ſind alſo die Dreyeke FAB, CAG gleichwinklicht, mithin der Winkel AFB gleich dem rechten Winkel ACG. Weil aber die Lage von AG, der Winkel CAB oder GAF, und der Punkt A gegeben ſind; ſo iſt die gerade Linie AF der Lage nach gegeben (32. D.), aber auch der Gröſſe nach, weil AG der Gröſſe nach, und das Rchtk GAF gegeben ſind, alſo iſt der Punkt F gegeben. Nun iſt aber auch der rechte Winkel AFB, mithin die gerade Linie FB, welche der Punkt B berührt, der Lage nach gegeben. Die Kompoſition ergiebt ſich leicht. Man ziehe nemlich die gerade Linie AF, wie geſagt worden, und durch F errichte man auf AF das Perpendikel FE.

Fig. 20.

2. Fall. Der gegebene Punkt A liege nicht auf dem Umfang des der Lage nach gegebenen Kreiſes BDE, und der Endpunkt B der einen der gezogenen Linien berühre dieſen Kreis; ſo berührt auch der Endpunkt C der andern einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Denn AB begegne dem Kreiſe wieder in D; ſo iſt, weil aus einem gegebenen Punkt A an einen der Lage nach gegebenen Kreis die gerade Linie ADB gezogen iſt, das Rechtek BAD gegeben (95. oder 96. D.); nun iſt nach der Vorausſezung das Rchtk BAC gegeben; folglich iſt (1. D.) das Verhältniß der Rechteke BAD, BAC,

alſo das Verhältniß von AD zu AC gegeben. Weil alſo aus einem gegebenen Punkt A die gerade Linien AD, AC gezogen ſind, die einen gegebenen Winkel DAC einſchlieſſen, und ein gegebenes Verhältniß unter einander haben, und weil der Endpunkt D der einen dieſer Linien einen der Lage nach gegebenen Umkreis berührt; ſo berührt auch der Endpunkt C der andern einen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem 7ten Saz.

Kompoſition.

Aus dem gegebenen Punkt A ziehe man durch den Mittelpunkt des der Lage nach gegebenen Kreiſes die gerade Linie AEF, und aus eben dieſem Punkt ziehe man AG ſo, daß ſowohl der Winkel FAG gleich werde dem gegebenen Winkel, als auch das Rechtek FAG gleich werde dem gegebenen Raum; und nach der Kompoſition des 7ten Sazes beſchreibe man einen Umkreis, welcher der Ort iſt von allen Punkten G, die nemlich Endpunkte ſind von geraden Linien AG, welche mit den an den Umkreis BDE gezogenen Linien AE einen Winkel machen gleich dem gegebenen Winkel FAG, und zu welchen die Linien AE ein Verhältniß haben gleich dem Verhältniß von AE : AG. Es ſeye der beſchriebene Umkreis GCH; ſo wird dieſer der geſuchte Ort ſeyn, d. i. wenn man aus dem Punkt A irgend eine Linie AB an den Kreis BDE, und aus eben dieſem Punkt eine Linie AK zieht, ſo, daß der Winkel BAK gleich wird dem Winkel FAG; ſo begegnet AK dem Kreiſe GCH in zwey Punkten C, H (wie aus dem 7ten Saz erhellet), und es iſt das Rchtk BAC gleich dem gegebenen Rchtk FAG, wenn man nur immer von den Durchſchnitts-Punkten der Linien ADB, ACH mit den Kreiſen diejenige zuſammen nimmt, welche eine entgegengeſezte Lage haben. Denn, weil nach der Verzeichnung (nemlich

nach

ach dem 7ten Saz) AD : AC = AE : AG; ſo iſt chtk BAD : Rchtk BAC = (AE : AG, d. i. =) chtk FAE : Rchtk FAG. Nun iſt Rchtk BAD = Rchtk FAE; mithin Rchtk BAC = Rchtk FAG, . i. gleich dem gegebenen Raum. Und, weil nach eben em 7ten Saz AD : AC = AB : AH; ſo iſt Rchtk AH = Rchtk BAC oder FAG, d. i. gleich dem gege- nen Raum.

Berechnung.

Die Berechnung des 1ſten Falls wird ſehr leicht us der Kompoſition hergeleitet. Für den 2ten Fall iſt $G = \frac{AB.AC}{AF}$, folglich AG : AE = AB.AC : AF.AE, nd, wenn O der Mittelpunkt des gegebenen, M des ı ſuchenden Kreiſes iſt; ſo iſt nach dem 7ten Saz $M = \frac{AO.AB.AC}{AF.AE}$. In dem Dreyek AOM, in elchem alſo jezt die Seiten AO, AM nebſt dem einge- hloſſenen Winkel bekannt ſind, findet man ferner

$$\text{tg } AOM = \frac{AF.AE}{AB.AC} \cdot \text{cosec } BAC - \text{ctg } BAC,$$

$$\text{und } OM = AO \sqrt{1 + \left(\frac{AB.AC}{AF.AE}\right)^{-2} \cdot \frac{AB.AC}{AF.AE} \cdot \text{cosin } BAC}.$$

Der Halbmeſſer GM endlich iſt $= \frac{AB.AC.EO}{AF.AE}$.

12. Saz.

Fig. 21.

Wenn aus zwey gegebenen Punkten A, B zwey ge- rade Parallel-Linien AC, BD gezogen werden, welche

ein gegebenes Verhältniß unter einander haben, und der Endpunkt C der einen dieſer Linien eine der Lage nach gegebene gerade Linie EF berührt; ſo berührt auch der Endpunkt D der andern eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Denn, man fälle aus A auf EF das Perpendikel AG, welches alſo der Lage (33. D.) und Gröſſe nach (28. 29. D.) gegeben iſt.

Aus B ziehe man, auf welcher Seite man will, BH mit AG gleichlauffend, und nehme BH : AG = BD : AC; ſo iſt BH der Lage (31. D.) aber auch der Gröſſe (2. D.) nach gegeben, und, weil der Punkt B gegeben iſt; ſo iſt folglich auch der Punkt H gegeben (30. D.). Man ziehe DH, und weil AG, BH, wie auch AC, BD gleichlauffend ſind; ſo ſind die Winkel GAC, HBD gleich. Weil überdiß AG : BH = AC : BD; ſo ſind die Dreyeke GAC, HBD gleichwinklicht (6, 6. E.); mithin BHD gleich dem rechten Winkel AGC. Weil alſo aus einem gegebenen Punkt H auf einer der Lage nach gegebenen geraden Linie BH die gerade Linie HD unter einem gegebenen Winkel gezogen worden; ſo iſt HD der Lage nach gegeben (32. D.), mithin berührt D eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Kompoſition.

Man fälle auf EF das Perpendikel AG, durch B ziehe man BK mit AG gleichlauffend, und auf BK nehme man BH : AG in dem gegebenen Verhältniß, endlich ziehe man durch H die Linie HL gleichlauffend mit EF; ſo wird HL der geſuchte Ort ſeyn. Wenn man nemlich aus den Punkten A, B an EF, LH irgend zwey Parallel-Linien AC, BD zieht, ſo ſind die Dreyeke GAC, HBD gleichwinklicht, alſo iſt AC : BD = AG : BH, d. i. in dem gegebenen Verhältniß.

13. Saz.

Wenn aus zwey gegebenen Punkten A, B zwey gerade Parallel-Linien AC, BD gezogen werden, welche ein gegebenes Verhältniß unter einander haben, und der Endpunkt C der einen dieser Linien einen der Lage nach gegebenen Umkreis, z. B. den Umkreis, dessen Mittelpunkt E ist, berührt; so berührt auch der Endpunkt D der andern einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Fig. 22.

Man ziehe AE, und durch den Punkt B, auf welcher Seite man will, BF mit AE gleichlauffend, nehme BF : AE = BD : AC, und ziehe EC, FD. Es ist also BF der Lage und Grösse nach, folglich auch der Punkt F gegeben, und die Dreyeke AEC, BFD sind gleichwinklicht, welches wie im vorigen Saz erwiesen wird. Folglich ist EC : FD = AC : BD, d. i. in dem gegebenen Verhältniß; und, weil EC der Grösse nach gegeben ist; so ist auch FD der Grösse nach gegeben (2. D.), weil überdiß der Punkt F gegeben ist; so berührt der Punkt D einen der Lage nach gegebenen Umkreis, nach dem 1sten Saz.

Kompoſition.

Man ziehe die gerade Linie AE, die dem gegebenen Umkreis in G begegne, durch B ziehe man mit AE eine Parallel-Linie, auf dieser nehme man BF zu AE, und FH zu EG in dem gegebenen Verhältniß, aus dem Mittelpunkt F mit dem Halbmesser FH beschreibe man einen Kreis; so wird dessen Umfang der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man aus A irgend eine Linie AC, die dem Umkreis, dessen Mittelpunkt E ist, in C, c begeg-

net, und dann aus B mit AC eine Parallel-Linie BK zieht; so wird diese dem Umkreis, dessen Mittelpunkt F ist, in zwey Punkten D, d begegnen, und es wird seyn AC: BD = AE: BF, also in dem gegebenen Verhältniß, wenn man nemlich immer diejenigen Punkte C, D oder c, d zusammen nimmt, die in Ansehung der Punkte A, B auf einerley Seiten der Kreise liegen. Denn man ziehe AL, BM, welche die Kreise auf den Seiten der Punkte C, D berühren, und hernach die Linien EL, FM. Die Dreyeke AEL, BFM sind gleichwinklicht, welches ganz wie im 1sten Lehnsaz erwiesen wird; folglich sind die Winkel EAL, FBM gleich; es sind aber auch die Winkel EAC, FBK gleich, weil AE, BF und AC, BD gleichlauffend sind; weil nun AC innerhalb des Winkels EAL fällt, so wird BK innerhalb des Winkels FBM fallen, also dem Kreis begegnen; diß geschehe in D, d, und man ziehe EC, FD. Weil nun nach der Verzeichnung AE: BF = EG: FH = EC: FD, und in den Dreyeken AEC, BFD die Winkel EAC, FBD gleich, und die Winkel bey C, D entweder beyde kleiner, oder beyde nicht kleiner sind, als ein rechter; so sind die Dreyeke AEC, BFD gleichwinklicht (7, 6. E.); also ist AC: BD = AE: BF, d. i. in dem gegebenen Verhältniß.

14. Saz.

Fig. 23.

Wenn aus zwey gegebenen Punkten A, B zwey gerade Parallel-Linien AC, BD gezogen werden, welche ein gegebenes Rechtek einschliessen, und der Endpunkt C der einen dieser Linien eine der Lage nach gegebene gerade Linie EF berührt; so berührt der Endpunkt D der andern einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Denn

Denn man nehme auf der geraden Linie AC, auf welcher Seite man will, AG gleich BD. Weil nun auf einer geraden Linie aus einem gegebenen Punkt A zwey Stüke AC, AG abgeschnitten sind, welche ein gegebenes Rechtek enthalten, und der Endpunkt der einen C eine der Lage nach gegebene gerade Linie berührt; so berührt der Endpunkt der andern G einen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem 8ten Saz. Und, weil aus zwey gegebenen Punkten A, B zwey gerade Parallel-Linien AG, BD gezogen sind, die ein gegebenes Verhältniß unter einander haben (denn sie sind gleich), und der Endpunkt der einen G einen der Lage nach gegebenen Umkreis berührt; so berührt auch der Endpunkt D der andern einen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem vorhergehenden Saz.

Die Kompoſition folgt leicht aus den Kompoſitionen des 8ten und vorhergehenden 13ten Sazes. Man fälle nehmlich aus dem Punkt A auf die gerade Linie EF das Perpendikel AH, und beſtimme auf dieſem den Punkt K ſo, daß das Rchtk HAK gleich wird dem gegebenen Raum, aus dem Punkt B ziehe man BL mit AK gleich und gleichlauffend, und beſchreibe über dem Durchmeſſer BL einen Kreis; ſo wird deſſen Umfang der geſuchte Ort ſeyn, d. i. wenn man aus A an die gerade Linie EF irgend eine gerade Linie AC, und aus B mit AC gleichlauffend eine Linie BD zieht, die dem Kreis BDL in D begegne; ſo wird das Rechtek AC × BD gleich ſeyn dem Rechtek HAK. Denn man denke ſich über dem Durchmeſſer AK einen Kreis beſchrieben, dem AC in G begegne; ſo iſt nach dem 13ten Saz, weil BL = AK, auch BD = AG; nach dem 8ten Saz aber iſt das Rchtk CAG, mithin auch das Rchtk CA × BD gleich dem Rchtk HAK, d. i. gleich dem gegebenen Raum.

15. Saz.

15. Saz.

Wenn aus zwey gegebenen Punkten A, B zwey gerade Parallel-Linien AC, BD gezogen werden, welche ein gegebenes Rechtek einſchlieſſen, und der Endpunkt der einen dieſer Linien einen der Lage nach gegebenen Umkreis berührt; ſo wird, wenn der gegebene Punkt, von welchem aus dieſe Linie gezogen worden, auch auf dieſem Umkreis liegt, der Endpunkt der andern eine der Lage nach gegebene gerade Linie berühren. Liegt hingegen dieſer Punkt nicht auf dieſem Umkreis; ſo berührt der Endpunkt der andern ebenfalls einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Fig. 23.

1. Fall. Der Endpunkt der einen D liege auf einem der Lage nach gegebenen Umkreis, z. B. auf dem, deſſen Durchmeſſer BL iſt, und der gegebene Punkt B ſeye auf eben dieſem Umkreis; ſo berührt der Endpunkt C der andern eine der Lage nach gegebene gerade Linie. Denn man nehme auf AC den Punkt G ſo an, daß AG = BD; ſo berührt nach dem 13ten Saz der Punkt G einen der Lage nach gegebenen Umkreis, nemlich den Umkreis, deſſen Durchmeſſer AK mit BL gleich und gleichlauffend iſt. Und, weil aus einem gegebenen Punkt A auf einer geraden Linie zwey Stüke AC, AG abgeſchnitten worden, welche ein gegebenes Rechtk enthalten, und der Endpunkt des einen G auf eben dem der Lage nach gegebenen Umkreis liegt, auf welchem auch der Punkt A liegt; ſo berührt der Endpunkt des andern Stüks C eine der Lage nach gegebene gerade Linie nach dem 9ten Saz 1. Fall. Es iſt diß der umgekehrte vorige Saz, und die Kompoſition ergiebt ſich leicht aus den Kompoſitionen des 9ten und 13ten Sazes. Man ziehe nemlich AH gleichlauffend mit BL, beſtimme den

Punkt

Punkt H ſo, daß das Rchtk AH × BL oder HAK gleich werde dem gegebenen Raum, aus H errichte man EHF ſenkrecht auf AH; ſo iſt EHF der verlangte Ort. Denn wenn man aus A, B zwey gerade Parallel-Linien, welche man will, z. B. AC, BD zieht; ſo iſt das Rchtk BD × AC, d. i. GAC gleich dem Rchtk HAK oder AH × BL, d. i. gleich dem gegebenen Raum.

Fig. 24.

2. Fall. Der Endpunkt C der einen der beyden Parallel-Linien liege auf dem der Lage nach gegebenen Umkreis, deſſen Durchmeſſer, der durch A geht, EF iſt, der gegebene Punkt A aber liege nicht auf dieſem Umkreis; ſo berührt der Endpunkt D der andern Parallel-Linie ebenfalls einen der Lage nach gegebenen Umkreis. Denn man nehme auf AC das Stük AG gleich BD. Weil nun aus einem gegebenen Punkt A auf einer geraden Linie zwey Stüke AC, AG abgeſchnitten worden, welche ein gegebenes Rechtek enthalten, und der Endpunkt C des einen Stüks auf dem der Lage nach gegebenen Umkreis ECF, der gegebene Punkt A aber nicht auf dieſem Umkreis liegt; ſo berührt der Endpunkt G des andern Stüks einen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem 9ten Saz 2. Fall. Und, weil aus zwey gegebenen Punkten A, B zwey Parallel-Linien AG, BD gezogen ſind, welche ein gegebenes Verhältniß unter einander haben (denn ſie ſind gleich) und G einen der Lage nach gegebenen Umkreis berührt; ſo berührt auch D einen der Lage nach gegebenen Umkreis, nach dem 13ten Saz. Die Kompoſition ergiebt ſich aus den Kompoſitionen des 9ten Sazes 2. Fall und des 13ten Sazes. Man beſtimme nemlich auf AF den Punkt H ſo, daß das Rchtk EAH gleich werde dem gegebenen Raum, und den Punkt K ſo, daß AF : AH = AE : AK; durch B

ziehe

ziehe man eine gerade mit AH gleichlauffende Linie, und nehme darauf BL, BM gleich AH, AK; über dem Durchmeſſer ML beſchreibe man einen Kreis; ſo wird deſſen Umfang der geſuchte Ort ſeyn, d. i. wenn man aus dem Punkt A an den Kreis ECF irgend eine gerade Linie AC, und aus dem Punkt B mit AC gleichlauffend eine Linie BN zieht; ſo wird BN dem Kreis MDL in einem Punkt D begegnen, und es wird das Rechtek AC × BD gleich ſeyn dem Rechtek EAH, d. i. gleich dem gegebenen Raum. Denn man beſchreibe über dem Durchmeſſer KH einen Kreis KGH; ſo begegnet nach dem 2ten Fall des 9ten Sazes die gerade Linie AC dieſem Kreis in einem Punkt G, und das Rechtek CAG iſt gleich dem Rchtk EAH. Weil aber auf den geraden Parallel-Linien die Stüke BL, BM gleich ſind AH, AK; ſo begegnet BN dem Kreis MDL nach dem 13ten Saz in einem Punkt D, und es iſt BD gleich AG; alſo iſt das Rchtk AC × BD oder CAG gleich dem Rchtk EAH, d. i. dem gegebenen Raum. Man ſieht übrigens von ſelbſt, daß man die gerade Linien AH, AK nicht nöthig gehabt hätte, um BL, BM zu finden, und den Kreis MDL, welcher der geſuchte Ort iſt, zu beſchreiben; ſondern man braucht ſie nur, die Kompoſition zu beweiſen. Eben dieſes iſt bey einigen folgenden Säzen zu bemerken.

16. Saz.

Fig. 25.

Wenn aus zwey gegebenen Punkten A, B zwey gerade Linien AC, BD gezogen werden, welche einen gegebenen Winkel AEB einſchlieſſen, und ein gegebenes Verhältniß unter einander haben, und der Endpunkt C der einen dieſer Linien eine der Lage nach gegebene gerade Linie FG berührt; ſo berührt auch der Endpunkt

punkt D der andern eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Durch A ziehe man eine mit BD gleiche und gleichlauffende Linie AH, weil nun der Winkel AEB gegeben iſt; ſo iſt auch der ihm gleiche CAH gegeben. Weil alſo aus einem gegebenen Punkt A zwey gerade Linien AC, AH gezogen ſind, welche einen gegebenen Winkel einſchlieſſen, und ein gegebenes Verhältniß unter einander haben, und der Endpunkt C der einen eine der Lage nach gegebene gerade Linie berührt; ſo berührt auch der Endpunkt H der andern eine der Lage nach gegebene gerade Linie nach dem 6ten Saz. Und, weil aus zwey gegebenen Punkten A, B zwey gerade Parallelen gezogen ſind, welche ein gegebenes Verhältniß unter einander haben (denn ſie ſind gleich), und der Endpunkt der einen H eine der Lage nach gegebene gerade Linie berührt; ſo berührt auch der Endpunkt der andern D eine der Lage nach gegebene gerade Linie nach dem 12ten Saz.

Die Kompoſition folgt aus den Kompoſitionen des 6ten und 12ten Sazes ſo: der gegebene Winkel ſeye KLM, und das gegebene Verhältniß, welches die durch A zu ziehende Linie zu der durch B zu ziehenden haben ſoll, ſeye das Verhältniß von KL zu LM. Aus A fälle man auf FG das Perpendikel AN, und ziehe AO ſo, daß der Winkel NAO gleich wird dem gegebenen Winkel KLM. Es muß aber AO gegen AN auf eben der Seite liegen, auf welcher der Vorausſezung nach die Linie AE (welche mit BE den Winkel AEB = KLM einſchließt) gegen AB liegen ſoll; denn der Winkel AEB kann, auf welcher Seite von AB man will, liegen. Auf AO beſtimme man den Punkt P ſo, daß KL : LM = AN : AP. Aus B ziehe man, auf welcher Seite man will, BQ mit AP gleich und gleichlauffend, aus dem Punkt Q errichte man auf BQ das Perpendikel QR; ſo wird diß der geſuchte Ort ſeyn. Denn man

ziehe

ziehe aus dem Punkt A an FG irgend eine gerade Linie AC, und aus eben dieſem Punkt die gerade Linie AS ſo, daß der Winkel SAC gleich wird dem gegebenen Winkel KLM, und es ſeye PT ſenkrecht auf AP. Es iſt alſo PT der im 6ten Saz beſchriebene Ort; folglich begegnet die gerade Linie AS der geraden Linie PT in einem Punkt H, und es iſt KL : LM = AC : AH. Man ziehe BV mit AH gleichlauffend, und dieſe Linie BV begegne der Linie AC in E, weil nun der Winkel BEA gleich iſt dem Winkel CAS, d. i. dem Winkel KLM; ſo iſt BE eine gerade Linie, welche mit AC einen dem gegebenen gleichen Winkel einſchließt. Weil aber die gerade Linien AP, BQ gleich und gleichlauffend, und die geraden Linien PT, QR, ſo wie AH, BV gleichlauffend ſind; ſo begegnet nach dem 12ten Saz BV der Linie QR in einem Punkt D, ſo, daß AH, BD gleich werden. Folglich iſt AC : $\left\{\begin{matrix}BD\\AH\end{matrix}\right.$ = KL : LM.

Berechnung.

Die Lage und Gröſſe der Linie AP, folglich auch der ihr gleichen und gleichlauffenden BQ werden leicht aus der Kompoſition beſtimmt. Wollte man den Winkel FZQ, unter welchem die geſuchte Linie QR die gegebene FG ſchneidet, und den Durchſchnitts-Punkt Z beſtimmen; ſo könnte diß ſo geſchehen. Der Winkel TGZ iſt gleich dem gegebenen Winkel KLM, welches völlig, wie bey der Berechnung des 6ten Sazes erwieſen wird, und, weil ZQ, TG gleichlauffen; ſo iſt auch der Winkel FZQ gleich dem gegebenen Winkel KLM. Um nun noch den Durchſchnitts-Punkt Z zu beſtimmen, fälle man aus dem Punkt B auf die der Lage nach gegebene gerade Linie NC das Perpendikel BF; ſo iſt der Winkel FBQ gleich dem Nebenwinkel von FZQ,

alſo

also gegeben, und man kennt überdiß FB, BQ (leztere Linie nemlich ist $= AP = \frac{AN \cdot LM}{KL}$), folglich ist

$$\text{ctg } BQF = \frac{BQ}{BF} \cdot \text{cosec } FBQ - \text{ctg } FBQ.$$

$$= \frac{AN \cdot LM}{BF \cdot KL} \cdot \text{cosec } FBQ - \text{ctg } FBQ$$

Nun ist in dem Dreyek

$$FQZ : FQ : FZ = \left\{\begin{matrix}\text{sin. } FZQ \\ \text{sin. } KLM\end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix}\text{sin. } FQZ \\ \text{cosin } BQF\end{matrix}\right.$$

und in dem Dreyek

$$FBQ : FB : FQ = \text{sin. } BQF : \text{sin. } \left\{\begin{matrix}FBQ \\ KLM\end{matrix}\right.$$

folglich gleichförmig

$$FB : FZ = \left\{\begin{matrix}\text{sin. } BQF \\ \text{sin. tot.}\end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix}\text{cosin } BQF \\ \text{ctg. } BQF\end{matrix}\right.$$

Mithin ist

$$FZ : FB = \left(\frac{BQ}{BF} \cdot \text{cosec } FBQ - \text{ctg } FBQ\right) : \text{sin. tot.}$$

17. Satz.

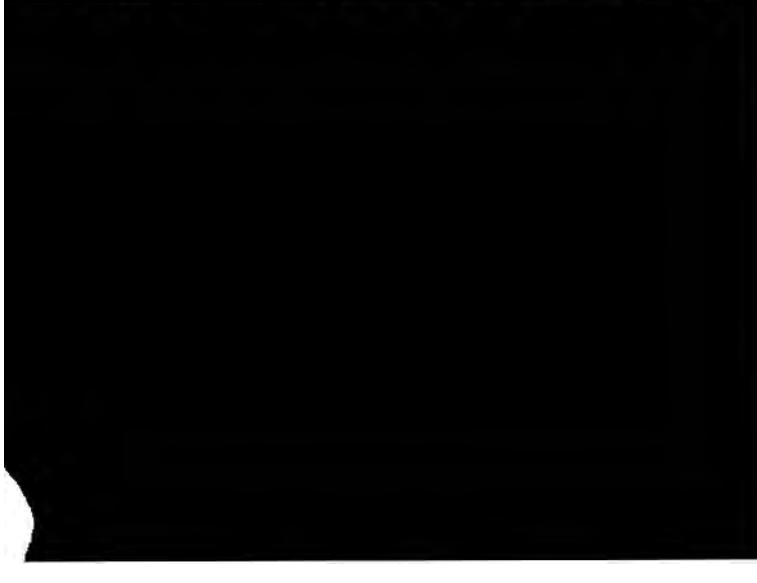
Fig. 26.

Wenn aus zwey gegebenen Punkten A, B zwey gerade Linien AC, BD gezogen werden, welche einen gegebenen Winkel AEB einschlieſſen, und ein gegebenes Verhältniß unter einander haben, und der Endpunkt der einen C den Umfang eines gegebenen Kreiſes, z. B. des Kreiſes, deſſen Mittelpunkt F ist, berührt; so berührt auch der Endpunkt der andern D einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Durch den Punkt A ziehe man AH gleich und gleichlauffend mit BD, so daß die Winkel AEB, CAH

gleich werden, ſo iſt, weil der Winkel AEB gegeben iſt, auch der Winkel CAH gegeben. Weil alſo aus einem gegebenen Punkt A zwey gerade Linien AC, AH gezogen ſind, welche einen gegebenen Winkel einſchlieſſen, und ein gegebenes Verhältniß unter einander haben, und der Endpunkt der einen C einen der Lage nach gegebenen Umkreis berührt; ſo berührt auch der Endpunkt H der andern einen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem 7ten Saz. Ferner, weil aus zwey gegebenen Punkten A, B zwey gerade Parallel-Linien AH, BD gezogen ſind, welche ein gegebenes Verhältniß unter einander haben (denn ſie ſind gleich) und der Endpunkt der einen H einen der Lage nach gegebenen Umkreis berührt; ſo berührt auch der Endpunkt der andern D einen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem 13ten Saz.

Die Kompoſition folgt aus den Kompoſitionen des 7ten und 13ten Sazes ſo: der gegebene Winkel ſeye KLM. und das gegebene Verhältniß, welches die durch A zu ziehende Linie zu der durch B zu ziehenden haben ſoll, ſeye das Verhältniß von KL zu LM. Dieſe Stüke alſo, und den Kreis, deſſen Mittelpunkt F iſt, als gegeben voraus geſezt, denke man ſich nach dem 7ten Saz den Kreis, deſſen Mittelpunkt N iſt, ſo beſchrieben, daß, wenn man irgend eine gerade Linie AC an den



ſuchte Ort ſeyn. Denn man ziehe BT mit AH gleichlauffend, und BT begegne der Linie AC in dem Punkt E; ſo iſt der Winkel BEA gleich dem Winkel CAO, d. i. dem Winkel KLM; und weil BQ, BR mit AN, AP gleich und gleichlauffend, und AH mit BT gleichlauffend iſt; ſo begegnet BT (13. Saz) dem Kreis, deſſen Mittelpunkt Q iſt, in einem Punkt D ſo, daß AH = BD. Nach dem 7ten Saz aber iſt AC: $\left\{\begin{matrix}AH\\BD\end{matrix}\right.$ = KL: LM; folglich der Umfang des Kreiſes, deſſen Mittelpunkt Q iſt, der geſuchte Ort.

Berechnung.

In dem Dreyek ABQ iſt die Seite AB, und der Winkel ABQ = BAN vermittelſt der gegebenen Winkel FAN, FAB gegeben, und BQ findet man leicht $X = AN = \frac{AF \cdot LM}{KL}$. Hieraus läßt ſich das übrige auf ähnliche Art, wie beym 7ten oder 11ten Saz leicht finden. Eben ſo verfährt man bey dem folgenden 18ten und 19ten Saz.

18. Saz.

Fig. 27.

Wenn aus zwey gegebenen Punkten A, B zwey gerade Linien AC, BD gezogen werden, welche einen gegebenen Winkel AEB, und einen gegebenen Raum einſchlieſſen, und der Endpunkt C der einen eine der Lage nach gegebene gerade Linie FG berührt; ſo berührt der Endpunkt D der andern einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Durch den Punkt A ziehe man AH gleich und gleichlauffend mit BD, weil nun der Winkel AEB gegeben ist; so ist auch der ihm gleiche Winkel CAH gegeben. Weil also aus dem gegebenen Punkt A zwey gerade Linien AC, AH gezogen sind, welche einen gegebenen Winkel und einen gegebenen Raum einschliessen, und der Endpunkt der einen C eine der Lage nach gegebene gerade Linie berührt; so berührt der Endpunkt der andern H einen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem 10ten Saz. Und, weil AH, BD gleich und gleichlauffend sind, und H einen der Lage nach gegebenen Umkreis berührt; so berührt auch D einen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem 13ten Saz.

Die Komposition fließt aus den Kompositionen des 10ten und 13ten Sazes. Man fälle nemlich aus A auf FG das Perpendikel AK, und ziehe AL so, daß der Winkel KAL dem gegebenen Winkel, und auch das Rchtk KAL dem gegebenen Raum gleich werde; durch den Punkt B ziehe man BM mit AL gleich und gleichlauffend; so wird der Umfang des über dem Durchmesser BM beschriebenen Kreises der gesuchte Ort seyn. Denn man denke sich einen Kreis über dem Durchmesser AL beschrieben, weil nun dessen Umfang der in dem 10ten Saz beschriebene Ort ist; so begegnet, wenn man irgend eine gerade Linie AC an FG, und dann AN so zieht, daß der Winkel CAN gleich wird dem Winkel KAL, diese Linie AN dem Kreis ALH in einem Punkt H, und es ist das Rchtk CAH gleich dem Rchtk KAL. Nun ziehe man BO mit AH gleichlauffend, und es begegne BO der Linie CA in E; so ist der Winkel BEA gleich dem Winkel CAH, d. i. dem gegebenen Winkel KAL, und, weil AL, BM gleich und gleichlauffend, AH und OB aber gleichlauffend sind; so begegnet nach dem 13ten Saz OB dem Kreis BMD in einem Punkt D, und AH, BD sind gleich. Nun ist gezeigt worden,

daß

daß das Rchtk CAH gleich seye dem Rchtk KAL, also ist auch das Rchtk AC×BD gleich dem Rchtk KAL, d. i. gleich dem gegebenen Raum.

19. Saz.

Wenn aus zwey gegebenen Punkten A, B zwey gerade Linien AC, BD gezogen werden, welche einen gegebenen Winkel AEB und einen gegebenen Raum einschliessen, und der Endpunkt der einen dieser Linien einen der Lage nach gegebenen Umkreis berührt; so wird, wenn der gegebene Punkt, von welchem aus diese Linie gezogen wird, auch auf diesem Umkreis liegt, der Endpunkt der andern eine der Lage nach gegebene gerade Linie berühren. Liegt hingegen dieser gegebene Punkt nicht auf diesem Umkreis; so berührt der Endpunkt der andern einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Fig. 27.

1. Fall. Es liege der gegebene Punkt B auf einem der Lage nach gegebenen Umkreis, z. B. auf dem, dessen Durchmesser BM ist, und der Punkt D berühre eben diesen Umkreis BDM; so berührt der Punkt C eine der Lage nach gegebene gerade Linie. Aus dem Punkt A ziehe man AH gleich und gleichlauffend mit BD, weil nun die Punkte B, A gegeben sind, und D einen der Lage nach gegebenen durch B gehenden Umkreis berührt; so berührt auch H einen der Lage nach gegebenen durch A gehenden Umkreis nach dem 13ten Saz. Es ist aber auch der Winkel HAC gegeben, als welcher gleich ist dem gegebenen Winkel BEA; weil also aus einem gegebenen Punkt A zwey gerade Linien AC, AH gezogen sind, welche einen gegebenen Winkel einschliessen, und das Rchtk CAH gleich ist dem Rchtk AC×BD, und der

Durch den Punkt A ziehe man AH gleich und gleichlauffend mit BD, weil nun der Winkel AEB gegeben ist; so ist auch der ihm gleiche Winkel CAH gegeben. Weil also aus dem gegebenen Punkt A zwey gerade Linien AC, AH gezogen sind, welche einen gegebenen Winkel und einen gegebenen Raum einschliessen, und der Endpunkt der einen C eine der Lage nach gegebene gerade Linie berührt; so berührt der Endpunkt der andern H einen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem 10ten Saz. Und, weil AH, BD gleich und gleichlauffend sind, und H einen der Lage nach gegebenen Umkreis berührt; so berührt auch D einen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem 13ten Saz.

Die Kompositon fließt aus den Kompositionen des 10ten und 13ten Sazes. Man fälle nemlich aus A auf FG das Perpendikel AK, und ziehe AL so, daß der Winkel KAL dem gegebenen Winkel, und auch das Rchtk KAL dem gegebenen Raum gleich werde; durch den Punkt B ziehe man BM mit AL gleich und gleichlauffend; so wird der Umfang des über dem Durchmesser BM beschriebenen Kreises der gesuchte Ort seyn. Denn man denke sich einen Kreis über dem Durchmesser AL beschrieben, weil nun dessen Umfang der in dem 10ten Saz beschriebene Ort ist; so begegnet, wenn man irgend eine gerade Linie AC an FG, und dann AN so zieht, daß der Winkel CAN gleich wird dem Winkel KAL, diese Linie AN dem Kreis ALH in einem Punkt H, und es ist das Rchtk CAH gleich dem Rchtk KAL. Nun ziehe man BO mit AH gleichlauffend, und es begegne BO der Linie CA in E; so ist der Winkel BEA gleich dem Winkel CAH, d. i. dem gegebenen Winkel KAL, und, weil AL, BM gleich und gleichlauffend, AH und OB aber gleichlauffend sind; so begegnet nach dem 13ten Saz OB dem Kreis BMD in einem Punkt D, und AH, BD sind gleich. Nun ist gezeigt worden,

daß

ß das Rchtk CAH gleich ſeye dem Rchtk KAL, alſo
auch das Rchtk AC×BD gleich dem Rchtk KAL, d. i.
ich dem gegebenen Raum.

19. Saz.

Wenn aus zwey gegebenen Punkten A, B zwey ge-
e Linien AC, BD gezogen werden, welche einen gege-
en Winkel AEB und einen gegebenen Raum ein-
ieſſen, und der Endpunkt der einen dieſer Linien ei-
der Lage nach gegebenen Umkreis berührt; ſo wird,
nn der gegebene Punkt, von welchem aus dieſe Linie
ogen wird, auch auf dieſem Umkreis liegt, der
dpunkt der andern eine der Lage nach gegebene gerade
ie berühren. Liegt hingegen dieſer gegebene Punkt
ht auf dieſem Umkreis; ſo berührt der Endpunkt der
dern einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Fig. 27.

1. Fall. Es liege der gegebene Punkt B auf einem
r Lage nach gegebenen Umkreis, z. B. auf dem, deſ-
n Durchmeſſer BM iſt, und der Punkt D berühre eben
eſen Umkreis BDM; ſo berührt der Punkt C eine der
ge nach gegebene gerade Linie. Aus dem Punkt A
ehe man AH gleich und gleichlauffend mit BD, weil
un die Punkte B, A gegeben ſind, und D einen der
ge nach gegebenen durch B gehenden Umkreis berührt;
berührt auch H einen der Lage nach gegebenen durch
gehenden Umkreis nach dem 13ten Saz. Es iſt aber
uch der Winkel HAC gegeben, als welcher gleich iſt
em gegebenen Winkel BEA; weil alſo aus einem gege-
enen Punkt A zwey gerade Linien AC, AH gezogen
nd, welche einen gegebenen Winkel einſchlieſſen, und
s Rchtk CAH gleich iſt dem Rchtk AC×BD, und der

Punkt H eben den Umkreis berührt, auf welchem A liegt; ſo berührt der Punkt C eine der Lage nach gegebene gerade Linie nach dem 1ſten Fall des 11ten Sazes.

Die Kompoſition fließt aus den Kompoſitionen des 1ſten Falls vom 11ten Saz, und des 13ten Sazes. Man ziehe nemlich AL gleich und gleichlauffend mit BM, und AK ſo, daß der Winkel KAL dem gegebenen Winkel, und auch das Rchtk KAL dem gegebenen Raum gleich werde, durch K errichte man auf AK das Perpendikel FKG; ſo wird FG der geſuchte Ort ſeyn. Denn, wenn man an FG irgend eine Line AC, und dann AN ſo zieht, daß der Winkel CAN gleich wird dem Winkel KAL; ſo begegnet AN nach dem 1ſten Fall des 11ten Sazes dem Umfang des Kreiſes, von dem AL ein Durchmeſſer iſt, in einem Punkt H, und es iſt das Rchtk CAH gleich dem Rchtk KAL: man ziehe durch den Punkt B die gerade Linie BO mit AH gleichlauffend, und es begegne BO der Linie AC in E; ſo iſt folglich BO eine gerade Linie, die mit AC einen Winkel BEA gleich dem Winkel HAC, d. i. gleich dem gegebenen Winkel KAL einſchließt. Und nach dem 13ten Saz begegnet BO dem über dem Durchmeſſer BM beſchriebenen Kreis in einem Punkt D, und es iſt BD = AH, mithin das Rchtk AC×BD gleich dem Rchtk CAH, d. i. gleich dem gegebenen Rchtk KAL.

Fig. 28.

2. Fall. Der Punkt C berühre einen der Lage nach gegebenen Umkreis, z. B. den, deſſen durch den gegebenen Punkt A gehender Durchmeſſer FG iſt, der gegebene Punkt A aber liege nicht auf dieſem Umkreiſe; ſo berührt auch der Punkt D einen der Lage nach gegebenen Umkreis. Man ziehe AH gleich und gleichlauf-

fend

send mit BD, weil nun der Winkel AEB gegeben ist; so ist auch der ihm gleiche CAH gegeben; es ist aber auch das Rchtk CAH gegeben; mithin berührt nach dem 2ten Fall des 11ten Sazes der Punkt H einen der Lage nach gegebenen Umkreis. Und, weil aus zwey gegebenen Punkten A, B zwey gerade Linien AH, BD gleich und gleichlauffend gezogen sind, und der Punkt H einen der Lage nach gegebenen Umkreis berührt; so berührt auch der Punkt D einen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem 13ten Saz.

Die Kompositjon fließt aus den Kompositionen des 2ten Falls vom 11ten Saz und des 13ten Sazes. Man ziehe nemlich die gerade Linie AK so, daß der Winkel FAK dem gegebenen Winkel, und auch das Rchtk FAK dem gegebenen Raum gleich wird, man finde KL den Durchmesser des im 2ten Fall des 11ten Sazes beschriebenen Kreises, ziehe aus dem Punkt B eine mit AK gleichlauffende Linie, und nehme darauf BM, BN gleich AK, AL; so wird der Umfang des über dem Durchmesser MN beschriebenen Kreises der gesuchte Ort seyn. Denn man ziehe aus A irgend eine Linie AC an den Umkreis, dessen Durchmesser FG ist, und aus eben diesem Punkt eine andere Linie AO so, daß der Winkel CAO gleich werde dem Winkel FAK; so begegnet nach dem 2ten Fall des 11ten Sazes AO dem über dem Durchmesser KL beschriebenen Kreise in einem Punkte H, und es ist das Rchtk CAH gleich dem Rchtk FAK. Aus dem Punkte B ziehe man BP gleichlauffend mit AO, und es begegne BP der Linie AC in E; so ist folglich BP eine gerade Linie, die mit AC einen Winkel AEB gleich dem Winkel CAH, d. i. gleich dem gegebenen Winkel FAK einschließt. Und, weil BM, BN gleich und gleichlauffend sind mit AK, AL, und BP gleichlauffend mit AH; so begegnet nach dem 13ten Saz BP dem Kreise NMD in einem Punkte D,

Punkt H eben den Umkreis berührt, auf welchem A liegt; ſo berührt der Punkt C eine der Lage nach gegebene gerade Linie nach dem 1ſten Fall des 11ten Sazes.

Die Kompoſition fließt aus den Kompoſitionen des 1ſten Falls vom 11ten Saz, und des 13ten Sazes. Man ziehe nemlich AL gleich und gleichlauffend mit BM, und AK ſo, daß der Winkel KAL dem gegebenen Winkel, und auch das Rchtk KAL dem gegebenen Raum gleich werde, durch K errichte man auf AK das Perpendikel FKG; ſo wird FG der geſuchte Ort ſeyn. Denn, wenn man an FG irgend eine Line AC, und dann AN ſo zieht, daß der Winkel CAN gleich wird dem Winkel KAL; ſo begegnet AN nach dem 1ſten Fall des 11ten Sazes dem Umfang des Kreiſes, von dem AL ein Durchmeſſer iſt, in einem Punkt H, und es iſt das Rchtk CAH gleich dem Rchtk KAL: man ziehe durch den Punkt B die gerade Linie BO mit AH gleichlauffend, und es begegne BO der Linie AC in E; ſo iſt folglich BO eine gerade Linie, die mit AC einen Winkel BEA gleich dem Winkel HAC, d. i. gleich dem gegebenen Winkel KAL einſchließt. Und nach dem 13ten Saz begegnet BO dem über dem Durchmeſſer BM beſchriebenen Kreis in einem Punkt D, und es iſt BD = AH, mithin das Rchtk AC×BD gleich dem Rchtk CAH, d. i. gleich dem gegebenen Rchtk KAL.

Fig. 28.

2. Fall. Der Punkt C berühre einen der Lage nach gegebenen Umkreis, z. B. den, deſſen durch den gegebenen Punkt A gehender Durchmeſſer FG iſt, der gegebene Punkt A aber liege nicht auf dieſem Umkreiſe; ſo berührt auch der Punkt D einen der Lage nach gegebenen Umkreis. Man ziehe AH gleich und gleichlauf-

fend

send mit BD, weil nun der Winkel AEB gegeben ist; so ist auch der ihm gleiche CAH gegeben; es ist aber auch das Rchtk CAH gegeben; mithin berührt nach dem 2ten Fall des 11ten Sazes der Punkt H einen der Lage nach gegebenen Umkreis. Und, weil aus zwey gegebenen Punkten A, B zwey gerade Linien AH, BD gleich und gleichlauffend gezogen sind, und der Punkt H einen der Lage nach gegebenen Umkreis berührt; so berührt auch der Punkt D einen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem 13ten Saz.

Die Komposition fließt aus den Kompositionen des 2ten Falls vom 11ten Saz und des 13ten Sazes. Man ziehe nemlich die gerade Linie AK so, daß der Winkel FAK dem gegebenen Winkel, und auch das Rchtk FAK dem gegebenen Raum gleich wird, man finde KL den Durchmesser des im 2ten Fall des 11ten Sazes beschriebenen Kreises, ziehe aus dem Punkt B eine mit AK gleichlauffende Linie, und nehme darauf BM, BN gleich AK, AL; so wird der Umfang des über dem Durchmesser MN beschriebenen Kreises der gesuchte Ort seyn. Denn man ziehe aus A irgend eine Linie AC an den Umkreis, dessen Durchmesser FG ist, und aus eben diesem Punkt eine andere Linie AO so, daß der Winkel CAO gleich werde dem Winkel FAK; so begegnet nach dem 2ten Fall des 11ten Sazes AO dem über dem Durchmesser KL beschriebenen Kreise in einem Punkte H, und es ist das Rchtk CAH gleich dem Rchtk FAK. Aus dem Punkte B ziehe man BP gleichlauffend mit AO, und es begegne BP der Linie AC in E; so ist folglich BP eine gerade Linie, die mit AC einen Winkel AEB gleich dem Winkel CAH, d. i. gleich dem gegebenen Winkel FAK einschließt. Und, weil BM, BN gleich und gleichlauffend sind mit AK, AL, und BP gleichlauffend mit AH; so begegnet nach dem 13ten Saz BP dem Kreise NMD in einem Punkte D,

und es ist BD gleich AH; folglich das Rchtk AC×BD gleich dem Rchtk CAH, d. i. gleich dem gegebenen Rchtk FAK.

20. Saz.

Fig. 29.

Wenn der eine Endpunkt B einer der Grösse nach gegebenen geraden Linie AB, die mit einer der Lage nach gegebenen geraden Linie CD gleichlauffend ist, eine der Lage nach gegebene gerade Linie CE berührt; so berührt auch der andere Endpunkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Weil die geraden Linien CD, CE der Lage nach gegeben sind; so ist ihr Durchschnitts-Punkt C gegeben (28. D.). Auf der Linie CD nehme man auf der Seite von CE, auf welcher BA liegt, CF gleich BA. Weil nun BA der Grösse nach gegeben ist; so ist es auch CF: es ist aber CF der Lage nach, und überdiß auch der Punkt C gegeben; folglich ist der Punkt F gegeben (30. D.). Man ziehe AF, und, weil AB, FC gleich und gleichlauffend sind; so ist auch FA mit CB gleichlauffend. Weil also durch einen gegebenen Punkt F die Linie FA mit der der Lage nach gegebenen CE gleichlauffend gezogen ist; so ist FA der Lage nach gegeben (31. D.); also berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Die Komposition ergiebt sich leicht. Auf der geraden Linie CD nehme man CF gleich der der Grösse nach gegebenen geraden Linie, und durch den Punkt F ziehe man FA mit CE gleichlauffend; so wird FA der gesuchte Ort seyn. Denn, wenn man aus irgend einem Punkt A auf derselben eine Linie AB mit CD gleichlauffend zieht; so ist AB gleich CF, d. i. gleich der gegebenen geraden Linie nach 34, 1. E.

21. Saz.

21. Saz.

Dieſen ſezte Fermat zum vorhergehenden hinzu.

Fig. 30.

Wenn der eine Endpunkt A einer der Gröſſe nach gegebenen geraden Linie AB, die mit einer der Lage nach gegebenen CD gleichlauffend iſt, einen der Lage nach gegebenen Umkreis, z. B. den, deſſen Mittelpunkt E iſt, berührt; ſo berührt auch der andere Endpunkt B einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Aus dem Mittelpunkt E ziehe man, nach welcher Seite man will, die gerade Linie EF mit AB gleich und gleichlauffend, und überdiß AE, BF; weil nun AB der Gröſſe nach gegeben iſt; ſo iſt auch EF der Gröſſe nach gegeben; und, weil AB mit der der Lage nach gegebenen geraden Linie CD gleichlauffend iſt; ſo iſt auch EF mit CD gleichlauffend. Es iſt aber der Punkt E gegeben; folglich iſt EF der Lage nach gegeben (31. D.), aber auch der Gröſſe nach; alſo iſt der Punkt F gegeben (30. D.). Und, weil AE der Gröſſe nach gegeben iſt; ſo iſt die ihr gleiche (33, 1. E.) Linie BF der Gröſſe nach gegeben. Weil endlich der Punkt F gegeben iſt; ſo berührt der Punkt B einen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem 1ſten Saz.

Kompoſition.

Man ziehe durch den Mittelpunkt E des der Lage nach gegebenen Kreiſes eine mit CD gleichlauffende Linie, und nehme auf derſelben, auf welcher Seite von E man will, die gerade Linie EF gleich der der Gröſſe nach gegebenen Linie. Es begegne EF dem gegebenen Umkreis in G, und man nehme FH = EG, und beſchreibe aus dem Mittelpunkt F mit dem Halbmeſſer FH einen

Kreis; so wird dessen Umfang der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man aus irgend einem Punkt A auf dem Umkreis, dessen Mittelpunkt E ist, eine gerade mit CD gleichlaufsende Linie zieht; so wird diese dem Kreis, dessen Mittelpunkt F ist, in einem Punkt B begegnen, wie leicht erhellet; und es wird AB gleich seyn EF, wenn man nemlich nur die Punkte A, B auf einerley Seiten der Kreise annimmt. Denn man ziehe AE, BF, und fälle auf AB die Perpendikel EK, FL; so sind diese unter einander gleich (34, 1. E.). Es sind aber auch AE, BF gleich; also sind in den Dreyecken AEK, BFL AK, BL gleich (47, 1. E.); folglich ist AB = KL, d. i. = EF d. i. gleich der der Grösse nach gegebenen geraden Linie.

22. Saz.

Wenn aus einem Punkt A an zwey der Lage nach gegebene Parallelen BC, DE zwey gerade Linien AF, AG entweder auf der nemlichen geraden Linie, oder unter gegebenen Winkeln gezogen werden, und in beeden Fällen AF, AG ein gegebenes Verhältniß unter einander haben; so berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Fig. 31. a. b.

1. Fall. Wenn AF, AG auf der nemlichen geraden Linie liegen. Aus dem 40sten Saz der Dat. erhellt, daß eine durch den Punkt A gezogene mit den beyden Linien BC, DE gleichlauffende Linie der Lage nach gegeben seye; also berührt der Punkt A diese der Lage nach gegebene gerade Linie. Die

Komposition ergiebt sich aus eben diesem Saz der Dat. Man ziehe nemlich aus irgend einem Punkt H auf der geraden Linie BC an DE irgend eine gerade Linie HK,

HK, und, wenn der Punkt A zwiſchen den Parallelen BC, DE ſolle gefunden werden; ſo ſchneide man HK in L ſo, daß HL zu LK das gegebene Verhältniß habe, welches die an BC zu ziehende Linie zu der an DE zu ziehenden haben ſoll. Soll aber der Punkt A auſſerhalb der Parallelen, z. B. auf der Seite von BC liegen; ſo verlängere man KH bis L, ſo, daß HL zu LK das vorhin geſagte gegebene Verhältniß habe. Durch den Punkt L ziehe man eine gerade mit BC, DE gleichlaufende Linie; ſo wird dieſe der geſuchte Ort ſeyn, d. i. wenn man von irgend einem Punkt A auf derſelben eine gerade Linie zieht, die den Parallelen BC, DE in F, G begegne; ſo wird AF zu AG ſich verhalten, wie HL zu LK. Denn man ziehe KA, und es begegne KA der Linie BC in M; ſo iſt wegen der Parallelen AF: AG = (AM: AK =) HL: LK, d. i. in dem gegebenen Verhältniß.

Man ſieht leicht, daß in dem Fall, wenn der Punkt A auſſerhalb der Parallelen ſollte gefunden werden, das Verhältniß, welches AG, die an die entferntere Parallele zu ziehende Linie zu AF, der an die nähere Parallele zu ziehenden Linie hat, das Verhältniß des gröſſern zum kleinern ſeyn müſſe.

2. Fall. Wenn AF, AG unter den gegebenen Winkeln AFC, AGE gezogen werden, und zwar

Fig. 31. c.

a) wenn der Punkt A zwiſchen den Parallelen liegen ſoll.

Es begegne AG der Linie BC in H, und, weil der Winkel AGE gegeben iſt; ſo iſt auch der ihm gleiche AHF gegeben; es iſt aber auch der Winkel AFH, mithin das Dreyek AHF der Gattung nach gegeben (43. D.); alſo iſt das Verhältniß von AH zu AF gegeben,

nach

nach der Vorausſezung aber iſt das Verhältniß von AF zu AG gegeben; mithin iſt (9. D.) das Verhältniß von AH zu AG gegeben; alſo iſt die gerade Linie, die durch A mit BC gleichlauffend gezogen wird, der Lage nach gegeben (40. D.); folglich berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Kompoſition.

Aus irgend einem Punkt H auf der geraden Linie BC ziehe man an die andere DE die gerade Linien HG, HK ſo, daß der Winkel HGE gleich werde dem gegebenen Winkel, den die an DE zu ziehende Linie mit DE machen ſoll, und der Winkel HKD gleich werde dem andern gegebenen Winkel. Es ſeye das Verhältniß, welches die an DE zu ziehende gerade Linie zu der an BC zu ziehenden haben ſoll, gleich dem Verhältniß von LH zu HK, und man ſchneide GH in A ſo, daß GA ſich zu AH verhalte, wie LH zu HG, durch A ziehe man AM mit BC gleichlauffend; ſo wird AM der geſuchte Ort ſeyn, d. i. wenn man aus irgend einem Punkt A auf derſelben die Linien AF, AG an die Parallelen unter den gegebenen Winkeln zieht; ſo wird AG ſich zu AF verhalten, wie LH zu HK. Denn nach der Verzeichnung iſt

AG : AH = LH : HG. Es iſt aber auch

AH : AF = HG : HK. Folglich gleichförmig (ex aequo)

AG : AF = LH : HK, d. i. in dem gegebenen Verhältniß.

b) Wenn der Punkt A auſſerhalb der Parallelen liegt.

Analyſe und Kompoſition bleiben wie bey dem 2ten Fall a, nur daß man den Punkt A auf der Verlängerung von GH nehmen muß. Auch ſieht man leicht, daß,

daß, wie schon bey dem 1sten Fall erinnert worden, das Verhältniß, welches die an die entferntere Parallele zu ziehende Linie zu der an die nähere Parallele zu ziehenden hat, das Verhältniß des Grössern zum Kleinern seye.

23. Satz.

Fig. 32.

Wenn aus einem Punkt A an zwey der Lage nach gegebene gerade Linien BC, DE, die einander in einem Punkt F begegnen, zwey gerade Linien AG, AH, die ein gegebenes Verhältniß unter einander haben, unter den gegebenen Winkeln AGF, AHF gezogen werden, so berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Fig. 32. a.

1. Fall. Wenn die Linien AG, AH mit den der Lage nach gegebenen geraden Linien DE, BC gleichlaufend sind.

In diesem Fall ist die Figur AGFH ein Parallelogramm, und, weil das Verhältniß von AG zu AH, d. i. von AG zu GF nebst dem Winkel AGF gegeben ist; so ist das Dreyek AGF der Gattung nach gegeben (44. D.), also ist AF der Lage nach gegeben (32. D.).

Die Komposition ergiebt sich leicht. Man ziehe nemlich aus irgend einem Punkt K auf der Linie BC eine mit DE gleichlauffende Linie, und nehme auf derselben KM so, daß KM zu KF in dem gegebenen Verhältniß seye. Man ziehe MF, und diß wird der gesuchte Ort seyn. Denn man nehme auf der Linie MF irgend einen Punkt A, und ziehe AG, AH mit FE, FC gleichlaufend; so ist AG: $\left\{\begin{matrix}AH\\FG\end{matrix}\right.$ = KM: KF, d. i. in dem gegebenen

und, weil das Verhältniß von AG zu AH, und auch das von AH zu AK gegeben ist; so ist auch das Verhältniß von AG zu AK gegeben (9. D.), also berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie nach dem 2ten Fall dieses Sazes.

Kompoſition.

Aus irgend einem Punkt L auf der Linie FC ziehe man an die andere der Lage nach gegebene Linie DE die gerade Linien LM, LN, welche mit den Linien BC, DE die gegebenen Winkel einſchlieſſen, welche die aus dem Punkt A an BC, DE zu gleichende Linien mit dieſen einſchlieſſen ſollen; und auf der Linie LM, welche mit BC einen Winkel macht gleich dem, den die aus A an BC zu ziehende Linie mit BC machen ſoll, beſtimme man den Punkt O ſo, daß OL zu LN das gegebene Verhältniß habe, welches die mit LM gleichlauffende durch den Punkt A gehende Linie zu der andern aus dem Punkt A gezogenen Linie haben ſoll. Und nach dem 2ten Fall dieſes Sazes ziehe man innerhalb desjenigen von den Winkeln EFC, EFB, innerhalb deſſen der Punkt A fallen ſoll, die gerade Linie FP ſo, daß ſie ein Ort ſeye von der Beſchaffenheit, daß, wenn man aus irgend einem Punkt A auf derſelben die gerade Linie GK mit LM gleichlauffend zieht, GA ſich zu AK verhalte, wie OL zu LM; ſo wird FP der geſuchte Ort ſeyn. Denn nach der Verzeichnung iſt

GA: AK = OL: LM

Es iſt aber AK: AH = LM: LN

folglich gleichförmig (ex aequo) GA: AH = OL: LN, d. i. in dem gegebenen Verhältniß.

Wenn in dem Fall, da die gerade Linie LM innerhalb des Nebenwinkels von EFC fällt, das gegebene Verhältniß gleich iſt dem Verhältniß von LM zu LN; ſo

ſo ſieht man leicht, daß die gerade mit LM gleichlauffende Linie FP der geſuchte Ort ſeye. Denn, wenn man aus irgend einem Punkt A auf derſelben eine gerade Linie AH mit LN gleichlauffend zieht; ſo iſt $\left.\begin{matrix} AF \\ AG \end{matrix}\right\} : AH = LM : LN.$

Zuſaz. Der Ort geht immer durch den Durchſchnitts-Punkt F der beyden der Lage nach gegebenen Linien BC, DE.

Berechnung.

Für alle Fälle iſt

$AH : AF = \text{ſin. EFA} : \text{ſin. AHF}$ und

$AF : AG = \text{ſin. AGF} : \text{ſin. (CFE} - \text{EFA)}$ folglich

$AH : AG = \text{ſin. EFA ſin. AGF} : \text{ſin. AHF. ſin. (CFE} - \text{EFA)}$

$= \text{ſin. AGF} : \text{ſin. AHF. (ſin. CFE. ctg EFA} - \text{coſin CFE)}$

Alſo iſt $\text{ctg EFA} = \frac{AG \text{. ſin. AGF}}{AH \text{. ſin. AHF. ſin. CFE}} + \text{ctg CFE.}$

24. Saz.

Fig. 33.

Wenn aus einem Punkt A an zwey der Lage nach gegebene Parallel-Linien BC, DE zwey gerade Linien AH, AG unter gegebenen Winkeln gezogen werden, und wenn HK die Summe der einen AH, und einer dritten Linien AK, zu welcher die andere AG ein gegebenes Verhältniß hat, gegeben iſt; oder, wenn entweder der Ueberſchuß der einen AH über eine gegebene Linie HK, oder die Summe der einen und einer gegebenen Linie zur andern AG ein gegebenes Verhältniß hat: ſo berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Fig. 33. a. b. c. d.

I. Fall. Wenn HK die Summe der einen aus A gezogenen Linie AH (welche wir die erste heissen wollen) und einer dritten Linie AK, zu welcher die andere aus A gezogene Linie AG (diese heisse die zweyte) ein gegebenes Verhältniß hat, gegeben ist. Man verlängere AH nach der Seite von A hin, und schneide auf dieser Verlängerung die dritte Linie AK ab. Weil also an eine der Lage nach gegebene gerade Linie BC die der Grösse nach gegebene Linie HK unter einem gegebenen Winkel gezogen ist; so berührt der Punkt K eine der Lage nach gegebene mit BC gleichlauffende Linie nach dem 20sten Saz. Es seye diß die Linie LM; so sind aus dem Punkt A an zwey der Lage nach gegebene Parallel-Linien DE, LM zwey gerade Linien AG, AK, die ein gegebenes Verhältniß unter einander haben, unter gegebenen Winkeln gezogen; mithin berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie nach dem 22sten Saz. Soll nun (Fig. 33. a.)

1. der Punkt A ausserhalb der der Lage nach gegebenen Parallelen auf der Seite von BC liegen; so liegt auch LM ausserhalb dieser Parallelen auf eben der Seite; und, weil der Punkt A zwischen den Parallelen LM, DE liegt; so wird sein Ort gefunden nach 22. Saz 2. Fall a. Es kann aber das gegebene Verhältniß zwischen AG und AK so beschaffen seyn, daß der Punkt A zwischen die Parallelen BC, DE fallen müßte, und diß würde der vorigen Voraussezung widersprechen, also der Ort unmöglich seyn. Man muß deßwegen die Bestimmung finden, unter welcher der Punkt A immer ausserhalb der Parallelen BC, DE, und zwar nahmentlich zwischen BC, LM fallen wird. Es begegne demnach GA den Linien BC, LM in F, N, und man ziehe aus dem Punkt F an LM die Linie FO mit HK gleichlaufend.

send. Weil nun GA grösser seyn muß, als GF; so muß *) GA : AN ▷ GF : FN seyn; nun ist AN : AK = FN : FO; folglich muß gleichförmig GA : AK ▷ GF : FO seyn, d. i. das gegebene Verhältniß, welches die zweyte gerade Linie AG zu der dritten AK hat, welche mit der ersten AH eine gegebene Summe ausmacht, muß grösser seyn, als das Verhältniß, welches das von der zweyten Linie zwischen den Parallelen BC, DE abgeschnittene Stük GF zu FO oder HK der der Grösse nach gegebenen Linie hat. Wenn also der Punkt A ausserhalb der Parallelen auf der Seite der Linie BC liegt, an welche nemlich die erste Linie AH gezogen werden soll; so ist folgendes die

Komposition.

Aus irgend einem Punkt F auf der Linie BC ziehe man die gerade Linie FO gleichlauffend mit der Linie, die aus A an eben diese Linie BC gezogen werden soll, und nehme ausserhalb der Parallelen FO gleich der gegebenen geraden Linie; durch O ziehe man LM mit BC gleichlauffend, an DE aber ziehe man FG gleichlauffend mit der Linie, die aus A an DE gezogen werden soll. Und nach dem 22. Saz 2. Fall a. ziehe man die gerade Linie AQ zwischen den Parallelen DE, LM; so, daß AQ ein Ort sey von der Beschaffenheit, daß, wenn man aus irgend einem Punkt A auf derselben an die Linien DE, LM die Linien AG, AK mit FG, FO gleichlauffend zieht, das Verhältniß von AG zu AK dem gegebenen Verhältniß gleich seye, welches, wie gezeigt worden, grösser seyn muß, als das Verhältniß von GF zu FO;

*) Weil GA ▷ GF, und AN ◁ FN; so ist GA : GF ▷ AN : FN (7. Def. 5. E.), mithin GA : AN ▷ GF : FN (27, 5. E.) A. d. U.

ſo wird AQ der geſuchte Ort ſeyn. Denn, weil AG: AK > GF: FO, und AK: AN = FO: FN; ſo iſt gleichförmig AG: AN > GF: FN; alſo iſt GA > GF, *) und der Punkt A fällt zwiſchen BC und LM. Nach der Verzeichnung aber iſt GA zu AK in dem gegebenen Verhältniß. Wenn man alſo die Linie AK verlängert, bis ſie BC in dem Punkt H ſchneidet; ſo iſt die Summe von AH und der Linie AK, zu welcher AG das gegebene Verhältniß hat, gleich der gegebenen geraden Linie FO.

Fig. 33. b.

2. Wenn der Punkt A zwiſchen den Parallelen BC, DE liegen ſoll; ſo wird LM auf eben die Seite von BC fallen, auf welcher DE liegt, und zwar entweder zwiſchen die Parallelen BC, DE, oder auf DE ſelbſt, oder auſſerhalb der Parallelen BC, DE. Fällt LM zwiſchen die Parallelen BC, DE; ſo iſt GA < GF, folglich **) GA: AN > GF: FN, und hieraus wird völlig, wie vorhin geſchloſſen, daß das gegebene Verhältniß von AG zu AK gröſſer ſeyn müſſe, als das Verhältniß von GF zu FO, oder HK, und man findet AQ nach dem 22ſten Saz 2. Fall b. Die Kompoſition bleibt übrigens völlig, wie die vorhergehende, nur daß man FO nach der Seite von DE ziehen muß. Fällt LM (Fig. 33. c) auſſerhalb der Parallelen BC, DE; ſo

*) Weil AG: AN > GF: FN; ſo iſt AN: AG < FN: GF (26, 5. E.) und AN + AG: AG < FN + GF: GF (28, 5. E.). Nun iſt AN + AG = FN + GF, mithin AG > GF (10, 5. E.). A. d. U.

**) Weil AF = GF — GA = FN — AN, und AG > AN; ſo iſt AG: GF — AG > AN: FN — AN (8, 5. E.) folglich AG: GF > AN: FN (28, 5. E.) oder AG: AN > GF: FN (27, 5. E.). A. d. U.

ſo iſt AG kleiner als GF, und auch kleiner als AN, folglich iſt *) AG : AN < GF : FN, und hieraus wird geſchloſſen, daß das gegebene Verhältniß von AG zu AK kleiner ſeyn müſſe, als das Verhältniß von GF zu FO oder HK, und man findet AQ nach dem 22. Saz 2. Fall b. Die Kompoſition bleibt übrigens völlig wie vorhin, nur muß wieder FO gegen DE hin gezogen werden.

Fällt LM mit DE zuſammen; ſo iſt von ſelbſt klar, daß das Verhältniß von GA zu AK einerley ſeye mit dem Verhältniß von GF zu FO.

Fig. 33. d.

3. Wenn der Punkt A auſſerhalb der gegebenen Parallelen auf der Seite von DE liegen ſoll; ſo iſt keine Beſtimmung nöthig, als daß die gegebene gerade Linie HK gröſſer ſeyn muß, als das Stük davon, das zwiſchen den Parallelen BC, DE abgeſchnitten wird, und die Kompoſition geſchieht nach 22. Saz 2. Fall a.

Fig. 33. e. f. g.

II. Fall. Wenn der Ueberſchuß der einen aus A gezogenen Linie AH über eine gegebene Linie HK zur andern AG ein gegebenes Verhältniß hat. Von AH nehme man die gegebene gerade Linie HK hinweg; ſo iſt das Verhältniß des übrigen Stüks AK zu AG gegeben; und, weil an eine der Lage nach gegebene gerade Linie DE die der Gröſſe nach gegebene gerade Linie HK unter einem gegebenen Winkel KHE gezogen iſt; ſo berührt

*) Weil AF = GF — GA = FN — AN, und AG < AN; ſo iſt FN — AN : AN < GF — AG : AG (8. 5. E.); folglich FN : AN < GF : AG (28. 5. E.) oder FN : GF < AN : AG (27. 5. E.). A. d. U.

rührt der Punkt K eine gerade mit DE gleichlauffende Linie (20. Saz). Diese Linie seye LM; weil nun aus einem Punkt A an die der Lage nach gegebene Parallelen LM, BC zwey gerade Linien AK, AG, die ein gegebenes Verhältniß unter einander haben, unter gegebenen Winkeln gezogen sind; so berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie nach dem 22sten Saz. Soll nun (Fig. 33. e.) der Punkt A ausserhalb der Parallelen BC, DE auf die Seite von BC fallen; so kann die gerade Linie LM entweder zwischen den Parallelen, oder ausserhalb derselben auf der Seite von BC liegen, je nachdem die gegebene gerade Linie HK kleiner oder gröſser ist, als das Stük HF, das zwischen den Parallelen DE und BC enthalten ist. Im ersten Fall muß das gegebene Verhältniß, welches AK zu AG hat, gröſser seyn, als das Verhältniß von AF zu AG; im andern muß es kleiner seyn, als dieses Verhältniß (22. Saz 2. Fall b.). Soll aber der Punkt A (Fig. 33. f.) zwischen die Parallelen BC, DE fallen; so muß er auch zwischen BC und LM fallen, und es ist in diesem Fall keine Bestimmung nöthig, als daß die gegebene Linie HK kleiner seyn muß als HF. Soll endlich der Punkt A (Fig. 33. g.) ausserhalb der Parallelen auf die Seite von DE fallen; so muß er auch ausserhalb der Linien BC, LM liegen; mithin muß das gegebene Verhältniß zwischen AK und AG kleiner seyn als das Verhältniß zwischen AF und AG (22. Saz 2. Fall b.).

Die Komposition wird vermittelst des 22sten Sazes gemacht. Man ziehe nemlich aus irgend einem Punkt H auf der Linie DE eine gerade Linie HF, so, daß der Winkel FHE gleich seye dem gegebenen Winkel, den die aus A an DE zu ziehende Linie mit DE machen soll; von HF nehme man die gegebene gerade Linie HK hinweg, und ziehe LKM mit DE gleichlaufend; nun ziehe man die gerade Linie AQ so, daß sie

ein

ein Ort sey von der Beschaffenheit, daß, wenn man aus irgend einem Punkt A auf demselben die gerade Linien AK, AG an LM, BC unter den gegebenen Winkeln zieht, AK und AG das gegebene Verhältniß unter einander haben; so wird AQ der gesuchte Ort seyn. Denn es hat AK zu AG das gegebene Verhältniß, und HK ist gegeben; also hat der Ueberschuß von AH über die gegebene Linie HK zu AG das gegebene Verhältniß.

III. Fall. Hätte die Summe der einen von den gezogenen Linien und einer gegebenen Linie zur andern ein gegebenes Verhältniß; so würde der Ort auf ähnliche Art gefunden werden, oder es kann auch dieser Fall auf den IIten zurük gebracht werden. Denn, wenn die Summe einer gewissen Grösse und einer gegebenen Grösse zu einer andern Grösse ein gegebenes Verhältniß hat; so hat umgekehrt der Ueberschuß dieser lezten Grösse über eine gegebene Grösse zu der ersten ein gegebenes Verhältniß. (14. D.)

25. Satz.

Fig. 34.

Wenn aus einem Punkt A an zwey der Lage nach gegebene gerade Linien BC, DE, die einander in F begegnen, zwey gerade Linien AH, AG unter gegebenen Winkeln gezogen werden, und HK die Summe der einen AH, und einer dritten Linie AK, zu welcher die andere AG ein gegebenes Verhältniß hat, gegeben ist; oder entweder der Ueberschuß der einen AH über eine gegebene Linie HK, oder die Summe der einen, und einer gegebenen Linie zur andern AG ein gegebenes Verhältniß hat: so berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Fig. 34. a.

I. Fall. Wenn HK die Summe der einen aus A gezogenen Linie AH, und einer dritten AK, zu welcher die andere AG ein gegebenes Verhältniß hat, gegeben iſt.

Weil die der Gröſſe nach gegebene Linie HK eine der Lage nach gegebene Linie BC unter einem gegebenen Winkel FHK ſchneidet; ſo berührt der Punkt K eine der Lage nach gegebene mit BC gleichlauffende Linie (20. Saz). Es ſeye diß LK, und LK begegne der Linie DE in M. Weil nun aus einem Punkt A an zwey der Lage nach gegebenen Linien DE, LK, die einander in M begegnen, zwey gerade Linien AG, AK, die ein gegebenes Verhältniß unter einander haben, unter gegebenen Winkeln gezogen worden; ſo berührt der Punkt A eine gerade der Lage nach gegebene durch M gehende Linie (23. Saz und Zuſ.)

Kompoſition.

Man ziehe aus irgend einem Punkt H auf der gegebenen Linie BC die Linie HK gleich der gegebenen geraden Linie unter dem gegebenen Winkel, den die aus A an BC zu ziehende Linie mit dieſer einſchlieſſen ſoll, und durch K ziehe man LMK mit BC gleichlauffend. Vermittelſt des 23ſten Sazes ziehe man innerhalb des Winkels FML, oder innerhalb ſeines Nebenwinkels, je nachdem nemlich der Punkt A entweder innerhalb des Winkels EFB, oder innerhalb des Winkels EFC liegen ſoll, die Linie MN ſo, daß ſie ein Ort ſey von der Beſchaffenheit, daß, wenn man aus irgend einem Punkt A auf demſelben an die Linien FE, LM die Linien AG, AK unter den gegebenen Winkeln zieht, AG, AK das gegebene Verhältniß unter einander haben; ſo wird das zwiſchen den Parallelen abgeſchnittene

tene Stük MN der geſuchte Ort ſeyn. Denn, wenn man aus irgend einem Punkt A auf dieſem Stük die Linien AH, AG an BC, DE unter den gegebenen Winkeln zieht, und AH verlängert, bis ſie der Linie LM in K begegnet; ſo hat AG zu AK das gegebene Verhältniß; es iſt aber die Summe von AH und AK gleich der gegebenen Linie AK.

Fig. 34. b. c.

II. Fall. Wenn der Ueberſchuß der einen aus A gezogenen Linie AH über eine gegebene Linie HK, oder die Summe der einen AH und einer gegebenen Linie HK zur andern AG ein gegebenes Verhältniß hat.

Man nehme die gegebene Linie HK hinweg, oder ſeze ſie hinzu; ſo hat der Reſt, oder die Summe AK zu AG ein gegebenes Verhältniß, und es wird, wie bey dem vorhergehenden Saz bewieſen werden, daß der Punkt K eine der Lage nach gegebene mit BC gleichlaufende Linie LM berühre; und, weil das Verhältniß der Linien AK, AG gegeben iſt, welche aus einem Punkt A an die der Lage nach gegebene gerade Linien LM, DE unter gegebenen Winkeln gezogen werden, ſo berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie MN, die vermittelſt des 23ſten Sazes gefunden wird. Aus irgend einem Punkt A auf derſelben ziehe man an BC, DE unter den gegebenen Winkeln die gerade Linien AH, AG, und AH begegne der Linie LM in K. Weil nun AK nach der Verzeichnung zu AG das gegebene Verhältniß hat, und HK gegeben iſt; ſo hat der Ueberſchuß von AH über eine gegebene Gröſſe HK, oder die Summe von AH und HK zu der andern AG das gegebene Verhältniß.

In dem Fall, wenn AH, AG mit den der Lage nach gegebenen geraden Linien DE, BC gleichlauffen, kann der Saz noch anders ſo ausgedrukt werden:

Wenn aus einem Punkt A an eine der Lage nach gegebene gerade Linie BC, auf welcher der Punkt F gegeben ist, die Linie AH unter einem gegebenen Winkel gezogen wird, und die Summe einer der Linien AH, HF und einer dritten, zu welcher die andere ein gegebenes Verhältniß hat, gegeben ist; oder, wenn entweder der Ueberschuß der einen der Linien AH, HF über eine gegebene Linie, oder die Summe der einen, und einer gegebenen Linie zu der andern ein gegebenes Verhältniß hat: so berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

1. Zus. Wenn (Fig. 34. a.) aus einem Punkt A an zwey der Lage nach gegebene gerade Linien BC, DE die gerade Linien AG, AH unter gegebenen Winkeln gezogen werden, und die Summe der Rechteke, die zwischen diesen Linien, und zwey andern gegebenen Linien a, b enthalten sind, gegeben ist; so berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie. Denn es seye die Summe der Rechteke AG × a, und AH × b gleich dem Rechtek HK × b, wenn man nemlich HA gehörig verlängert bis K; so ist also das Rchtk HK × b gegeben, und, weil b gegeben ist, so ist HK der Grösse nach gegeben (61. D.). Man nehme das gemeinschaftliche Rchtk AH × b hinweg; so ist der Rest auf der einen Seite, d. i. das Rchtk AG × a gleich dem Rest auf der andern Seite, d. i. dem Rchtk AK × b; folglich ist AG : AK = b : a, d. i. in einem gegebenen Verhältniß. Weil also aus einem Punkt A an zwey der Lage nach gegebene Linien BC, DE zwey gerade Linien AH, AG unter gegebenen Winkeln gezogen worden, und HK die Summe der einen, und einer dritten AK, zu welcher die andere ein gegebenes Verhältniß hat, gegeben ist; so berührt der Punkt A nach dem gegenwärtigen, oder,

wenn

wenn BC, DE gleichlauffen, nach dem vorhergehenden Saz eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

2. Zuſ. Auch, wenn (Fig. 34. b.) das eine der gegebenen Rechteke, z. B. AH×b um einen gegebenen Raum gröſſer iſt, als das andere AG×a; ſo berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie. Es ſeye der gegebene Raum gleich dem Rchtk HK×b, wo nemlich HK von HA hinweg genommen wird; ſo iſt mithin HK gegeben. Und, weil nach der Vorausſezung das Rchtk AH×b gleich iſt der Summe der Rchteke AG×a, und HK×b; ſo iſt, das gemeinſchaftliche Rchtk HK×b hinweg genommen, das Rchtk AK×b gleich dem Rchtk AG×a; folglich iſt das Verhältniß von AK zu AG gegeben, und, weil auch KH gegeben iſt; ſo hat der Ueberſchuß von AH über eine gegebene Gröſſe HK zu AG ein gegebenes Verhältniß; mithin berührt der Punkt A nach dem gegenwärtigen, oder, wenn BC, DE gleichlauffen, nach dem vorhergehenden Saz eine der Lage nach gegebene gerade Linie. Die Kompoſition dieſer Zuſäze iſt, wie von ſelbſt erhellet, einerley mit der Kompoſition des gegenwärtigen, oder des vorhergehenden Sazes.

Berechnung.

Für beyde Fälle iſt ſin. EFC : ſin. KHB = HK : MF

und nach dem 23ſten Saz

$$\text{ctg EMA} = \frac{\text{AK. ſin. AHB}}{\text{AG. ſin. AGF. ſin. GMK}} + \text{ctg GMK.}$$

Der Winkel GMK aber iſt entweder dem Winkel CFE, oder ſeinem Nebenwinkel gleich.

26. Saz.

26. Satz.

Fig. 35.

Wenn drey gerade Parallel-Linien BC, DE, FG der Lage nach gegeben ſind, und aus einem Punkt A an dieſelbige drey gerade Linien AH, AK, AL unter gegebenen Winkeln AHß, AKD, ALF gezogen werden, und wenn die Summe der beyden Rechteke, wovon das eine zwiſchen einer der aus A gezogenen Linien AK, und einer gegebenen Linie Mβ, das andere zwiſchen einer andern aus A gezogenen Linie AL, und einer andern gegebenen Linie Nγ enthalten iſt, gleich iſt dem Rechtek, das zwiſchen der dritten aus A gezogenen Linie AH, und einer dritten gegebenen Linie Hα enthalten iſt: ſo berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Fig. 35. a.

1. Fall. Wenn die Linie AH, welche nebſt einer gegebenen Linie Hα das Rechtek enthält, welches der Summe der beyden übrigen Rechteke gleich iſt, an eine der äuſſern Parallel-Linien BC gezogen iſt, die wir die erſte äuſſere, ſo wie die andere FG die zweyte äuſſere Parallele nennen wollen, und der Punkt A auſſerhalb der Parallelen auf der Seite der erſten äuſſern BC liegt.

Die Linie AH begegne den Parallelen DE, FG in den Punkten M, N, und weil das Dreyek AKM der Gattung nach gegeben iſt; ſo iſt das Verhältniß von AM zu AK gegeben; in eben dieſem Verhältniß nun ſeye Mβ zu αδ; da nun Mβ gegeben iſt; ſo iſt auch αδ gegeben, und das Rechtek AM × αδ iſt gleich dem Rechtek AK × Mβ. Eben ſo, weil das Verhältniß von AN zu AL gegeben iſt, iſt, wenn man Nγ zu δε in eben dieſem

ſem Verhältniß nimmt, δε gegeben, und das Rechtek AN×δε gleich dem Rechtek AL×Nγ. Nach der Vorausſezung aber iſt das Rechtek AH×Hα gleich der Summe der Rechteke AK×Mβ, und AL×Nγ, folglich iſt das Rechtek AHα gleich [der Summe der Rechteke AM×αδ und AH×δε, d. i. (1, 2. E.) gleich der Summe der Rechteke AH×αδ, AM×αδ, AH×δε, HN×δε, d. i. (1, 2. E.) gleich] der Summe der Rechteke AH×αε, HM×αδ, HN×δε, und, das gemeinſchaftliche Rechtek AH×αε hinweg genommen, bleibt noch das Rechtek AHε gleich der Summe der Rechteke HM×αδ, und HN×δε; es ſind aber die Linien HM, HN der Gröſſe nach (35. D.) und eben ſo auch die Linien αδ, δε gegeben; mithin ſind die Rechteke HM×αδ, HN×δε, und das der Summe dieſer beeden gleiche Rechtek AHε gegeben. Und, weil die Linie Hε der Gröſſe nach gegeben iſt, ſo iſt alſo auch AH der Gröſſe nach gegeben. Nun iſt die Lage von BC und der Winkel AHB gegeben; mithin berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie nach dem 20ſten Saz.

Kompoſition.

Aus irgend einem Punkt H auf der geraden Linie BC ziehe man an FG die gerade Linien HN, HR, HS, und zwar HN unter dem Winkel HNF, der gleich iſt dem gegebenen Winkel, den die aus dem Punkt A an BC zu ziehende Linie mit BC; HR unter dem Winkel HRF gleich dem gegebenen Winkel, den die aus A an DE zu ziehende Linie mit DE; und HS unter dem Winkel HSF, gleich dem gegebenen Winkel, den die aus A an FG zu ziehende Linie mit FG einſchlieſſen ſoll. Es ſeyen weiter Hα, Mβ, Nγ gleich den gegebenen Linien, welche die Seiten von den Rechteken ſeyn ſollen, deren andere Seiten die aus dem Punkt A an BC, DE, FG

zu

zu ziehende Linien sind. Nun mache man wie NH zu HR, so Mβ zu αδ, und trage αδ auf die Linie αH aus dem Punkt α gegen H hin. Ferner mache man wie NH zu HS, so Nγ zu δε, und trage δε aus dem Punkt δ gegen H hin. Und, weil bewiesen worden, daß das Rechtek AHα gleich seye der Summe der Rechteke AH×αε, HM×αδ, HN×δε, so muß folglich das Rechtek AHα grösser seyn als das Rechtek AH×αε, also Hα > αε; folglich das Rechtek NHα > NH×αε, d. i. NHα > NH×αδ + NH×δε, d. i. wegen der angeführten Proportionen NHα > HR×Mβ + HS×Nγ, und diß ist die Bestimmung für diesen Fall. Es seye also NHα > HR×Mβ + HS×Nγ, so wird rükwärts geschlossen werden, daß auch Hα grösser seye als αε.

Man mache ferner ein zwischen den Linien O, P enthaltenes Rechtek gleich der Summe der Rechteke HM×αδ, und HN×δε (45, 1. E.) und bestimme eine Linie Q, so, daß Hε: O = P: Q, verlängere dann NH nach A hin, und nehme HA = Q, durch den Punkt A ziehe man die gerade Linie AA mit BC gleichlaufend: so wird diese Linie AA der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man aus irgend einem Punkt A auf derselben die Linien AH, AK, AL an die Parallelen BC, DE, FG unter den gegebenen Winkeln, d. i. mit HN, HR, HS gleichlauffend zieht, so wird das Rechtek AHα gleich seyn der Summe der Rechteke AK×Mβ und AL×Nγ. Denn wegen der gleichlauffenden Linien ist AM: AK = (NH: HR, d. i. nach der Verzeichnung =) Mβ: αδ; folglich das Rechtek AM×αδ = AK×Mβ. Eben so ist AN: AL = (NH: HS =) Nγ: δε, mithin AN×δε = AL×Nγ. Es ist aber nach der Verzeichnung Hε: O = P: AH, mithin AH×Hε = O×P, d. i. nach der Verzeichnung AHε = HM×αδ + HN×δε; man seze auf beeden Seiten noch gemeinschaftlich das

Rechtek

Rechtek AH×αε, oder die beede Rechteke AH×αδ und AH×δε hinzu, ſo iſt das Rechtek AHα = AH×αδ + AH×δε + HM×αδ + HN×δε, d. i. (1, 2. E.) AHα = AM×αδ + AN×δε, d. i. wie ſchon bewieſen worden, AHα = AK×Mβ + AL×Nγ.

Fig. 35. b.

2. Fall. Wenn der Punkt A zwiſchen der erſten äuſſern Parallele BC, und der mittlern DE liegt, und das übrige wie im 1ſten Fall bleibt.

Man beſtimme hier die Gröſſe der Linien αδ, δε, wie im erſten Fall, ſo wird auch wie dort bewieſen werden, daß das Rechtek AHα gleich ſeye der Summe der Rechteke AM×αδ und AN×δε, folglich iſt, wenn man auf beyden Seiten das Rechtek AH×αε hinzuſezt, das Rechtek AHε = (AH×αδ + AH×δε + AM×αδ + AN×δε, d. i. =) HM×αδ + HN×δε, und, weil die Linien HM, HN, αδ, δε, Hε gegeben ſind, ſo iſt AH gegeben. Und der Punkt A berührt eine der Lage nach gegebene gerade Linie, welches wie beym 1ſten Fall erwieſen wird.

Kompoſition.

Man ziehe die Linien HN, HR, HS, und finde αδ, δε wie in der vorhergehenden Kompoſition, und trage ſie aus den Punkten α, δ auf die verlängerte Linie Hα, und, weil der Punkt A nach der Vorausſezung zwiſchen den Parallelen BC, DE liegt, ſo muß nothwendig MH gröſſer ſeyn als AH; mithin iſt das Rechtek MHε > AHε, d. i. MHε > HM×αδ + HN×δε, und, wenn man auf beyden Seiten das Rechtek MH×αε, oder die beyde Rechteke MH×αδ und MH×δε hinweg nimmt; ſo iſt das Rechtek MHα > MN×δε, folglich MH : MN > δε : Hα, d. i. MH : MN > NH×δε : NHα, d. i.

MH:

MH : MN > HS×Nγ : NHα, weil nemlich NH : HS = Nγ : δε. Und diß ist die Bestimmung für den 2ten Fall. Es seye also MH : MN > HS×Nγ : NHα, und man mache ein zwischen den Linien O und P enthaltenes Rechtek gleich der Summe der Rechteke HM×αδ, HN×δε, und bestimme Q so, daß Hε : O = P : Q, und auf der Linie HN nehme man von dem Punkt H aus HA = Q, so ist folglich das Rechtek AHε gleich dem Rechtek O×P, d. i. gleich der Summe der Rechteke HM×αδ und HN×δε. Und weil MH : MN > (HS×Nγ : NHα, d. i. > NH×δε : NHα, d. i. >) δε : Hα; so ist das Rechtek MHα gröſſer als das Rechtek MN×δε. Man seze das gemeinschaftliche Rechtek MH×αε hinzu; so ist das Rechtek MHε gröſſer als (die Summe der Rechteke MH×αε und MN×δε, d. i. gröſſer als die Summe der Rechteke MH×αδ und HN×δε, d. i. gröſſer als) das Rechtek AHε, also ist MH > AH, und der Punkt A fällt zwischen die Parallelen BC, DE. Durch diesen Punkt A ziehe man die Linie AA mit BC gleichlauffend; so wird diese der gesuchte Ort seyn. Denn, man ziehe aus irgend einem Punkt A auf derselben die Linien AH, AK, AI. wie beym vorhergehenden Fall. Und, weil das Rechtek AHε gleich ist der Summe der Rechteke HM×αδ und HN×δε, so ist, wenn man das gemeinschaftliche Rechtek AH×αε hinweg nimmt, das Rechtek AHα gleich der Summe der Rechteke AM×αδ und AN×δε, d. i. der Summe der Rechteke AK×Mβ und AE×Nγ.

3. Fall. Wenn der Punkt A zwischen der zweyten äussern Parallele FG, und der mittlern DE liegt, und das übrige bleibt wie im 1sten Fall.

Man bestimme die Gröſſe der Linien αδ, δε wie beym ersten Fall; so wird, wie dort, bewiesen werden, daß das Rechtek AHα gleich seye der Summe der Rechteke AM×αδ und AN×δε, und wenn man noch die beyden

Recht-

Rechteke NA×Hα und NA×αδ hinzuſezt: ſo iſt die Summe der Rechteke NHα und NA×αδ gleich der Summe der Rechteke NM×αδ, NA×Hα, NA×δε. Die Rechteke NHα und NM×αδ ſind entweder unter einander ungleich, oder gleich. Sie ſeyen

a. ungleich, ſo iſt der Unterſchied der Summe der Rechteke NA×Hα, NA×δε, und des Rechteks NA×αδ gleich dem Unterſchied der Rechteke NHα und NM×αδ, d. i. gleich einem gegebenen Raum. Und weil die gerade Linien Hα, δε, αδ gegeben ſind; ſo iſt folglich auch AN gegeben; nun iſt die Lage von FG, und der Winkel ANF gegeben; alſo berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie nach dem 20ſten Saz.

Beſtimmung.

Weil die Summe der Rechteke NHα und NA×αδ gleich iſt der Summe der Rechteke NM×αδ, NA×Hα, NA×δε; ſo iſt, wenn das Rechtek NHα $\gtrless$ NM×αδ, auch NA×Hα + NA×δε $\gtrless$ NA×αδ, mithin Hα + δε $\gtrless$ αδ, und, weil diß bey den in dem Saz gegebenen Stüken nicht immer nothwendig Statt findet; ſo wird der Ort nicht immer verzeichnet werden können. Man muß alſo unterſuchen, wie die gegebene Gröſſen beſchaffen ſeyn müſſen, damit nothwendig entweder Hα + δε > αδ oder Hα + δε < αδ werde.

Man ziehe alſo die Linien HN, HR, HS und finde αδ, δε wie bey der Kompoſition des erſten Falls gezeigt worden, αδ trage man auf die gerade Linie αH aus dem Punkt α nach H hin; δε aber aus dem Punkt δ nach entgegengeſezter Richtung.

Fig. 35. c.

Nun seye

1) das Rechtek $NH\alpha \rhd NM \times \alpha\delta$, so ist $NH : NM \rhd (\alpha\delta : H\alpha$, d. i. $\rhd NH \times \alpha\delta : NH\alpha$, d. i. $\rhd) HR \times M\beta : NH\alpha$, weil nemlich $NH : HR = M\beta : \alpha\delta$. Die erste Voraussezung bey den gegebenen Grössen seye also diese, daß $NH : NM$
A. $\rhd HR \times M\beta : NH\alpha$; so wird rükwärts geschlossen werden, es seye $NH\alpha \rhd NM \times \alpha\delta$, mithin ist nach dem, was vorhin gesagt worden, auch $NA \times H\alpha + NA \times \delta\varepsilon \rhd NA \times \alpha\delta$ und dann muß nothwendig $H\alpha + \delta\varepsilon$ grösser seyn als $\alpha\delta$. Es muß also die Summe der Rechteke $NH\alpha$ und $NH \times \delta\varepsilon$ grösser seyn, als $NH \times \alpha\delta$, d. i. (weil $NH : HS = N\gamma : \delta\varepsilon$) es muß die Summe der Rechteke $NH\alpha$ und $HS \times N\gamma$ grösser seyn als das Rechtek $HR \times M\beta$. Und, wenn diß leztere gesezt wird, so wird man rükwärts schliessen
B. können, es seye $H\alpha + \delta\varepsilon \rhd \alpha\delta$.

Weil überdiß vorausgesezt wird, der Punkt A liege zwischen den Parallelen DE, FG, so muß NM grösser seyn als NA. Nun ist bewiesen worden, daß die Summe der Rechteke $NH\alpha$ und $NA \times \alpha\delta$ gleich seye der Summe der Rechteke ($NM \times \alpha\delta$, $NA \times H\alpha$, $NA \times \delta\varepsilon$, d. i. weil $H\alpha + \delta\varepsilon = \alpha\delta + H\varepsilon$, gleich der Summe der Rechteke) $NM \times \alpha\delta$, $NA \times \alpha\delta$, $NA \times H\varepsilon$; folglich ist, das gemeinschaftliche Rechtek $NA \times \alpha\delta$ hinweg genommen, das Rechtek $NH\alpha$ gleich der Summe der Rechteke $NM \times \alpha\delta$, und $NA \times H\varepsilon$. Und, weil $NM \rhd NA$; so ist $NM \times \alpha\delta + NM \times H\varepsilon \rhd (NM \times \alpha\delta + NA \times H\varepsilon$, d. i. $\rhd) NH\alpha$; folglich, weil $\alpha\delta + H\varepsilon = H\alpha + \delta\varepsilon$, die Summe der Rechteke $NM \times H\alpha$ und $NM \times \delta\varepsilon$ grösser, als das Rechtek $NH\alpha$; und, wenn man das gemeinschaftliche Rechtek $NM \times H\alpha$ hinweg nimmt, so ist das Rechtek $NM \times \delta\varepsilon$ grösser als das Rechtek $MH\alpha$. Mithin muß das

Ver-

Verhältniß von NM zu MH gröſſer ſeyn, als das Verhältniß von (Hα zu δε, d. i. gröſſer als das Verhältniß des Rechteks NHα zu dem Rechtek NH × δε, d. i. gröſſer als das Verhältniß von) dem Rechtek NHα zu dem Rechtek HS × Nγ. Und umgekehrt,
C. wenn NM : MH ▷ NHα : HS × Nγ, ſo kann man die ganze Reihe dieſer Schlüſſe wieder rükwärts durchmachen, und beweiſen, daß NM gröſſer ſeye als NA.

Bey der erſten Vorausſezung alſo, nach welcher man nemlich annimmt, daß NH : NM ▷ HR × Mβ : NHα, müſſen überdiß nothwendig auch dieſe beyde Bedingungen noch Statt finden, 1. daß NHα + HS × Nγ ▷ HR × Mβ, und 2. daß NM : MH ▷ NHα : HS × Nγ.

Dieſe lezte Bedingung nun iſt bey gegenwärtiger Vorausſezung zur Beſtimmung ſchon hinreichend, denn aus dieſer und der Vorausſezung folgt die erſte
D. Bedingung nothwendig. Denn, weil NM : MH ▷ NHα : HS × Nγ, ſo iſt HS × Nγ : NHα ▷ MH : NM, und verbunden (componendo) HS × Nγ + NHα : NHα ▷ NH : NM. Nach der Vorausſezung aber iſt NH : NM ▷ HR × Mβ : NHα, mithin noch vielmehr HS × Nγ + NHA : NHα ▷ HR × Mβ : NHα. Alſo HS × Nγ + NHα ▷ HR × Mβ, und diß war eben die erſte Bedingung. Aus dieſer erſten Bedingung und der Vorausſezung aber folgt die 2te Bedingung noch nicht, und eben ſo wenig folgt aus den beyden Bedingungen allein die Vorausſezung.

Fig. 35. d.

Es seye

2) $NH\alpha \prec NM \times \alpha\delta$, so wird auf ähnliche Art, wie oben, gezeigt werden, es müsse auch $NH : NM \prec HR \times M\beta : NH\alpha$ seyn.

Die zweite Voraussezung seye also, daß $NH : NM \prec HR \times M\beta : NH\alpha$, so wird rükwärts geschlossen werden, es seye auch $NH\alpha \prec NM \times \alpha\delta$. Und, weil bewiesen worden, daß $NH\alpha + NA \times \alpha\delta = NM \times \alpha\delta + NA \times H\alpha + NA \times \delta\varepsilon$; so ist $NA \times H\alpha + NA \times \delta\varepsilon \prec NA \times \alpha\delta$; also $H\alpha + \delta\varepsilon \prec \alpha\delta$. Mithin ist auch $NH\alpha + NH \times \delta\varepsilon \prec NH \times \alpha\delta$, d. i. $NH\alpha + HS \times N\gamma \prec HR \times M\beta$. Und, diß leztere vorausgesezt, kann man rükwärts schliessen, es seye $H\alpha + \delta\varepsilon \prec \alpha\delta$. Es wird überdiß vorausgesezt, daß $NM \succ NA$. Es ist aber $NH\alpha + NA \times \alpha\delta = NM \times \alpha\delta + NA \times H\alpha + NA \times \delta\varepsilon$, und in diesem Fall ist $\alpha\delta = \alpha H + H\varepsilon + \varepsilon\delta$; folglich, wenn man die beyden Rechteke $NA \times H\alpha$ und $NA \times \delta\varepsilon$ auf beyden Seiten hinweg nimmt, so ist $NH\alpha + NA \times H\varepsilon = NM \times \alpha\delta$. Und, weil $NM \succ NA$; so ist $NH\alpha + NM \times H\varepsilon \succ (NH\alpha + NA \times H\varepsilon$, d. i. $\succ) NM \times \alpha\delta$; und, auf beeden Seiten die Rechteke $NM \times H\alpha$ und $NM \times H\varepsilon$ hinweg genommen, so ist $MH\alpha \succ NM \times \delta\varepsilon$. Mithin $NM : MH \prec (H\alpha : \delta\varepsilon$, d. i. $\prec NH\alpha : NH \times \delta\varepsilon$, d. i. $\prec) NH\alpha : HS \times N\gamma$. Und umgekehrt, wenn $NM : MH \prec NH\alpha : HS \times N\gamma$; so wird rükwärts geschlossen werden, daß $MH\alpha \succ NM \times \delta\varepsilon$; und $NM \succ NA$ seye.

Wenn also $NH : NM \prec HR \times M\beta : NH\alpha$, so müssen nothwendig noch diese beyden Bedingungen Statt finden, daß 1) $NH\alpha + HS \times N\gamma \prec HR \times M\beta$, und daß 2) $NM : MH \prec NH\alpha : HS \times N\gamma$. Diese lezte Bedingung aber ist zur Bestimmung schon hinreichend, denn aus dieser und der Voraussezung folgt nothwendig

dig die erſte Bedingung, welches, wie vorhin, bewieſen wird.

Dieſe Beſtimmungen voraus geſchikt, iſt für den dritten Fall in bemeldeten 2. Vorausſezungen folgendes die

Kompoſition.

Man ziehe HN, HR, HS, und beſtimme die Gröſſe und Lage der Linien $\alpha\delta$, $\delta\varepsilon$, wie geſagt worden. Nun ſeye

Fig. 35. c.

1. $NH : NM > HR \times M\beta : NH\alpha$, und zugleich $NM : MH > NH\alpha : HS \times N\gamma$; ſo iſt auch, wie *) gezeigt worden, $NH\alpha + HS \times N\gamma > HR \times M\beta$, und daher **) $H\alpha + \delta\varepsilon > \alpha\delta$. Und, weil $NH : NM > HR \times M\beta : NH\alpha$, ſo iſt ***) $NH\alpha > NM \times \alpha\delta$. Man mache ein Rechtek $O \times P$ gleich dem Ueberſchuß des Rechteks $NH\alpha$ über das Rechtek $NM \times \alpha\delta$, d. i. es ſeye $NH\alpha = NM \times \alpha\delta + O \times P$. Nun beſtimme man Q ſo, daß $H\varepsilon : O = P : Q$, und auf die gerade Linie NH trage man aus dem Punkte N nach H hin die gerade Linie $NA = Q$; ſo iſt folglich $NA \times H\varepsilon = O \times P$, daher iſt $NM \times \alpha\delta + NA \times H\varepsilon = NH\alpha$; man ſeze auf beyden Seiten noch das Rechtek $NA \times \alpha\delta$ hinzu; ſo iſt $NH\alpha + NA \times \alpha\delta = (NM \times \alpha\delta + NA \times H\varepsilon + NA \times \alpha\delta$, d. i. weil $H\varepsilon + \alpha\delta = H\alpha + \delta\varepsilon$ $=) NM \times \alpha\delta + NA \times H\alpha + NA \times \delta\varepsilon$. Folglich, weil nach der Vorausſezung $NM : MH > NH\alpha : HS \times N\gamma$, ſo iſt †) $NM > NA$. Mithin fällt der Punkt A zwiſchen die Parallelen DE, FG. Durch dieſen Punkt ziehe man eine gerade, mit BC gleichlauffende Linie; ſo wird dieſe der geſuchte Ort ſeyn. Denn, man nehme auf derſelben irgend einen

*) ſiehe D. **) ſ. B. ***) ſ. A. †) ſ. C.

Punkt A, und ziehe daraus die Linien, wie beym erſten Fall. Und, weil gezeigt worden, daß NHα + NA × αδ = NM × αδ + NA × Hα + NA × δε ſo iſt, wenn man auf beyden Seiten die Rechtecke NA × Hα und NA × αδ hinweg nimmt, das Rechteck AHα = (AM × αδ + NA × δε, d. i. =) AK × Mβ + AL × Nγ.

Fig. 35. d.

2. Diß wird eben ſo bewieſen werden bey der 2ten Vorausſezung, wenn nemlich NH : NM < HR × Mβ : NHα, und wo folglich auch NM : MH < NHα : HS × Nγ ſeyn muß.

Fig. 35. e.

Es ſeye nun aber

b. NHα = NM × αδ; und, weil NHα + NA × αδ = NM × αδ + NA × Hα + NA × δε; ſo iſt auch NA × αδ = NA × Hα + NA × δε. Die gerade Linie NA iſt alſo hier keineswegs gegeben, und es kann mithin in dieſem Fall der Punkt A überall zwiſchen den Parallelen DE, FG angenommen werden, zwiſchen welchen er der Vorausſezung nach liegen muß.

Beſtimmung.

Weil aber NHα = NM × αδ; ſo iſt NH : NM = (αδ : Hα = NH × αδ : NHα =) HR × Mβ : NHα. Es ſeye alſo

Die dritte Vorausſezung bey den gegebenen Gröſſen dieſe, daß NH : NM = HR × Mβ : NHα; ſo wird rükwärts geſchloſſen werden, es ſeye NHα = NM × αδ; folglich iſt, wie gezeigt worden, NA × Hα + NA × δε = NA × αδ, alſo nothwendig Hα + δε = αδ,

$= \alpha\delta$, d. i. es muß der Punkt ε auf dem Punkt H fallen. Mithin ist $NH\alpha + NH \times \delta\varepsilon = NH \times \alpha\delta$, d. i. $NH\alpha + HS \times N\gamma = HR \times M\beta$. Und, wenn diß lezte vorausgesezt wird; so kann rükwärts geschlossen werden, daß $H\alpha + \delta\varepsilon = \alpha\delta$.

Komposition.

Man ziehe die Linien NH, HR, HS u. s. w. wie bey der vorhergehenden Komposition, und es seye $NH : NM = HR \times M\beta : NH\alpha$, und zugleich $NH\alpha + HS \times N\gamma = HR \times M\beta$. Man nehme irgend einen Punkt A zwischen den Parallelen DE, FG, und ziehe aus ihm die Linien AH, AK, AL wie beym ersten Fall; so ist das Rechtek $AH\alpha$ gleich der Summe der Rechteke $AK \times M\beta$ und $AL \times N\gamma$. Denn, weil $NH : NM = HR \times M\beta : NH\alpha$; so ist, wie gezeigt worden, $NH\alpha = NM \times \alpha\delta$. Und, weil $NH\alpha + HS \times N\gamma = HR \times M\beta$; so ist $H\alpha + \delta\varepsilon = \alpha\delta$. Folglich ist $NA \times \alpha\delta = NA \times H\alpha + NA \times \delta\varepsilon$, und, wenn man eines der gleichen Rechteke $NH\alpha$, $NM \times \alpha\delta$ auf jeder Seite hinzu sezt; so ist $NH\alpha + NA \times \alpha\delta = NM \times \alpha\delta + NA \times H\alpha + NA \times \delta\varepsilon$; und, die beyden Rechteke $NA \times H\alpha$ und $NA \times \alpha\delta$ von beyden Seiten weggenommen, ist $AH\alpha = (AM \times \alpha\delta + NA \times \delta\varepsilon$, d. i. $=) AK \times M\beta + AL \times N\gamma$. Mithin erhält man bey diesem lezten Glied des dritten Falls, statt eines Orts einen Lehrsaz.

Fig. 35. f.

4. Fall. Wenn der Punkt A ausserhalb der Parallelen auf der Seite der zweyten äussern liegt, und das übrige wie beym ersten Fall bleibt.

Man bestimme die Grösse der Linien $\alpha\delta$, $\delta\varepsilon$ wie beym ersten Fall; so wird, wie dort, bewiesen werden,

daß $AH\alpha = AM \times \alpha\delta + AN \times \delta\varepsilon$, und, wenn man auf beyden Seiten die Rechteke $MH \times \alpha\delta$, $NH \times \delta\varepsilon$ hinzu ſezt, ſo iſt $AH\alpha + MH \times \alpha\delta + NH \times \delta\varepsilon = AH \times \alpha\delta + AH \times \delta\varepsilon$, folglich der Unterſchied der Summe der Rechteke $AH \times \alpha\delta$ $AH \times \delta\varepsilon$, und des Rechteks $AH\alpha$ gleich der Summe der Rechteke $MH \times \alpha\delta$ und $NH \times \delta\varepsilon$, d. i. gleich einem gegebenen Raum. Nun ſind die Linien $\alpha\delta$, $\delta\varepsilon$, $H\alpha$ gegeben, mithin iſt AH gegeben, und der Punkt A berührt eine der Lage nach gegebene gerade Linie, wie beym erſten Fall gezeigt worden.

Beſtimmung.

Man ziehe HN, HR, HS, und beſtimme die Gröſſe und Lage von $\alpha\delta$, $\delta\varepsilon$ wie beym erſten Fall. Und, weil $AH \times \alpha\delta + AH \times \delta\varepsilon > AH\alpha$; ſo iſt $\alpha\delta + \delta\varepsilon > H\alpha$, alſo $NH \times \alpha\delta + NH \times \delta\varepsilon > NH\alpha$, d. i. $HR \times M\beta + HS \times N\gamma > NH\alpha$. Und umgekehrt, wenn $HR \times M\beta + HS \times N\gamma > NH\alpha$; ſo wird man rükwärts ſchlieſſen können, daß auch $\alpha\delta + \delta\varepsilon > H\alpha$.

Ueberdiß, weil vorausgeſezt wird, der Punkt A liege auſſerhalb der Parallelen auf der Seite von FG, ſo muß AH gröſſer ſeyn, als NH. Es iſt aber $AH\alpha + MH \times \alpha\delta + NH \times \delta\varepsilon = (AH \times \alpha\delta + AH \times \delta\varepsilon$, d. i. $=) AH \times \alpha\varepsilon$; folglich, das gemeinſchaftliche Rechtek $AH\alpha$ abgezogen, $MH \times \alpha\delta + NH \times \delta\varepsilon = AH\varepsilon$. Und, weil $AH > NH$, ſo iſt $AH\varepsilon$ oder $MH \times \alpha\delta + NH \times \delta\varepsilon > NH\varepsilon$; und, das Rechtek $NM \times \alpha\delta$ auf beeden Seiten hinzu geſezt, $NH \times \alpha\delta + NH \times \delta\varepsilon > NM \times \alpha\delta + NH\varepsilon$; endlich, das gemeinſchaftliche Rechtek $NH\varepsilon$ abgezogen, iſt $NH\alpha > NM \times \alpha\delta$. Alſo $NH : NM > (\alpha\delta : H\alpha$, d. i. $> NH \times \alpha\delta : NH\alpha$, d. i. $>) HR \times M\beta : NH\alpha$. Umgekehrt, wenn $NH : NM > HR \times M\beta : NH\alpha$; ſo wird man rükwärts ſchlie-

ſchlieſſen können, daß $NH\alpha > NM \times \alpha\delta$; und $AH > NH$ ſeye.

Alſo muß in dem 4ten Fall $HR \times M\beta + HS \times N\gamma > NH\alpha$, und zugleich $NH : NM > HR \times M\beta : NH\alpha$ ſeyn. Diß voraus geſchikt iſt folgendes die

Kompoſition.

Man ziehe NH, HR, HS, und beſtimme Gröſſe und Lage von $\alpha\delta$, $\delta\varepsilon$, wie vorhin geſagt worden. Weil nun nach der voraus geſchikten Beſtimmung $HR \times M\beta + HS \times N\gamma > NH\alpha$; ſo iſt $\alpha\delta + \delta\varepsilon > H\alpha$. Man mache ein Rechtek $O \times P = MH \times \alpha\delta + NH \times \delta\varepsilon$, und beſtimme eine Linie HA ſo, daß $H\varepsilon : O = P : HA$, dieſe Linie HA trage man auf HN aus dem Punkt H gegen N hin. Es iſt alſo $O \times P$, d. i. $MH \times \alpha\delta + NH \times \delta\varepsilon = AH\varepsilon$; und auf beyden Seiten das Rechtek $AH\alpha$ hinzu geſezt, $AH\alpha + MH \times \alpha\delta + NH \times \delta\varepsilon = (AH \times \alpha\varepsilon$, d. i. $=) AH \times \alpha\delta + AH \times \delta\varepsilon$. Weil nun nach dem andern Theil der Beſtimmung $NH : NM > HR \times M\beta : NH\alpha$; ſo iſt $AH > NH$. Folglich fällt der Punkt A auſſerhalb der Parallelen auf die Seite von FG. Man ziehe durch ihn eine mit BC gleichlauffende Linie; ſo wird dieſe der geſuchte Ort ſeyn. Denn, man nehme auf derſelben irgend einen Punkt A, und ziehe aus demſelben die gerade Linien an die Parallelen, wie im erſten Fall; und, weil bewieſen worden, daß $AH\alpha + MH \times \alpha\delta + NH \times \delta\varepsilon = AH \times \alpha\delta + AH \times \delta\varepsilon$; ſo iſt, die gemeinſchaftliche Rechteke $MH \times \alpha\delta$, $NH \times \delta\varepsilon$ hinweg genommen, $AH\alpha = (AM \times \alpha\delta + AN \times \delta\varepsilon$, d. i. $=) AK \times M\beta + AL \times N\gamma$.

Fig. 35. g.

5. Fall. Wenn die Linie AH, welche nebſt einer gegebenen Linie $H\alpha$ das Rechtek enthält, welches der

Summe der beyden übrigen Rechteke gleich iſt, an die mittlere Parallele DE gezogen iſt, und der Punkt A auſſerhalb der Parallelen auf der Seite von BC oder von FG liegt.

Die Linie AH begegne den Parallelen BC, FG in den Punkten M, N, und man beſtimme die Gröſſe der Linien $\alpha\delta$, $\delta\varepsilon$ wie im erſten Fall; ſo wird, wie dort, bewieſen werden, es ſeye $AH\alpha = AM \times \alpha\delta + AN \times \delta\varepsilon$, d. i. $AM \times HA + MH\alpha = (AM \times \alpha\delta + AM \times \delta\varepsilon + MN \times \delta\varepsilon$, d. i. $=) AM \times \alpha\varepsilon + MN \times \delta\varepsilon$. Nun ſind die Rechteke $MH\alpha$, $MN \times \delta\varepsilon$ entweder ungleich, oder gleich. Sie ſeyen

a. ungleich; ſo iſt folglich der Unterſchied der Rechteke $AM \times H\alpha$ und $AM \times \alpha\varepsilon$ gleich dem Unterſchied der Rechteke $MN \times \delta\varepsilon$ und $MH\alpha$, d. i. gleich einem gegebenen Raum. Und, weil $H\alpha$, $\alpha\delta$, $\delta\varepsilon$ gegeben ſind, ſo iſt AM gegeben. Weil ferner die Lage von BC und auch der Winkel AMB gegeben iſt; ſo berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie nach dem 20ſten Saz.

Beſtimmung.

Aus irgend einem Punkt H auf der geraden Linie DE ziehe man an FG die Linien HN, HR, HS, und beſtimme Gröſſe und Lage der Linien $\alpha\delta$, $\delta\varepsilon$ wie im erſten Fall. Nun ſeye

1) $MN \times \delta\varepsilon \succ MH\alpha$; ſo iſt folglich $MN : MH \succ (H\alpha : \delta\varepsilon$, d. i. $\succ NH\alpha : NH \times \delta\varepsilon$, d. i. $\succ) NH\alpha : HS \times N\gamma$. Und umgekehrt, wenn $MN : MH \succ NH\alpha : HS \times N\gamma$; ſo wird man auch ſchlieſſen können, es ſeye $MN \times \delta\varepsilon \succ MH\alpha$. Weil nun bewieſen worden, daß $AM \times H\alpha + MH\alpha = AM \times \alpha\delta + AM \times \delta\varepsilon + MN \times \delta\varepsilon$; ſo iſt $AM \times H\alpha \succ AM \times \alpha\delta + AM \times \delta\varepsilon$;

also $H\alpha \rhd \alpha\delta + \delta\varepsilon$; folglich $NH\alpha \rhd (NH \times \alpha\delta + NH \times \delta\varepsilon$, d. i. $\rhd$) $HR \times M\beta + HS \times N\gamma$. Und umgekehrt, wenn $NH\alpha \rhd HR \times M\beta + HS \times N\gamma$; so wird man rükwärts schliessen können, daß auch $H\alpha \rhd \alpha\delta + \delta\varepsilon$.

Wenn also $MN : MH \rhd NH\alpha : HS \times N\gamma$ (und diß seye die 1ste Vorausſezung) so muß auch $NH\alpha \rhd HR \times M\beta + HS \times N\gamma$ seyn.

2. Es seye $MN + \delta\varepsilon \lhd MH\alpha$; so wird auf ähnliche Art gezeigt werden, daß $MN : MH \lhd NH\alpha : HS \times N\gamma$; und umgekehrt. Und hieraus wird man auch auf ähnliche Art schliessen, es seye $H\alpha \lhd \alpha\delta + \delta\varepsilon$; folglich $NH\alpha \lhd HR \times M\beta + HS \times N\gamma$, und umgekehrt.

Wenn also $MN : MH \lhd NH\alpha : HS \times N\gamma$ (und diß seye die 2te Vorausſezung), so muß auch $NH\alpha \lhd HR \times M\beta + HS \times N\gamma$ seyn.

Dieſe Beſtimmungen vorausgeſchikt, iſt für den 5ten Fall bey bemeldten zween Vorausſezungen folgendes die

Kompoſition.

Man ziehe HN, HR, HS und beſtimme die Gröſſe und Lage der Linien $\alpha\delta$, $\delta\varepsilon$, wie geſagt worden. Nun ſey 1. $MN : MH \rhd NH\alpha : HS \times N\gamma$, und zugleich $NH\alpha \rhd HR \times M\beta + HS \times N\gamma$; ſo iſt wegen der lezten Bedingung, wie gezeigt worden, $H\alpha \rhd \alpha\delta + \delta\varepsilon$. Und wegen der erſten Bedingung iſt, wie gezeigt worden, $MN \times \delta\varepsilon \rhd MH\alpha$. Man mache das Rechtek $O \times P$ gleich dem Ueberſchuß des Rechteks $MN \times \delta\varepsilon$ über das Rechtek $MH\alpha$, d. i. es ſeye $MN \times \delta\varepsilon = MH\alpha + O \times P$. Nun beſtimme man MA ſo, daß $H\varepsilon : O = P : MA$, und trage MA auf die verlängerte Linie HM auſſerhalb der Parallelen nach der Seite BC hin, durch den Punkt A

ziehe

ziehe man eine mit BC gleichlauffende Linie, so wird dieſe der geſuchte Ort ſeyn. Denn aus irgend einem Punkt A auf derſelben ziehe man an die Parallelen DE, BC, FG die Linien AH, AK, AL mit HN, HR, HS gleichlauffend. Und weil nach der Verzeichnung $AM \times H\varepsilon = O \times P$; ſo iſt auf beyden Seiten das Rechtek $MH\alpha$ hinzu geſezt, $MH\alpha + AM \times H\varepsilon = (MH\alpha + O \times P$, d. i. $=) MN \times \delta\varepsilon$. Man ſeze beederſeits das Rechtek $AM \times \alpha\varepsilon$, oder $AM \times \alpha\delta + AM \times \delta\varepsilon$ hinzu; ſo iſt $MH\alpha + AM \times H\alpha$, d. i. $AH\alpha = (AM \times \alpha\delta + AN \times \delta\varepsilon$, d. i. $=) AK \times M\beta + AL \times N\gamma$. 2. Eben dieſes wird aber auf eben dieſe Art bey der 2ten Vorausſezung bewieſen werden, wo nemlich $MN : MH < NH\alpha : HS \times N\gamma$, und deßwegen $NH\alpha < HR \times M\beta + HS \times N\gamma$.

b. Es ſeye $MH\alpha = MN \times \delta\varepsilon$; ſo iſt, weil $AM \times H\alpha + MH\alpha = AM \times \alpha\delta + AM \times \delta\varepsilon + MN \times \delta\varepsilon$; auch $AM \times H\alpha = AM \times \alpha\delta + AM \times \delta\varepsilon$. Es wird alſo die Linie AM keineswegs gegeben ſeyn, und der Punkt A überall auſſerhalb der Parallelen auf derjenigen Seite von BC angenommen werden können, auf welcher er nach der Vorausſezung liegen ſoll.

Beſtimmung.

Weil aber $MN \times \delta\varepsilon = MH\alpha$; ſo iſt $MN : MH = (H\alpha : \delta\varepsilon = NH\alpha : NH \times \delta\varepsilon$, d. i. $=) NH\alpha : HS \times N\gamma$.

Wenn alſo $MN : MH = NH\alpha : HS \times N\gamma$ (und diß ſeye die 3te Vorausſezung); ſo wird rükwärts geſchloſſen werden, daß $MH\alpha = MN \times \delta\varepsilon$; folglich iſt, wie gezeigt worden, $AM \times H\alpha = AM \times \alpha\delta + AM \times \delta\varepsilon$; folglich $H\alpha = \alpha\delta + \delta\varepsilon$; alſo $NH\alpha = (NH \times \alpha\delta + NH \times \delta\varepsilon$, d. i. $=) HR \times M\beta + HS \times N\gamma$. Und, wenn

wenn diß lezte geſezt wird; ſo wird umgekehrt geſchloſſen werden, es ſeye $H\alpha = \alpha\delta + \delta\varepsilon$.

Kompoſition.

Man ziehe HN, HR, HS, und beſtimme die Gröſſe und Lage der Linien $\alpha\delta$, $\delta\varepsilon$ wie bey der vorhergehenden Kompoſition; und es ſeye $MN : MH = NH\alpha : HS \times N\gamma$, und zugleich $NH\alpha = HR \times M\beta + HS \times N\gamma$. Nun nehme man auſſerhalb der Parallelen auf der Seite von BC irgend einen Punkt A, und ziehe aus demſelben an die Parallelen DE, BC, FG die Linien AH, AK, AL mit HN, HR, HS gleichlauffend; ſo wird $AH\alpha = AK \times M\beta + AL \times M\gamma$ ſeyn. Denn, weil $MN : MH = NH\alpha : HS \times N\gamma$; ſo iſt, wie vorhin gezeigt worden, $MH\alpha = MN \times \delta\varepsilon$. Und, weil $NH\alpha = HR \times M\beta + HS \times N\gamma$; ſo iſt $H\alpha = \alpha\delta + \delta\varepsilon$. Alſo $AM \times H\alpha = AM \times \alpha\delta + AM \times \delta\varepsilon$, und, eines der gleichen Rechtecke $MH\alpha$, $MN \times \delta\varepsilon$ hinzu geſezt, $AM \times H\alpha + MH\alpha = AM \times \alpha\delta + AM \times \delta\varepsilon + MN \times \delta\varepsilon$, d. i. $AH\alpha = (AM \times \alpha\delta + AN \times \delta\varepsilon$, d. i. $=) AK \times M\beta + AL \times N\gamma$. Alſo verwandelt ſich auch in dieſem Fall der Ort in einen Lehrſaz.

Fig. 35. h.

6. Fall. Wenn der Punkt A zwiſchen den Parallelen, z. B. zwiſchen BC, DE, liegt, und das übrige bleibt, wie beym vorigen Fall.

Man beſtimme die Gröſſe der Linien $\alpha\delta$, $\delta\varepsilon$ wie im erſten Fall; ſo wird, wie dort, gezeigt werden, daß $AH\alpha = AM \times \alpha\delta + AN \times \delta\varepsilon$. Man ſeze auf beyden Seiten das Rechteck $AH \times \alpha\delta$ hinzu; ſo iſt $AH\alpha + AH \times \alpha\delta = MH \times \alpha\delta + AH \times \delta\varepsilon + HN \times \delta\varepsilon$. Alſo iſt der Ueberſchuß der Summe der Rechteke $AH\alpha$ und $AH \times \alpha\delta$

AH×αδ über das Rechtek AH×δε gleich der Summe der Rechteke MH×αδ und HN×δε, d. i. gleich einem gegebenen Raum; und, weil Hα, αδ, δε gegeben ſind; ſo iſt AH gegeben. Nun iſt aber die Lage von DE, und auch der Winkel AHD gegeben; folglich berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie nach dem 20ſten Saz.

Beſtimmung.

Man ziehe die Linien HN, HR, HS wie beym vorhergehenden Fall, und finde die Gröſſe der Linien αδ, δε wie beym erſten Fall, αδ trage man auf die verlängerte Linie Hα nach der Seite von α hin, δε hingegen nach entgegengeſezter Richtung. Und, weil das Rechtek AH×δε von der Summe der Rechteke AHα und AH×αδ abgezogen werden muß, ſo muß Hα + αδ ▷ δε ſeyn; alſo muß NHα + NH×αδ ▷ NH×δε ſeyn; d. i. es muß NHα + HR×Mβ ▷ HS×Nγ ſeyn. Und, wenn diß iſt; ſo wird rükwärts geſchloſſen werden, daß auch Hα + αδ ▷ δε ſeyn.

Ueberdiß, weil erfodert wird, daß der Punkt A zwiſchen den Parallelen BC, DE ſeye; ſo muß MH ▷ AH ſeyn. Es iſt aber gezeigt worden, daß AHα + AH×αδ, d. i. AHδ = MH×αδ + AH×δε + HN×δε; folglich iſt, das Rechtek AH×δε hinweg genommen, AHε = MH×αδ + HN×δε. Und, weil MH ▷ AH; ſo iſt MHε ▷ (AHε, d. i. ▷) MH×αδ + HN×δε. Man ſeze auf beyden Seiten das Rechtek MH×εα hinzu; ſo iſt MHα ▷ (MH×δε + HN×δε, d. i. ▷) MN×δε. Alſo iſt MH : MN ▷ (δε : Hα, d. i. ▷ NH×δε : NHα, d. i. ▷) HS×Nγ : NHα. Und, wenn MH : MN ▷ HS×Nγ : NHα; ſo wird rükwärts geſchloſſen werden, daß MHα ▷ MN×δε; und MH ▷ AH ſeye.

Im

Im 6ten Fall muß also $NH\alpha + HR \times M\beta > HS \times N\gamma$; und zugleich $MH : MN > HS \times N\gamma : NH\alpha$ seyn.

Diese lezte Bedingung aber ist zur Bestimmung dieses Falls schon hinreichend, denn die erste folgt nothwendig aus derselben. Denn das Verhältniß von MH zu MN ist das Verhältniß des kleinern zum grössern; also da $MH : MN > HS \times N\gamma : NH\alpha$, so ist $HS \times N\gamma < NH\alpha$; folglich $NH\alpha > HS \times N\gamma$; also noch vielmehr $NH\alpha + HR \times M\beta > HS \times N\gamma$. Diß voraus geschikt ist folgendes die

Komposition.

Man ziehe NH, HR, HS, und finde die Grösse und Lage von $\alpha\delta$, $\delta\varepsilon$ wie gesagt worden. Es seye $MH : MN > HS \times N\gamma : NH\alpha$; so folgt daraus, wie eben gezeigt worden, daß $NH\alpha + HR \times M\beta > HS \times N\gamma$. Es ist also $H\alpha + \alpha\delta > \delta\varepsilon$. Man mache das Rechtek $O \times P = MH \times \alpha\delta + HN \times \delta\varepsilon$, und bestimme HA so, daß $H\varepsilon : O = P : HA$, diese Linie HA trage man auf die verlängerte Linie NH gegen BC hin. Es ist also $AH\varepsilon = (O \times P$, d. i. $=) MH \times \alpha\delta + HN \times \delta\varepsilon$. Man lege auf beyden Seiten das Rechtek $AH \times \delta\varepsilon$ hinzu; so sind $AH\varepsilon + AH \times \delta\varepsilon$, d. i. $AH\alpha + AH \times \alpha\delta = MH \times \alpha\delta + HN \times \delta\varepsilon + AH \times \delta\varepsilon$. Folglich, weil $MH : MN > HS \times N\gamma : NH\alpha$, so ist $MH > AH$. Es fällt also der Punkt A zwischen die Parallelen BC, DE, durch den Punkt A ziehe man eine gerade mit BC gleichlaufende Linie; so wird diese der gesuchte Ort seyn. Denn, man ziehe aus irgend einem Punkt A in derselbigen die gerade Linien wie bey dem 5ten Fall. Weil nun $AH\alpha + AH \times \alpha\delta = MH \times \alpha\delta + NH \times \delta\varepsilon + AH \times \delta\varepsilon$, wie bewiesen worden; so ist, das gemeinschaftliche Rechtek $AH \times \alpha\delta$

AH×αδ hinweg genommen, AHα = (AM×α + AN×δε, d. i. =) AK×Mβ + AL×Nγ.

Wenn also die gerade Linien HN, HR, HS gez gen worden, und die Linien Hα, Mβ, Nγ der Grö nach gegeben sind, so ist NHα entweder grösser, od kleiner als die Summe der Rechteke HR×Mβ un HS×Nγ, oder dieser Summe gleich. Wenn NH > HR×Mβ + HS×Nγ; so kann ein Ort gefunde werden nach dem 1sten Fall, wenn nemlich erfoder wird, daß die Linie AH, welche nebst einer g gebenen Hα das der Summe der beyden übr gen gleiche Rechtek einschließd, an eine der äu sern Parallelen gezogen seye. Und, wenn zugleic MH: MN > HS×Nγ: NHα; oder, welches einerle ist, wenn NM: MH < NHα: HS×Nγ; so kann no ein anderer Ort gefunden werden nach dem 2ten Fal Nach dem 3ten Fall hingegen kann, so lang diese beyl Bedingungen bleiben, kein Ort gefunden werden, den das Verhältniß von NH zu NM ist das Verhältniß d gröſsern zum kleinern, das Rechtek HR×Mβ ist klein als das Rechtek NHα; mithin ist NH: NM > HR×Mβ NHα, und deßwegen müßte nach der Bestimmung d 3ten Falls NM: MH > NHα: HS×Nγ seyn. Na der Voraussezung aber ist NM: MH < NHα: HS×N Und weil bey dem 4ten Fall erfodert wird, daß NH < HR×Mβ + HS×Nγ seye; so wird auch nach di sem Fall kein Ort gefunden werden können.

Ist aber NHα > HR×Mβ + HS×Nγ; u zugleich NM: MH > NHα: HS×Nγ; so kann f den 2ten Fall kein Ort gefunden werden. Weil ab gezeigt worden, daß NH: NM > HR×Mβ: NH so wird ein Ort nach dem 3ten Fall gefunden.

Ist NHα < HR×Mβ + HS×Nγ; so kann d Ort nicht nach dem 1sten Fall gefunden werden. Ab

wenn zugleich NM : MH < NHα : HS×Nγ; ſo kann ein Ort nach dem 2ten Fall gefunden werden. Und, wenn überdiß noch NH : NM < HR×Mβ : NHα; ſo findet man noch einen andern Ort nach dem 3ten, hingegen keinen nach dem 4ten Fall, weil bey dem 4ten Fall immer NH : NM > HR×Mβ : NHα ſeyn muß. Iſt hingegen NH : NM > HR×Mβ : NHα, und bleiben die 2. übrigen angeführten Bedingungen, ſo findet man nicht nach dem 3ten, ſondern nach dem 4ten Fall einen Ort.

Iſt NHα < HR×Mβ + HS×Nγ; und zugleich NM : MH > NHα : HS×Nγ; ſo kann nach dem 1ſten und 2ten Fall kein Ort gefunden werden. Wenn aber überdiß noch NH : NM > HR×Mβ : NHα; ſo findet man einen Ort nach dem 3ten, und auch einen nach dem 4ten Fall. Iſt hingegen NH : NM < HR×Mβ : NHα, und die 2. übrigen angeführten Bedingungen bleiben; ſo giebt es nach keinem der 4 erſten Fälle, mithin gar keinen Ort.

Endlich, wenn NHα + HS×Nγ = HR×Mβ, und zugleich NH : NM = HR×Mβ : NHα; ſo wird jeder Punkt zwiſchen den Parallelen den Foderungen des Sazes ein Genüge thun.

Iſt NHα = HR×Mβ + HS×Nγ; ſo kann nach dem 1ſten, 3ten und 4ten Fall kein Ort gefunden werden, wenn aber noch überdiß NM : MH < NHα : HS×Nγ; ſo kann man nach dem 2ten Fall einen finden.

Würde hingegen erfodert, daß die Linie AH, welche nebſt einer gegebenen Linie Hα das der Summe der beyden übrigen gleiche Rechteck einſchließt, an die mittlere Parallele gezogen werde; ſo wird nach dem 5ten Fall ein Ort gefunden werden, wenn NM : MH > NHα : HS×Nγ, und zugleich NHα > HR×Mβ + HS×Nγ; nach dem 6ten

Fall aber könnte unter dieſen Bedingungen kein Ort gefunden werden, weil bey dem 6ten Fall nothwendig $NM : MH < NH\alpha : HS \times N\gamma$ ſeyn muß. Wenn wieder $NM : MH > NH\alpha : HS \times N\gamma$, aber $NH\alpha \gtreqless HR \times M\beta + HS \times N\gamma$; ſo kann weder nach dem 5ten noch nach dem 6ten Fall ein Ort gefunden werden, der Ort iſt alſo unmöglich. Iſt $NM : MH \leqslant NH\alpha : HS \times N\gamma$, ſo findet man einen Ort nach dem 6ten Fall, und, wenn überdiß $NH\alpha < HR \times M\beta + HS \times N\gamma$, ſo findet man noch einen andern nach dem 5ten Fall. Iſt $NM : MH = NH\alpha : HS \times N\gamma$, und zugleich $NH\alpha = HR \times M\beta + HS \times N\gamma$; ſo wird jeder Punkt auſſerhalb der Parallelen den Foderungen ein Genüge thun.

Finden aber die Beſtimmungen des 5ten und 6ten Falls Statt, wenn der Punkt A auf der Seite von DE liegt, auf welcher BC iſt, ſo werden ſie auch Statt finden, wenn er auf der andern Seite von DE iſt. Wenn alſo für den 5ten und 6ten Fall unter der erſten Vorausſezung, d. i. wenn der Punkt A mit BC auf einerley Seite von DE liegt, ein Ort verzeichnet werden kann; ſo kann in eben den Fällen auch einer verzeichnet werden, wenn der Punkt A auf der andern Seite von DE liegt.

Auf ähnliche Art nun wird man zu verfahren haben, wenn 4. oder mehrere Parallelen der Lage nach gegeben ſind, und die Summe der Rechteke, die zwiſchen einigen der aus einem Punkt an die Parallelen unter gegebenen Winkeln gezogenen Linien, und eben ſo viel gegebenen Linien enthalten ſind, gleich iſt der Summe der Rechteke, die zwiſchen den übrigen gezogenen und eben ſo viel gegebenen Linien enthalten ſind.

Berech-

Berechnung.

Fig. 35. a.

1. Fall. Hier iſt nach der Kompoſition

$$AH \times He = HM \times \alpha\delta + HN \times \delta e,$$

$$\text{und } \alpha\delta = \frac{HR.\ M\beta}{NH} = \frac{\text{fin. AHB. } M\beta}{\text{fin. AKD}} = \frac{\text{fin. ALF. fin. AHB. } M\beta}{\text{fin. ALF. fin. AKD}}$$

$$\delta e = \frac{HS.\ N\gamma}{NH} = \frac{\text{fin. AHB. } N\gamma}{\text{fin. ALF}} = \frac{\text{fin. AKD. fin. AHB. } N\gamma}{\text{fin. ALF. fin. AKD}}$$

$$He = H\alpha - (\alpha\delta + \delta e)$$

$$= \frac{NH \times H\alpha - (HR \times M\beta + HS \times N\gamma)}{NH}$$

$$= \frac{\text{fin. ALF. fin. AKD. } H\alpha - \text{fin. AHB (fin. ALF. } M\beta + \text{fin. AKD. } N\gamma)}{\text{fin. ALF. fin. AKD}}$$

Mithin iſt

$$AH = \frac{HM \times \alpha\delta + HN \times \delta e}{He}$$

$$= \frac{HM \times HR \times M\beta + HN \times HS \times N\gamma}{NH \times H\alpha - (HR \times M\beta + HS \times N\gamma)}$$

$$= \frac{\text{fin. AHB (HM. } M\beta\text{. fin. ALF} + \text{HN. } N\gamma\text{. fin. AKD)}}{H\alpha\text{. fin. ALF. fin. AKD} - \text{fin. AHB (}M\beta\text{. fin. ALF} + N\gamma\text{. fin. AKD)}}$$

Sind die Linien HM, HN nicht unmittelbar, sondern statt derselben die aus einem Punkt H der Linie BC auf die Parallelen DE, FG gefällten Perpendikel bekannt, und ist das auf DE gefällte Perpendikel = B, das auf FG gefällte Perpendikel = C; so wird, weil $HM = \frac{B}{\text{sin. AHB}}$, und $HN = \frac{C}{\text{sin. AHB}}$, die lezte Formel jezt diese:

$$AH = \frac{B.\ M\beta.\ \text{sin. ALF} + C.\ N\gamma.\ \text{sin. AKD}}{H\alpha.\ \text{sin. ALF. sin. AKD} - \text{sin. AHB}\ (M\beta.\ \text{sin. ALF} + N\gamma.\ \text{sin. AKD})}$$

Auch aus der Berechnung für diesen ersten Fall erhellet, was schon in der Bestimmung gesagt worden, daß nemlich $NH \times H\alpha > HR \times M\beta + HS \times N\gamma$ seyn muß. Für die übrigen Fälle wird die Rechnung ganz auf ähnliche Art geführt. Bey der wirklichen Anwendung wird es übrigens wohl bequemer seyn, die Linien αd, de, He einzeln zu berechnen, und daraus AH nach der ersten Formel herzuleiten, als diese Linie unmittelbar aus den ursprünglich gegebenen Stüken nach der lezten Formel zu berechnen.

2. Lehnſaz.

Wenn irgend eine Anzahl von Gröſſen ſo beſchaffen iſt, daß immer zwey und zwey einerley Verhältniß unter einander haben, und die Summe der Rechteke, die zwiſchen einigen der Vorderglieder und eben ſo viel geraden Linien enthalten ſind, gleich iſt der Summe der Rechteke, die zwiſchen den übrigen Vordergliedern, und eben ſo viel geraden Linien enthalten ſind; ſo wird auch die Summe der Rechteke, die zwiſchen den zu jenen erſtern Vordergliedern gehörigen Hintergliedern und den erſten gleichvielen geraden Linien enthalten ſind, gleich ſeyn der Summe der Rechteke, die zwiſchen den zu den zweyten Vordergliedern gehörigen Hintergliedern und den zweyten gleichvielen geraden Linien enthalten ſind.

Es ſeye $A : B = C : D = E : F$ u. ſ. w., und $A \times \alpha = C \times \gamma + E \times \varepsilon$; ſo wird auch $B \times \alpha = D \times \gamma + F \times \varepsilon$ ſeyn.

Denn nach 1, 6. iſt $A \times \alpha : B \times \alpha = C \times \gamma : D \times \gamma = E \times \varepsilon : F \times \varepsilon$. Folglich nach 12, 5. $A \times \alpha : B \times \alpha = C \times \gamma + E \times \varepsilon : D \times \gamma + F \times \varepsilon$. Nun iſt $A \times \alpha = C \times \gamma + E \times \varepsilon$, folglich auch $B \times \alpha = D \times \gamma + F \times \varepsilon$. Und auf ähnliche Art wird man bey mehreren Gröſſen ſchlieſſen.

27. Saz.

Wenn drey gerade Linien, die ſich alle in einerley Punkt ſchneiden, der Lage nach gegeben ſind, und das übrige bleibt wie im vorhergehenden Saz.

Fig. 36.

Es ſeyen die 3. geraden Linien BC, BE, BG der Lage nach gegeben, und an dieſelbe aus einem Punkt A 3. gerade Linien AH, AK, AL unter gegebenen Win-

keln gezogen, und es seye AH die Linie, die mit einer gegebenen geraden Linie α das Rechtek enthält, das der Summe der beyden übrigen Rechteke gleich ist, die zwischen den andern aus A gezogenen Linien, und zwischen den gegebenen geraden Linien β und γ enthalten sind. Die verlängerte Linie AH, die an BC gezogen ist, begegne den übrigen der Lage nach gegebenen Linien in den Punkten M, N, und wenn H ausserhalb dieser Punkte liegt, so seye M der Punkt, der zunächst bey H liegt, BE die gerade Linie, auf welcher der Punkt M liegt, folglich BG die gerade Linie, auf welcher der andere Punkt N liegt. Ist aber der Punkt H zwischen M und N, so seye der Punkt M der, welcher entweder zwischen den Punkten A, H, oder auf der verlängerten Linie HA nach A hin liegt, und BC seye die gerade Linie, auf welcher der Punkt M liegt, BG also die gerade Linie, auf welcher der Punkt N liegt. Es seye ferner β diejenige gegebene gerade Linie, welche eine Seite ist von dem Rechtek, dessen andere Seite die gerade Linie ist, die an diejenige von den der Lage nach gegebenen Linien aus dem Punkt A gezogen ist, auf welcher der Punkt M liegt, und γ seye die Seite des andern Rechteks. Wenn man nun dieses gehörig bemerkt; so wird man die Fälle des gegenwärtigen Sazes eben so unterscheiden können, wie die Fälle des vorhergehenden Sazes, nemlich vermittelst der Punkte A, H, M, N. Es wird nemlich in den 4 ersten Fällen der Punkt H auf der verlängerten Linie NM liegen, und der 1ste Fall wird seyn, wenn der Punkt A ausserhalb der übrigen Punkte H, M, N auf der Seite von H liegt; der 2te, wenn der Punkt A zwischen H und M; der 3te, wenn A zwischen M und N; der 4te, wenn A ausserhalb der übrigen Punkte auf der Seite von N liegt. In den beyden lezten Fällen liegt der Punkt H zwischen N und M, und der 5te Fall wird seyn, wenn A ausserhalb der übrigen Punkte liegt,

auf

welcher Seite es ſeyn mag. Endlich wird der 6te
ll ſeyn, wenn der Punkt A zwiſchen den übrigen Punk-
, alſo entweder zwiſchen M und H, oder zwiſchen N
d H liegt. Weil aber die Auflöſungen und Beſtim-
ungen aller dieſer Fälle nur wenig von denen unter-
ieden ſind, die wir bey dem vorigen Saz gebraucht
ben; ſo wird es genug ſeyn, nur den 1ſten Fall weiter
zuführen.

1. Fall. Wenn der Punkt A auſſerhalb der übri-
Punkte auf der Seite des Punktes H liegt, wo
nlich die Ordnung der Punkte, wie geſagt worden,
ſe iſt: A, H, M, N.

Weil das Dreyek AKM der Gattung nach gegeben
; ſo iſt das Verhältniß von AM zu AK gegeben. In
ſem Verhältniß ſeye β zu δ, weil nun β gegeben iſt;
iſt auch die gerade Linie δ gegeben, und es iſt $AM \times \delta$
$AK \times \beta$. Eben ſo, weil das Verhältniß von AN
AL gegeben iſt; ſo iſt, wenn man γ zu ε in eben
ſem Verhältniß nimmt, ε gegeben, und $AN \times \varepsilon$
$AL \times \gamma$. Es iſt aber nach der Vorausſezung $AH\alpha$
$AK \times \beta + AL \times \gamma$; alſo iſt auch $AH\alpha = (AM \times \delta$
$AN \times \varepsilon$, d. i. (1, 2. E. =) $AH \times \delta + HM \times \delta$
$AH \times \varepsilon + HN \times \varepsilon$, und, das gemeinſchaftliche Rechtek
$H \times (\delta + \varepsilon)$ abgezogen, iſt $AH \times [\alpha - (\delta + \varepsilon)] = HM \times \delta$
$HN \times \varepsilon$. Weil aber das Verhältniß von MH zu
und von HB zu HN gegeben iſt; ſo iſt auch das
rhältniß von MH zu HN gegeben. Nun ſind die
ien δ, ε, folglich auch ihr Verhältniß gegeben; alſo
(23, 6.) das Verhältniß von $HM \times \delta$ zu $HN \times \varepsilon$ ge-
en, folglich (7. D.) das Verhältniß der Summe von
$M \times \delta$ und $HN \times \varepsilon$ zu $HM \times \delta$, mithin das Verhält-
von $AH \times [\alpha - (\delta + \varepsilon)]$ zu $HM \times \delta$ gegeben. Es
) aber die geraden Linien α, δ, ε gegeben, alſo iſt (65.
) das Verhältniß von AH zu MH gegeben. Nun
das Verhältniß von MH zu HB, folglich auch das

Verhältniß von AH zu HB gegeben; und, weil überdiß der Winkel AHB gegeben iſt, ſo wird, wenn AB gezogen iſt, das Dreyek ABH der Gattung nach gegeben ſeyn (44. D.). Es iſt alſo der Winkel ABH gegeben, und weil BH der Lage nach, und überdiß auch der Punkt B gegeben iſt; ſo iſt (32. D.) AB der Lage nach gegeben. Der Punkt A berührt alſo eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Kompoſition.

Auf der geraden Linie BC nehme man irgend einen Punkt H, und ziehe an BG eine Linie NH, die mit BH einen Winkel mache, gleich dem gegebenen Winkel, den die aus A an BC zu ziehende Linie mit BC einſchlieſſen ſoll, und HN begegne der Linie BE in M. Ferner ziehe man aus H an BE eine gerade Linie, unter einem Winkel gleich dem gegebenen Winkel, unter dem aus A an BE eine Linie ſoll gezogen werden. Dieſer durch H an BE gezogenen Linie begegne eine durch N mit BE gleichlauffend gezogene Linie in dem Punkt R. Endlich ziehe man HS an BG unter dem dritten gegebenen Winkel. Es ſeyen ferner α, β, γ die gegebenen geraden Linien, welche Seiten ſeyn ſollen von den Rechteken, von denen die aus A an BC, BE, BG zu ziehenden Linien die andern Seiten ſind. Man nehme weiter $NH : HR = \beta : \delta$ und $NH : HS = \gamma : \varepsilon$. Weil nun bewieſen worden, daß $AH \times \alpha = AH \times \delta + HM \times \delta + AH \times \varepsilon + HN \times \varepsilon$; ſo iſt $AH \times \alpha > AH \times \delta + AH \times \varepsilon$, alſo muß $\alpha > \delta + \varepsilon$, folglich $NH \times \alpha > (NH \times \delta + NH \times \varepsilon$, d. i. wegen der angeführten Verhältniſſe $>) HR \times \beta + HS \times \gamma$ ſeyn, und diß iſt die Beſtimmung für dieſen Fall. Es ſeye alſo $NH \times \alpha > HR \times \beta + HS \times \gamma$; ſo wird rükwärts geſchloſſen werden, daß $\alpha > \delta + \varepsilon$. Der Ueberſchuß von α über die

Summe

mme von δ und ε seyn ζ, d. i. es seye α = δ + ε + ζ.
) man mache ein Rechtek O × P = HM × δ + HN × ε
i, 1. E.), und bestimme eine Linie Q so, daß ζ :
= P : Q, verlängere dann NH auf der Seite von H
an einen Punkt A, so daß HA = Q, und ziehe BA;
wird diß der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man aus
end einem Punkt a auf derselben an BC, BE, BG
Linien ah, ak, al mit HN, HR, HS gleichlauffend
)t; so ist ah × α = ak × β + al × γ. Denn, weil
h der Verzeichnung AH × ζ = (O × P, d. i. =)
M × δ + MN × ε; so ist, auf beyden Seiten das
chtek AH × (δ + ε) hinzu gesezt, das Rechtek AH ×
- ε + ζ), d. i. das Rechtek AH × α = AM × δ + AN × ε.
egen der gleichwinklichten Dreyeke aber ist AM : AK
(HN : HR, d. i. nach der Verzeichnung =) β : δ;
) AM × δ = AK × β. Auf ähnliche Art ist AN : AL
(HN : HS, d. i. =) γ : ε; also AN × ε = AL × γ.
lglich ist AH × α = AK × β + AL × γ. Und weil
H : ah = (BA : Ba, d. i. =) AK : ak = AL : al;
ist nach dem 4ten Lehnsaz ah × α = ak × β
al × γ.

Die übrigen 5. Fälle, wie auch diejenigen, wo eine
er mehrere der gezogenen Linien mit eben so vielen der
ge nach gegebenen geraden Linien gleichlauffen, wer-
n auf ähnliche Art ausgeführt werden können.

keln gezogen, und es seye AH die Linie, die mit einer gegebenen geraden Linie α das Rechtek enthält, das der Summe der beyden übrigen Rechteke gleich ist, die zwischen den andern aus A gezogenen Linien, und zwischen den gegebenen geraden Linien β und γ enthalten sind. Die verlängerte Linie AH, die an BC gezogen ist, begegne den übrigen der Lage nach gegebenen Linien in den Punkten M, N, und wenn H ausserhalb dieser Punkte liegt, so seye M der Punkt, der zunächst bey H liegt, BE die gerade Linie, auf welcher der Punkt M liegt, folglich BG die gerade Linie, auf welcher der andere Punkt N liegt. Ist aber der Punkt H zwischen M und N, so seye der Punkt M der, welcher entweder zwischen den Punkten A, H, oder auf der verlängerten Linie HA nach A hin liegt, und BC seye die gerade Linie, auf welcher der Punkt M liegt, BG also die gerade Linie, auf welcher der Punkt N liegt. Es seye ferner β diejenige gegebene gerade Linie, welche eine Seite ist von dem Rechtek, dessen andere Seite die gerade Linie ist, die an diejenige von den der Lage nach gegebenen Linien aus dem Punkt A gezogen ist, auf welcher der Punkt M liegt, und γ seye die Seite des andern Rechteks. Wenn man nun dieses gehörig bemerkt; so wird man die Fälle des gegenwärtigen Sazes eben so unterscheiden können, wie die Fälle des vorhergehenden Sazes, nemlich vermittelst der Punkte A, H, M, N. Es wird nemlich in den 4 ersten Fällen der Punkt H auf der verlängerten Linie NM liegen, und der 1ste Fall wird seyn, wenn der Punkt A ausserhalb der übrigen Punkte H, M, N auf der Seite von H liegt; der 2te, wenn der Punkt A zwischen H und M; der 3te, wenn A zwischen M und N; der 4te, wenn A ausserhalb der übrigen Punkte auf der Seite von N liegt. In den beyden lezten Fällen liegt der Punkt H zwischen N und M, und der 5te Fall wird seyn, wenn A ausserhalb der übrigen Punkte liegt,

auf

uf welcher Seite es seyn mag. Endlich wird der 6te all seyn, wenn der Punkt A zwischen den übrigen Punkn, also entweder zwischen M und H, oder zwischen N d H liegt. Weil aber die Auflösungen und Bestimungen aller dieser Fälle nur wenig von denen unterieden sind, die wir bey dem vorigen Saz gebraucht ben; so wird es genug seyn, nur den 1sten Fall weiter szuführen.

1. Fall. Wenn der Punkt A ausserhalb der übrin Punkte auf der Seite des Punktes H liegt, wo mlich die Ordnung der Punkte, wie gesagt worden, ese ist: A, H, M, N.

Weil das Dreyek AKM der Gattung nach gegeben ; so ist das Verhältniß von AM zu AK gegeben. In esem Verhältniß seye β zu δ, weil nun β gegeben ist; ist auch die gerade Linie δ gegeben, und es ist $AM \times \delta = AK \times \beta$. Eben so, weil das Verhältniß von AN AL gegeben ist; so ist, wenn man γ zu ε in eben esem Verhältniß nimmt, ε gegeben, und $AN \times \varepsilon = AL \times \gamma$. Es ist aber nach der Voraussezung $AH\alpha = AK \times \beta + AL \times \gamma$; also ist auch $AH\alpha = (AM \times \delta$ $AN \times \varepsilon$, d. i. (1, 2. E. =) $AH \times \delta + HM \times \delta$ $AH \times \varepsilon + HN \times \varepsilon$, und, das gemeinschaftliche Rechtek $H \times (\delta + \varepsilon)$ abgezogen, ist $AH \times [\alpha - (\delta + \varepsilon)] = HM \times \delta$ $HN \times \varepsilon$. Weil aber das Verhältniß von MH zu B und von HB zu HN gegeben ist; so ist auch das erhältniß von MH zu HN gegeben. Nun sind die ien δ, ε, folglich auch ihr Verhältniß gegeben; also (23, 6.) das Verhältniß von $HM \times \delta$ zu $HN \times \varepsilon$ geben, folglich (7. D.) das Verhältniß der Summe von $M \times \delta$ und $HN \times \varepsilon$ zu $HM \times \delta$, mithin das Verhältß von $AH \times [\alpha - (\delta + \varepsilon)]$ zu $HM \times \delta$ gegeben. Es d aber die geraden Linien α, δ, ε gegeben, also ist (65. .) das Verhältniß von AH zu MH gegeben. Nun das Verhältniß von MH zu HB, folglich auch das

Verhältniß von AH zu HB gegeben; und, weil überdiß der Winkel AHB gegeben iſt, ſo wird, wenn AB gezogen iſt, das Dreyek ABH der Gattung nach gegeben ſeyn (44. D.). Es iſt alſo der Winkel ABH gegeben, und weil BH der Lage nach, und überdiß auch der Punkt B gegeben iſt; ſo iſt (32. D.) AB der Lage nach gegeben. Der Punkt A berührt alſo eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Kompoſition.

Auf der geraden Linie BC nehme man irgend einen Punkt H, und ziehe an BG eine Linie NH, die mit BH einen Winkel mache, gleich dem gegebenen Winkel, den die aus A an BC zu ziehende Linie mit BC einſchlieſſen ſoll, und HN begegne der Linie BE in M. Ferner ziehe man aus H an BE eine gerade Linie, unter einem Winkel gleich dem gegebenen Winkel, unter dem aus A an BE eine Linie ſoll gezogen werden. Dieſer durch H an BE gezogenen Linie begegne eine durch N mit BE gleichlauffend gezogene Linie in dem Punkt R. Endlich ziehe man HS an BG unter dem dritten gegebenen Winkel. Es ſeyen ferner α, β, γ die gegebenen geraden Linien, welche Seiten ſeyn ſollen von den Rechteken, von denen die aus A an BC, BE, BG zu ziehenden Linien die andern Seiten ſind. Man nehme weiter $NH : HR = \beta : \delta$ und $NH : HS = \gamma : \varepsilon$. Weil nun bewieſen worden, daß $AH \times \alpha = AH \times \delta + HM \times \delta + AH \times \varepsilon + HN \times \varepsilon$; ſo iſt $AH \times \alpha > AH \times \delta + AH \times \varepsilon$, alſo muß $\alpha > \delta + \varepsilon$, folglich $NH \times \alpha > (NH \times \delta + NH \times \varepsilon$, d. i. wegen der angeführten Verhältniſſe $>) HR \times \beta + HS \times \gamma$ ſeyn, und diß iſt die Beſtimmung für dieſen Fall. Es ſeye alſo $NH \times \alpha > HR \times \beta + HS \times \gamma$; ſo wird rükwärts geſchloſſen werden, daß $\alpha > \delta + \varepsilon$. Der Ueberſchuß von α über die

Summe

Summe von δ und ε seyn ζ, d. i. es seye α = δ + ε + ζ, und man mache ein Rechtek O × P = HM × δ + HN × ε (45, 1. E.), und bestimme eine Linie Q so, daß ζ : O = P : Q, verlängere dann NH auf der Seite von H bis an einen Punkt A, so daß HA = Q, und ziehe BA; so wird diß der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man aus irgend einem Punkt a auf derselben an BC, BE, BG die Linien ah, ak, al mit HN, HR, HS gleichlauffend zieht; so ist ah × α = ak × β + al × γ. Denn, weil nach der Verzeichnung AH × ζ = (O × P, d. i. =) HM × δ + MN × ε; so ist, auf beyden Seiten das Rechtek AH × (δ + ε) hinzu gesezt, das Rechtek AH × (δ + ε + ζ), d. i. das Rechtek AH × α = AM × δ + AN × ε. Wegen der gleichwinklichten Dreyeke aber ist AM : AK = (HN : HR, d. i. nach der Verzeichnung =) β : δ; also AM × δ = AK × β. Auf ähnliche Art ist AN : AL = (HN : HS, d. i. =) γ : ε; also AN × ε = AL × γ. Folglich ist AH × α = AK × β + AL × γ. Und weil AH : ah = (BA : Ba, d. i. =) AK : ak = AL : al; so ist nach dem 2ten Lehnsaz ah × α = ak × β + al × γ.

Die übrigen 5. Fälle, wie auch diejenigen, wo eine oder mehrere der gezogenen Linien mit eben so vielen der Lage nach gegebenen geraden Linien gleichlauffen, werden auf ähnliche Art ausgeführt werden können.

Verhältniß von AH zu HB gegeben; und, weil überdiß der Winkel AHB gegeben iſt, ſo wird, wenn AB gezogen iſt, das Dreyek ABH der Gattung nach gegeben ſeyn (44. D.). Es iſt alſo der Winkel ABH gegeben, und weil BH der Lage nach, und überdiß auch der Punkt B gegeben iſt; ſo iſt (32. D.) AB der Lage nach gegeben. Der Punkt A berührt alſo eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Kompoſition.

Auf der geraden Linie BC nehme man irgend einen Punkt H, und ziehe an BG eine Linie NH, die mit BH einen Winkel mache, gleich dem gegebenen Winkel, den die aus A an BC zu ziehende Linie mit BC einſchlieſſen ſoll, und HN begegne der Linie BE in M. Ferner ziehe man aus H an BE eine gerade Linie, unter einem Winkel gleich dem gegebenen Winkel, unter dem aus A an BE eine Linie ſoll gezogen werden. Dieſer durch H an BE gezogenen Linie begegne eine durch N mit BE gleichlauffend gezogene Linie in dem Punkt R. Endlich ziehe man HS an BG unter dem dritten gegebenen Winkel. Es ſeyen ferner α, β, γ die gegebenen geraden Linien, welche Seiten ſeyn ſollen von den Rechteken, von denen die aus A an BC, BE, BG zu ziehenden Linien die andern Seiten ſind. Man nehme weiter $NH : HR = \beta : \delta$ und $NH : HS = \gamma : \varepsilon$. Weil nun bewieſen worden, daß $AH \times \alpha = AH \times \delta + HM \times \delta + AH \times \varepsilon + HN \times \varepsilon$; ſo iſt $AH \times \alpha > AH \times \delta + AH \times \varepsilon$, alſo muß $\alpha > \delta + \varepsilon$, folglich $NH \times \alpha > (NH \times \delta + NH \times \varepsilon$, d. i. wegen der angeführten Verhältniſſe $>) HR \times \beta + HS \times \gamma$ ſeyn, und diß iſt die **Beſtimmung für dieſen Fall.** Es ſeye alſo $NH \times \alpha > HR \times \beta + HS \times \gamma$; ſo wird rükwärts geſchloſſen werden, daß $\alpha > \delta + \varepsilon$. Der Ueberſchuß von α über die

Summe

Summe von δ und ε seyn ζ, d. i. es seye α = δ + ε + ζ, und man mache ein Rechtek O × P = HM × δ + HN × ε (45, 1. E.), und bestimme eine Linie Q so, daß ζ : O = P : Q, verlängere dann NH auf der Seite von H bis an einen Punkt A, so daß HA = Q, und ziehe BA; so wird diß der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man aus irgend einem Punkt a auf derselben an BC, BE, BG die Linien ah, ak, al mit HN, HR, HS gleichlauffend zieht; so ist ah × α = ak × β + al × γ. Denn, weil nach der Verzeichnung AH × ζ = (O × P, d. i. =) HM × δ + MN × ε; so ist, auf beyden Seiten das Rechtek AH × (δ + ε) hinzu gesezt, das Rechtek AH × (δ + ε + ζ), d. i. das Rechtek AH × α = AM × δ + AN × ε. Wegen der gleichwinklichten Dreyeke aber ist AM : AK = (HN : HR, d. i. nach der Verzeichnung =) β : δ; also AM × δ = AK × β. Auf ähnliche Art ist AN : AL = (HN : HS, d. i. =) γ : ε; also AN × ε = AL × γ. Folglich ist AH × α = AK × β + AL × γ. Und weil AH : ah = (BA : Ba, d. i. =) AK : ak = AL : al; so ist nach dem 2ten Lehnsaz ah × α = ak × β + al × γ.

Die übrigen 5. Fälle, wie auch diejenigen, wo eine oder mehrere der gezogenen Linien mit eben so vielen der Lage nach gegebenen geraden Linien gleichlauffen, werden auf ähnliche Art ausgeführt werden können.

Berechnung.

Fig. 36.

$\times AH = \beta \times AK + \gamma \times AL.$

$$\frac{\text{sin. ABC}}{\text{sin. H}}$$

$$\frac{\text{sin. (ABC + CBE)}}{\text{sin. K}}$$

$$\frac{\text{(sin. ABC. cosin. CBE + sin. CBE cosin. ABC)}}{\text{sin. K}}$$

$$\frac{\text{sin. (ABC + CBG)}}{\text{sin. L}}$$

$$\frac{\text{(sin. ABC. cosin. CBG + sin. CBG. cosin. ABC)}}{\text{sin. L}}$$

Mithin wird $\frac{\alpha \cdot \text{sin. ABC}}{\text{sin. H}} = \text{sin. ABC}\left(\frac{\beta \cdot \text{cosin. CBE}}{\text{sin. K}} + \frac{\gamma \cdot \text{cosin. CBG}}{\text{sin. L}}\right)$

$$+ \text{cosin. ABC}\left(\frac{\beta \cdot \text{sin. CBE}}{\text{sin. K}} + \frac{\gamma \cdot \text{sin. CBG}}{\text{sin. L}}\right)$$

$$\text{oder tang. ABC} = \frac{\frac{\beta \cdot \text{sin. CBE}}{\text{sin. K}} + \frac{\gamma \cdot \text{sin. CBG}}{\text{sin. L}}}{\frac{\alpha}{\text{sin. H}} - \frac{\beta \cdot \text{cosin. CBE}}{\text{sin. K}} - \frac{\gamma \cdot \text{cosin. CBG}}{\text{sin. L}}}$$

Ganz ähnlich ist die Berechnung für die übrigen Fälle.

3. Lehnſaz.

Fig. 37.

Wenn man in einem Dreyek BCD aus einem Winkelpunkt B eine Linie BG mit der gegen über ſtehenden Seite CD gleichlauffend, und aus einem Punkt A auf der Linie BG an die beyden andern Seiten des Dreyeks BC, BD oder an ihre Verlängerungen zwey gerade Linien AE, AF zieht; ſo werden dieſe Linien AE, AF eben das Verhältniß unter einander haben, welches die Linien DQ, CR haben, die an eben dieſe Seiten des Dreyeks aus den ihnen entgegengeſezten Winkeln mit AE, AF gleichlauffend gezogen werden. Und eben diß wird Statt finden, wenn man anſtatt der Linien BC, BG die Linien MK, MH nimmt, die aus irgend einem Punkt M auf der Linie BD mit BC, BG gleichlauffend gezogen werden; nemlich, wenn man an MK, BD die Linien HK, HL mit DQ, CR gleichlauffend zieht; ſo wird HK: HL = DQ: CR ſeyn.

Denn, wegen der gleichwinklichten Dreyeke AEB, DQC iſt AE: AB = DQ: DC, wegen der gleichwinklichten Dreyeke ABF, CDR aber iſt AB: AF = DC: CR; folglich gleichförmig (ex aequo) AE: AF = DQ: CR, und völlig auf die nemliche Art wird bewieſen, daß HK: HL = DQ: CR.

4. Lehnſaz.

Fig. 38.

Wenn, wie im vorigen Lehnſaz, wieder BG mit der gegen über ſtehenden Seite des Dreyeks DC gleichlauffend, und CB nach E hin verlängert iſt; und man zieht aus einem Punkt H innerhalb des Winkels GBD an CB, und BD die Linien HK, HL mit DQ, CR gleich-

Gleichlauffend; so ist HK : HL > DQ : CR. Ist hingegen, die übrigen Umstände gleich, der Punkt H innerhalb des Winkels GBE; so ist HK : HL < DQ : CR. Und umgekehrt, wenn aus einem Punkt H innerhalb des äussern Winkels eines Dreyeks, oder innerhalb des Scheitel-Winkels von diesem zwey gerade Linien HK, HL mit DQ, CR gleichlauffend gezogen werden, und HK : HL > DQ : GR; so liegt der Punkt H innerhalb des Winkels GBD, oder innerhalb seines Scheitel-Winkels, also begegnet die Linie BH der verlängerten Seite CD auf der Seite von D. Ist aber HK : HL < DQ : CR; so liegt der Punkt H innerhalb des Winkels GBE, oder innerhalb seines Scheitel-Winkels, also begegnet BH der verlängerten Seite CD auf der Seite von C. Ist endlich HK : HL = DQ : CR; so ist BH mit CD gleichlauffend.

Es seye erstens der Punkt H innerhalb des Winkels GBD oder innerhalb seines Scheitel-Winkels, und HK begegne der Linie BG in dem Punkt M, aus diesem ziehe man an BD die Linie MN mit HL gleichlauffend, und durch die Punkte K, N die Linie KN, die der Linie HL in O begegne. Es ist also HK : HL > HK : HO, d. i. > KM : MN, d. i. > DQ : CR.

Wenn der Punkt H innerhalb des Winkels GBE liegt; so wird man völlig auf ähnliche Art beweisen, daß HK : HL < DQ : CR.

Umgekehrt, wenn der Punkt H innerhalb des äussern Winkels des Dreyeks, oder innerhalb des Scheitel-Winkels von diesem liegt, und HK : HL > DQ : CR; so liegt H innerhalb des Winkels GBD. Denn es seye diß nicht, und der Punkt H liege, wenn es möglich ist, entweder 1. auf der Linie BG, oder 2. innerhalb des Winkels GBE, oder seines Scheitel-Winkels; so würde im ersten Fall nach dem vorhergehenden Lehnsz HK : HL = DQ : CR, im 2ten Fall aber nach dem

gegen-

Berechnung.

Fig. 36.

$$\alpha \times AH = \beta \times AK + \gamma \times AL.$$

$$\frac{\text{sin. ABC}}{\text{sin. H}}$$

$$\frac{\text{sin. (ABC + CBE)}}{\text{sin. K}}$$

$$\frac{\text{(sin. ABC. cosin. CBE + sin. CBE cosin. ABC)}}{\text{sin. K}}$$

$$\frac{\text{sin. (ABC + CBG)}}{\text{sin. L}}$$

$$\frac{\text{(sin. ABC. cosin. CBG + sin. CBG. cosin. ABC)}}{\text{sin. L}}$$

Mithin wird $\frac{\alpha \cdot \text{sin. ABC}}{\text{sin. H}} = \text{sin. ABC}\left(\frac{\beta \cdot \text{cosin. CBE}}{\text{sin. K}} + \frac{\gamma \cdot \text{cosin. CBG}}{\text{sin. L}}\right)$

$$+ \text{cosin. ABC}\left(\frac{\beta \cdot \text{sin. CBE}}{\text{sin. K}} + \frac{\gamma \cdot \text{sin. CBG}}{\text{sin. L}}\right)$$

oder $\text{tang. ABC} = \dfrac{\dfrac{\beta \cdot \text{sin. CBE}}{\text{sin. K}} + \dfrac{\gamma \cdot \text{sin. CBG}}{\text{sin. L}}}{\dfrac{\alpha}{\text{sin. H}} - \dfrac{\beta \cdot \text{cosin. CBE}}{\text{sin. K}} - \dfrac{\gamma \cdot \text{cosin. CBG}}{\text{sin. L}}}$

Ganz ähnlich ist die Berechnung für die übrigen Fälle.

Berechnung.

Fig. 36.

$\times AH = \beta \times AK + \gamma \times AL.$

$$\frac{\text{fin. ABC}}{\text{fin. H}}$$

$$\frac{\text{fin. (ABC + CBE)}}{\text{fin. K}}$$

$$\frac{\text{(fin. ABC. cofin. CBE + fin. CBE cofin. ABC)}}{\text{fin. K}}$$

$$\frac{\text{fin. (ABC + CBG)}}{\text{fin. L}}$$

$$\frac{\text{(fin. ABC. cofin. CBG + fin. CBG. cofin. ABC)}}{\text{fin. L}}$$

Mithin wird $\frac{\alpha \cdot \text{sin. ABC}}{\text{sin. H}} = \text{sin. ABC}\left(\frac{\beta \cdot \text{cosin. CBE}}{\text{sin. K}} + \frac{\gamma \cdot \text{cosin. CBG}}{\text{sin. L}}\right)$

$$+ \text{cosin. ABC}\left(\frac{\beta \cdot \text{sin. CBE}}{\text{sin. K}} + \frac{\gamma \cdot \text{sin. CBG}}{\text{sin. L}}\right)$$

$$\text{oder tang. ABC} = \frac{\frac{\beta \cdot \text{sin. CBE}}{\text{sin. K}} + \frac{\gamma \cdot \text{sin. CBG}}{\text{sin. L}}}{\frac{\alpha}{\text{sin. H}} - \frac{\beta \cdot \text{cosin. CBE}}{\text{sin. K}} - \frac{\gamma \cdot \text{cosin. CBG}}{\text{sin. L}}}$$

Ganz ähnlich ist die Berechnung für die übrigen Fälle.

Fig. 36.

Beweis.

$\beta \times AH = \beta \times AK + \gamma \times AL$.

$$\frac{\text{fin. ABC}}{\text{fin. (ABC + CBE)}} = \frac{\text{fin. H}}{\text{fin. K}}$$

$$\frac{\text{(fin. ABC. cofin. CBE + fin. CBE cofin. ABC)}}{\text{fin. K}} = \frac{\text{fin. K}}{\text{fin. (ABC + CBG)}}$$

$$\frac{\text{fin. L}}{\text{(fin. ABC. cofin. CBG + fin. CBG. cofin. ABC)}} = \frac{\text{fin. L}}{\text{fin. L}}$$

Mithin wird $\frac{\alpha \cdot \text{sin. ABC}}{\text{sin. H}} = \text{sin. ABC}\left(\frac{\beta \cdot \text{cosin. CBE}}{\text{sin. K}} + \frac{\gamma \cdot \text{cosin. CBG}}{\text{sin. L}}\right)$

$$+ \text{cosin. ABC}\left(\frac{\beta \cdot \text{sin. CBE}}{\text{sin. K}} + \frac{\gamma \cdot \text{sin. CBG}}{\text{sin. L}}\right)$$

$$\text{oder tang. ABC} = \frac{\frac{\beta \cdot \text{sin. CBE}}{\text{sin. K}} + \frac{\gamma \cdot \text{sin. CBG}}{\text{sin. L}}}{\frac{\alpha}{\text{sin. H}} - \frac{\beta \cdot \text{cosin. CBE}}{\text{sin. K}} - \frac{\gamma \cdot \text{cosin. CBG}}{\text{sin. L}}}$$

Ganz ähnlich ist die Berechnung für die übrigen Fälle.

3. Lehnſaz.

Fig. 37.

Wenn man in einem Dreyek BCD aus einem Winkelpunkt B eine Linie BG mit der gegen über ſtehenden Seite CD gleichlauffend, und aus einem Punkt A auf der Linie BG an die beyden andern Seiten des Dreyeks BC, BD oder an ihre Verlängerungen zwey gerade Linien AE, AF zieht; ſo werden dieſe Linien AE, AF eben das Verhältniß unter einander haben, welches die Linien DQ, CR haben, die an eben dieſe Seiten des Dreyeks aus den ihnen entgegengeſezten Winkeln mit AE, AF gleichlauffend gezogen werden. Und eben diß wird Statt finden, wenn man auſtatt der Linien BC, BG die Linien MK, MH nimmt, die aus irgend einem Punkt M auf der Linie BD mit BC, BG gleichlauffend gezogen werden; nemlich, wenn man an MK, BD die Linien HK, HL mit DQ, CR gleichlauffend zieht; ſo wird HK: HL = DQ: CR ſeyn.

Denn, wegen der gleichwinklichten Dreyeke AEB, DQC iſt AE: AB = DQ: DC, wegen der gleichwinklichten Dreyeke ABF, CDR aber iſt AB: AF = DC: CR; folglich gleichförmig (ex aequo) AE: AF = DQ: CR, und völlig auf die nemliche Art wird bewieſen, daß HK: HL = DQ: CR.

4. Lehnſaz.

Fig. 38.

Wenn, wie im vorigen Lehnſaz, wieder BG mit der gegen über ſtehenden Seite des Dreyeks DC gleichlauffend, und CB nach E hin verlängert iſt; und man zieht aus einem Punkt H innerhalb des Winkels GBD an CB, und BD die Linien HK, HL mit DQ, CR gleich-

gleichlauffend; ſo iſt HK : HL > DQ : CR. Iſt hingegen, die übrigen Umſtände gleich, der Punkt H innerhalb des Winkels GBE; ſo iſt HK : HL < DQ : CR. Und umgekehrt, wenn aus einem Punkt H innerhalb des äuſſern Winkels eines Dreyeks, oder innerhalb des Scheitel-Winkels von dieſem zwey gerade Linien HK, HL mit DQ, CR gleichlauffend gezogen werden, und HK : HL > DQ : GR; ſo liegt der Punkt H innerhalb des Winkels GBD, oder innerhalb ſeines Scheitel-Winkels, alſo begegnet die Linie BH der verlängerten Seite CD auf der Seite von D. Iſt aber HK : HL < DQ : CR; ſo liegt der Punkt H innerhalb des Winkels GBE, oder innerhalb ſeines Scheitel-Winkels, alſo begegnet BH der verlängerten Seite CD auf der Seite von C. Iſt endlich HK : HL = DQ : CR; ſo iſt BH mit CD gleichlauffend.

Es ſeye erſtens der Punkt H innerhalb des Winkels GBD oder innerhalb ſeines Scheitel-Winkels, und HK begegne der Linie BG in dem Punkt M, aus dieſem ziehe man an BD die Linie MN mit HL gleichlauffend, und durch die Punkte K, N die Linie KN, die der Linie HL in O begegne. Es iſt alſo HK : HL > HK : HO, d. i. > KM : MN, d. i. > DQ : CR.

Wenn der Punkt H innerhalb des Winkels GBE liegt; ſo wird man völlig auf ähnliche Art beweiſen, daß HK : HL < DQ : CR.

Umgekehrt, wenn der Punkt H innerhalb des äuſſern Winkels des Dreyeks, oder innerhalb des Scheitel-Winkels von dieſem liegt, und HK : HL > DQ : CR; ſo liegt H innerhalb des Winkels GBD. Denn es ſeye diß nicht, und der Punkt H liege, wenn es möglich iſt, entweder 1. auf der Linie BG, oder 2. innerhalb des Winkels GBE, oder ſeines Scheitel-Winkels; ſo würde im erſten Fall nach dem vorhergehenden Lehnſatz HK : HL = DQ : CR, im 2ten Fall aber nach dem

gegen-

gegenwärtigen Lehnſaz HK : HL < DQ : CR ſeyn. Es iſt aber HK : HL > DQ : CR; alſo muß der Punkt H innerhalb des Winkels GBD liegen, folglich die Linie BH der gegen D hin verlängerten Seite CD begegnen. Auf ähnliche Art wird der umgekehrte Saz für die übrigen Fälle bewieſen.

28. Saz.

Wenn 3 gerade Linien der Lage nach gegeben ſind, die weder alle unter einander gleichlaufend ſind, noch ſich alle in einem Punkt ſchneiden, und das übrige bleibt, wie beym zweyten Saz.

Fig. 39.

Aus einem Punkt A eines der 3. der Lage nach gegebenen geraden Linien BC, BD, CD z. gerade Linien AE, AF, AG unter den Winkeln AEB, AFD, AGC gezogen, welche gegen die den gegebenen Winkeln Q, R, S, und es wie das Rechteck aus zweyten AE und einer gegebenen geraden Linie a einfachen k, gleich der Summe der beyden Rechtecke wovon das eine zwiſchen b und einer gegebenen geraden Linie c das andere

den Linie CD in einem Punkte H begegnet, und man an BC, BD die geraden Linien HK, HL mit AE, AF gleichlauffend zieht; so ist offenbahr, daß $HK \times \alpha = HL \times \beta$ seyn wird; denn, weil der Punkt H auf der Linie CD selber liegt, so kann man aus ihm keine gerade Linie an CD ziehen. Und umgekehrt, wenn es auf der geraden Linie CD einen Punkt H giebt, so, daß $HK \times \alpha = HL \times \beta$, oder, welches das nemliche ist, daß $HK : HL = \beta : \alpha$; so ist klar, daß dieser Punkt H. auf dem gesuchten Ort liegen werde. Man wird aber immer einen Punkt H von dieser Beschaffenheit auf der Linie CD finden können; denn, eine gerade Linie, die innerhalb des Winkels CBD liegt, und ein Ort ist von der Beschaffenheit, daß zwey aus irgend einem Punkt desselben an BC, BD unter den gegebenen Winkeln Q, R gezogene Linien das gegebene Verhältniß, wie β zu α unter einander haben, eine solche gerade Linie, sage ich, geht nach dem Zus. des 23sten Satzes immer durch den Punkt B, und muß also der gegen über stehenden Seite CD nothwendig begegnen. Es seye diß die gerade Linie BH, die der Linie CD in H begegne; so ist folglich der Punkt H gegeben, und, wenn man an BC, BD die Linien HK, HL mit AE, AF gleichlauffend zieht; so ist $HK : HL = \beta : \alpha$, also $HK \times \alpha = HL \times \beta$. Man ziehe die Linie AH, die der Seite BD in M begegne, durch die Punkte K und M ziehe man die Linie KM, die der Seite AE in N begegne, und an EC, CD ziehe man MO, MP mit AE, AG gleichlauffend. Es ist also wegen der Parallelen $AN : AK = (AM : MH$, d. i. $=)$ $AF : HL$, folglich auch $AN \times \alpha : HK \times \alpha = AF \times \beta : HL \times \beta$. Nun ist bewiesen worden, daß $HK \times \alpha = HL \times \beta$, folglich ist auch $AN \times \alpha = AF \times \beta$. Nach der Voraussezung aber ist $AE \times \alpha = AF \times \beta + AG \times \gamma$, folglich bleibt, $AN \times \alpha$ oder $AF \times \beta$ hinweg genommen, $NE \times \alpha = AG \times \gamma$. Und wegen der Parallelen

ist

ist NE: MO = (NK: MK, d. i. = AH: MH, d. i. =) AG: MP. Also ist NE×α: MO×α = AG×γ: MP×γ. Nun ist bewiesen worden, daß NE×α = AG×γ; folglich ist auch MO×α = MP×γ, d. i. MO: MP = γ: α, d. i. in einem gegebenen Verhältniß. Weil also aus einem Punkt M an 2. der Lage nach gegebene gerade Linien BC, CD, die einander in einem Punkt C begegnen, 2. Linien MO, MP, die ein gegebenes Verhältniß unter einander haben, unter gegebenen Winkeln gezogen worden; so berührt der Punkt M eine der Lage nach gegebene gerade Linie nach dem 23sten Saz; nun berührt aber der Punkt M auch die der Lage nach gegebene gerade Linie BD, folglich ist er gegeben; es ist aber gezeigt worden, daß auch der Punkt H gegeben seye; mithin ist die gerade Linie HM der Lage nach gegeben; also berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Kompositon.

Man finde nach dem 23sten Saz die gerade Linie BH innerhalb des Winkels CBD, so, daß sie ein Ort sey von der Beschaffenheit, daß, wenn man aus irgend einem Punkt H auf derselben an die Linien BC, BD zwey gerade Linien HK, HL unter den Winkeln Q, R zieht, HK: HL = β: α, d. i. daß HK×α = HL×β seye. Die Linie BH begegne der Seite CD in H. Eben so finde man innerhalb des Winkels BCD die gerade Linie CM, so, daß, wenn man aus irgend einem Punkt M auf derselben an BC, CD zwey gerade Linien MO, MP unter den Winkeln Q, S zieht, MO×α = MP×γ seye. Die Linie CM begegne der Seite BD in M, und durch die Punkte M, und H ziehe man die Linie HM; so wird diese der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man aus irgend einem Punkt A auf derselben innerhalb des Winkels

kels BDC an BC, BD, CD die gerade Linien AE, AF, AG unter den gegebenen Winkeln zieht; so wird $AE \times \alpha = AF \times \beta + AG \times \gamma$ seyn. Denn man ziehe die Linie MK, die der Linie AE in N begegne; so ist wegen der Parallelen und nach 1, 6. E. $AN \times \alpha : HK \times \alpha = AF \times \beta : HL \times \beta$. Nach der Verzeichnung aber ist $HK \times \alpha = HL \times \beta$, mithin ist auch $AN \times \alpha = AF \times \beta$. Eben so ist wegen der Parallelen, und nach 1, 6. E. $NE \times \alpha : MO \times \alpha = AG \times \gamma : MP \times \gamma$, nach der Verzeichnung aber ist $MO \times \alpha = MP \times \gamma$, folglich ist auch $NE \times \alpha = AG \times \gamma$. Nun ist gezeigt worden, daß auch $AN \times \alpha = AF \times \beta$ seye, folglich ist, auf beyden Seiten gleiche Rechteke hinzu gefügt, $AE \times \alpha = AF \times \beta + AG \times \gamma$.

Fig. 39. b.

Werden aber aus irgend einem Punkt A auf demjenigen Stük der verlängerten geraden Linie HM, das innerhalb des Nebenwinkels von BCD liegt, an die Linien BC, BD, CD die gerade Linien AE, AF, AG unter den gegebenen Winkeln gezogen; so ist in diesem Fall AE der Ueberschuß von AN über NE, folglich ist in diesem Fall $AE \times \alpha = AF \times \beta - AG \times \gamma$.

Fig. 39. c.

Werden endlich aus einem Punkt A auf irgend einem andern Stük der Linie HM die Linien AE, AF, AG gezogen, wie gesagt worden; so ist $AE \times \alpha = AG \times - AF \times \beta$, welches ganz wie bey der vorhergehenden Komposition bewiesen wird.

Uebrigens hat dieser Fall, in welchem nemlich die Punkte H, M auf den Seiten CD, BD des Dreyeks selbst liegen, keine Bestimmung.

3. Lehnſaz.

Fig. 37.

Wenn man in einem Dreyek BCD aus einem Winkelpunkt B eine Linie BG mit der gegen über ſtehenden Seite CD gleichlauffend, und aus einem Punkt A auf der Linie BG an die beyden andern Seiten des Dreyeks BC, BD oder an ihre Verlängerungen zwey gerade Linien AE, AF zieht; ſo werden dieſe Linien AE, AF eben das Verhältniß unter einander haben, welches die Linien DQ, CR haben, die an eben dieſe Seiten des Dreyeks aus den ihnen entgegengeſezten Winkeln mit AE, AF gleichlauffend gezogen werden. Und eben diß wird Statt finden, wenn man anſtatt der Linien BC, BG die Linien MK, MH nimmt, die aus irgend einem Punkt M auf der Linie BD mit BC, BG gleichlauffend gezogen werden; nemlich, wenn man an MK, BD die Linien HK, HL mit DQ, CR gleichlauffend zieht; ſo wird HK: HL = DQ: CR ſeyn.

Denn, wegen der gleichwinklichten Dreyeke AEB, DQC iſt AE: AB = DQ: DC, wegen der gleichwinklichten Dreyeke ABF, CDR aber iſt AB: AF = DC: CR; folglich gleichförmig (ex aequo) AE: AF = DQ: CR, und völlig auf die nemliche Art wird bewieſen, daß

gleichlauffend; so ist HK : HL > DQ : CR. Ist hingegen, die übrigen Umstände gleich, der Punkt H innerhalb des Winkels GBE; so ist HK : HL < DQ : CR. Und umgekehrt, wenn aus einem Punkt H innerhalb des äussern Winkels eines Dreyeks, oder innerhalb des Scheitel-Winkels von diesem zwey gerade Linien HK, HL mit DQ, CR gleichlauffend gezogen werden, und HK : HL > DQ : GR; so liegt der Punkt H innerhalb des Winkels GBD, oder innerhalb seines Scheitel-Winkels, also begegnet die Linie BH der verlängerten Seite CD auf der Seite von D. Ist aber HK : HL < DQ : CR; so liegt der Punkt H innerhalb des Winkels GBE, oder innerhalb seines Scheitel-Winkels, also begegnet BH der verlängerten Seite CD auf der Seite von C. Ist endlich HK : HL = DQ : CR; so ist BH mit CD gleichlauffend.

Es seye erstens der Punkt H innerhalb des Winkels GBD oder innerhalb seines Scheitel-Winkels, und HK begegne der Linie BG in dem Punkt M, aus diesem ziehe man an BD die Linie MN mit HL gleichlauffend, und durch die Punkte K, N die Linie KN, die der Linie HL in O begegne. Es ist also HK : HL > HK : HO, d. i. > KM : MN, d. i. > DQ : CR.

Wenn der Punkt H innerhalb des Winkels GBE liegt; so wird man völlig auf ähnliche Art beweisen, daß HK : HL < DQ : CR.

Umgekehrt, wenn der Punkt H innerhalb des äussern Winkels des Dreyeks, oder innerhalb des Scheitel-Winkels von diesem liegt, und HK : HL > DQ : CR; so liegt H innerhalb des Winkels GBD. Denn es seye diß nicht, und der Punkt H liege, wenn es möglich ist, entweder 1. auf der Linie BG, oder 2. innerhalb des Winkels GBE, oder seines Scheitel-Winkels; so würde im ersten Fall nach dem vorhergehenden Lehnsatz HK : HL = DQ : CR, im 2ten Fall aber nach dem

gegen-

gegenwärtigen Lehnſaz HK : HL < DQ : CR ſeyn. Es iſt aber HK : HL > DQ : CR; alſo muß der Punkt H innerhalb des Winkels GBD liegen, folglich die Linie BH der gegen D hin verlängerten Seite CD begegnen. Auf ähnliche Art wird der umgekehrte Saz für die übrigen Fälle bewieſen.

28. Saz.

Wenn 3 gerade Linien der Lage nach gegeben ſind, die weder alle unter einander gleichlauffend ſind, noch ſich alle in einem Punkt ſchneiden, und das übrige bleibt, wie beym 26ſten Saz.

Fig. 39.

Aus einem Punkt A ſeyen an die 3. der Lage nach gegebenen geraden Linien BC, BD, CD 3. gerade Linien AE, AF, AG unter den Winkeln AEB, AFD, AGC gezogen, welche gleich ſind den gegebenen Winkeln Q, R, S, und es ſeye das Rechtek, das zwiſchen AE und einer gegebenen geraden Linie α enthalten iſt, gleich der Summe der beyden Rechteke, wovon das eine zwiſchen AF und einer gegebenen geraden Linie β, das andere zwiſchen AG und einer gegebenen geraden Linie γ enthalten iſt; ſo berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Fig. 39. a.

1. Fall. Wenn der Punkt A innerhalb des Dreyeks BCD liegt, das zwiſchen den der Lage nach gegebenen geraden Linien eingeſchloſſen iſt.

Wenn der Ort der Punkte A, von was für einer Beſchaffenheit er nun auch immer ſeyn mag, der geraden

den Linie CD in einem Punkt H begegnet, und man an BC, BD die geraden Linien HK, HL mit AE, AF gleichlauffend zieht; so ist offenbahr, daß $HK \times \alpha = HL \times \beta$ seyn wird; denn, weil der Punkt H auf der Linie CD selber liegt, so kann man aus ihm keine gerade Linie an CD ziehen. Und umgekehrt, wenn es auf der geraden Linie CD einen Punkt H giebt, so, daß $HK \times \alpha = HL \times \beta$, oder, welches das nemliche ist, daß $HK : HL = \beta : \alpha$; so ist klar, daß dieser Punkt H auf dem gesuchten Ort liegen werde. Man wird aber immer einen Punkt H von dieser Beschaffenheit auf der Linie CD finden können; denn, eine gerade Linie, die innerhalb des Winkels CBD liegt, und ein Ort ist von der Beschaffenheit, daß zwey aus irgend einem Punkt desselben an BC, BD unter den gegebenen Winkeln Q, R gezogene Linien das gegebene Verhältniß, wie β zu α unter einander haben, eine solche gerade Linie, sage ich, geht nach dem Zus. des 23sten Sazes immer durch den Punkt B, und muß also der gegen über stehenden Seite CD nothwendig begegnen. Es seye diß die gerade Linie BH, die der Linie CD in H begegne; so ist folglich der Punkt H gegeben, und, wenn man an BC, BD die Linien HK, HL mit AE, AF gleichlauffend zieht; so ist $HK : HL = \beta : \alpha$, also $HK \times \alpha = HL \times \beta$. Man ziehe die Linie AH, die der Seite BD in M begegne, durch die Punkte K und M ziehe man die Linie KM, die der Seite AE in N begegne, und an BC, CD ziehe man MO, MP mit AE, AG gleichlauffend. Es ist also wegen der Parallelen $AN : AK = (AM : MH$, d. i. $=)$ $AF : HL$, folglich auch $AN \times \alpha : HK \times \alpha = AF \times \beta : HL \times \beta$. Nun ist bewiesen worden, daß $HK \times \alpha = HL \times \beta$, folglich ist auch $AN \times \alpha = AF \times \beta$. Nach der Voraussezung aber ist $AE \times \alpha = AF \times \beta + AG \times \gamma$, folglich bleibt, $AN \times \alpha$ oder $AF \times \beta$ hinweg genommen, $NE \times \alpha = AG \times \gamma$. Und wegen der Parallelen

ist

ist NE: MO = (NK: MK, d. i. = AH: MH, d. i. =) AG: MP. Also ist NE×α: MO×α = AG×γ: MP×γ. Nun ist bewiesen worden, daß NE×α = AG×γ; folglich ist auch MO×α = MP×γ, d. i. MO: MP = γ: α, d. i. in einem gegebenen Verhältniß. Weil also aus einem Punkt M an 2. der Lage nach gegebene gerade Linien BC, CD, die einander in einem Punkt C begegnen, 2. Linien MO, MP, die ein gegebenes Verhältniß unter einander haben, unter gegebenen Winkeln gezogen worden; so berührt der Punkt M eine der Lage nach gegebene gerade Linie nach dem 23sten Saz; nun berührt aber der Punkt M auch die der Lage nach gegebene gerade Linie BD, folglich ist er gegeben; es ist aber gezeigt worden, daß auch der Punkt H gegeben seye; mithin ist die gerade Linie HM der Lage nach gegeben; also berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Kompositon.

Man finde nach dem 23sten Saz die gerade Linie BH innerhalb des Winkels CBD, so, daß sie ein Ort sey von der Beschaffenheit, daß, wenn man aus irgend einem Punkt H auf derselben an die Linien BC, BD zwey gerade Linien HK, HL unter den Winkeln Q, R zieht, HK: HL = β: α, d. i. daß HK×α = HL×β seye. Die Linie BH begegne der Seite CD in H. Eben so finde man innerhalb des Winkels BCD die gerade Linie CM, so, daß, wenn man aus irgend einem Punkt M auf derselben an BC, CD zwey gerade Linien MO, MP unter den Winkeln Q, S zieht, MO×α = MP×γ seye. Die Linie CM begegne der Seite BD in M, und durch die Punkte M, und H ziehe man die Linie HM; so wird diese der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man aus irgend einem Punkt A auf derselben innerhalb des Winkels

kels BDC an BC, BD, CD die gerade Linien AE, AF, AG unter den gegebenen Winkeln zieht; so wird $AE \times \alpha = AF \times \beta + AG \times \gamma$ seyn. Denn man ziehe die Linie MK, die der Linie AE in N begegne; so ist wegen der Parallelen und nach 1, 6. E. $AN \times \alpha : HK \times \alpha = AF \times \beta : HL \times \beta$. Nach der Verzeichnung aber ist $HK \times \alpha = HL \times \beta$, mithin ist auch $AN \times \alpha = AF \times \beta$. Eben so ist wegen der Parallelen, und nach 1, 6. E. $NE \times \alpha : MO \times \alpha = AG \times \gamma : MP \times \gamma$, nach der Verzeichnung aber ist $MO \times \alpha = MP \times \gamma$, folglich ist auch $NE \times \alpha = AG \times \gamma$. Nun ist gezeigt worden, daß auch $AN \times \alpha = AF \times \beta$ seye, folglich ist, auf beyden Seiten gleiche Rechteke hinzu gefügt, $AE \times \alpha = AF \times \beta + AG \times \gamma$.

Fig. 39. b.

Werden aber aus irgend einem Punkt A auf demjenigen Stük der verlängerten geraden Linie HM, das innerhalb des Nebenwinkels von BCD liegt, an die Linien BC, BD, CD die gerade Linien AE, AF, AG unter den gegebenen Winkeln gezogen; so ist in diesem Fall AE der Ueberschuß von AN über NE, folglich ist in diesem Fall $AE \times \alpha = AF \times \beta - AG \times \gamma$.

Fig. 39. c.

Werden endlich aus einem Punkt A auf irgend einem andern Stük der Linie HM die Linien AE, AF, AG gezogen, wie gesagt worden; so ist $AE \times \alpha = AG \times - AF \times \beta$, welches ganz wie bey der vorhergehenden Komposition bewiesen wird.

Uebrigens hat dieser Fall, in welchem nemlich die Punkte H, M auf den Seiten CD, BD des Dreyeks selbst liegen, keine Bestimmung.

ist NE : MO = (NK : MK, d. i. = AH : MH, d. i. =) AG : MP. Also ist NE × α : MO × α = AG × γ : MP × γ. Nun ist bewiesen worden, daß NE × α = AG × γ; folglich ist auch MO × α = MP × γ, d. i. MO : MP = γ : α, d. i. in einem gegebenen Verhältniß. Weil also aus einem Punkt M an 2. der Lage nach gegebene gerade Linien BC, CD, die einander in einem Punkt C begegnen, 2. Linien MO, MP, die ein gegebenes Verhältniß unter einander haben, unter gegebenen Winkeln gezogen worden; so berührt der Punkt M eine der Lage nach gegebene gerade Linie nach dem 23sten Saz; nun berührt aber der Punkt M auch die der Lage nach gegebene gerade Linie BD, folglich ist er gegeben; es ist aber gezeigt worden, daß auch der Punkt H gegeben seye; mithin ist die gerade Linie HM der Lage nach gegeben; also berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Komposition.

Man finde nach dem 23sten Saz die gerade Linie BH innerhalb des Winkels CBD, so, daß sie ein Ort sey von der Beschaffenheit, daß, wenn man aus irgend einem Punkt H auf derselben an die Linien BC, BD zwey gerade Linien HK, HL unter den Winkeln Q, R zieht, HK : HL = β : α, d. i. daß HK × α = HL × β seye. Die Linie BH begegne der Seite CD in H. Eben so finde man innerhalb des Winkels BCD die gerade Linie CM, so, daß, wenn man aus irgend einem Punkt M auf derselben an BC, CD zwey gerade Linien MO, MP unter den Winkeln Q, S zieht, MO × α = MP × γ seye. Die Linie CM begegne der Seite BD in M, und durch die Punkte M, und H ziehe man die Linie HM; so wird diese der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man aus irgend einem Punkt A auf derselben innerhalb des Winkels

els BDC an BC, BD, CD die gerade Linien AE, AF, AG unter den gegebenen Winkeln zieht; so wird $AE \times \alpha = AF \times \beta + AG \times \gamma$ seyn. Denn man ziehe die Linie MK, die der Linie AE in N begegne; so ist wegen der Parallelen und nach 1, 6. E. $AN \times \alpha : HK \times \alpha = AF \times \beta : HL \times \beta$. Nach der Verzeichnung aber ist $HK \times \alpha = HL \times \beta$, mithin ist auch $AN \times \alpha = AF \times \beta$. Eben so ist wegen der Parallelen, und nach 1, 6. E. $NE \times \alpha : MO \times \alpha = AG \times \gamma : MP \times \gamma$, nach der Verzeichnung aber ist $MO \times \alpha = MP \times \gamma$, folglich ist auch $NE \times \alpha = AG \times \gamma$. Nun ist gezeigt worden, daß auch $AN \times \alpha = AF \times \beta$ seye, folglich ist, auf beyden Seiten gleiche Rechteke hinzu gefügt, $AE \times \alpha = AF \times \beta + AG \times \gamma$.

Fig. 39. b.

Werden aber aus irgend einem Punkt A auf demjenigen Stük der verlängerten geraden Linie HM, das innerhalb des Nebenwinkels von BCD liegt, an die Linien BC, BD, CD die gerade Linien AE, AF, AG unter den gegebenen Winkeln gezogen; so ist in diesem Fall AE der Ueberschuß von AN über NE, folglich ist in diesem Fall $AE \times \alpha = AF \times \beta - AG \times \gamma$.

Fig. 39. c.

Werden endlich aus einem Punkt A auf irgend einem andern Stük der Linie HM die Linien AE, AF, AG gezogen, wie gesagt worden; so ist $AE \times \alpha = AG \times - AF \times \beta$, welches ganz wie bey der vorhergehenden Kompoſition bewieſen wird.

Uebrigens hat dieſer Fall, in welchem nemlich die Punkte H, M auf den Seiten CD, BD des Dreyeks ſelbſt liegen, keine Beſtimmung.

ist NE: MO = (NK: MK, d. i. = AH: MH, d. i. =) AG: MP. Also ist NE × α: MO × α = AG × γ: MP × γ. Nun ist bewiesen worden, daß NE × α = AG × γ; folglich ist auch MO × α = MP × γ, d. i. MO: MP = γ: α, d. i. in einem gegebenen Verhältniß. Weil also aus einem Punkt M an 2. der Lage nach gegebene gerade Linien BC, CD, die einander in einem Punkt C begegnen, 2. Linien MO, MP, die ein gegebenes Verhältniß unter einander haben, unter gegebenen Winkeln gezogen worden; so berührt der Punkt M eine der Lage nach gegebene gerade Linie nach dem 23sten Saz; nun berührt aber der Punkt M auch die der Lage nach gegebene gerade Linie BD, folglich ist er gegeben; es ist aber gezeigt worden, daß auch der Punkt H gegeben seye; mithin ist die gerade Linie HM der Lage nach gegeben; also berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Kompositon.

Man finde nach dem 23sten Saz die gerade Linie BH innerhalb des Winkels CBD, so, daß sie ein Ort sey von der Beschaffenheit, daß, wenn man aus irgend einem Punkt H auf derselben an die Linien BC, BD zwey gerade Linien HK, HL unter den Winkeln Q, R zieht, HK: HL = β: α, d. i. daß HK × α = HL × β seye. Die Linie BH begegne der Seite CD in H. Eben so finde man innerhalb des Winkels BCD die gerade Linie CM, so, daß, wenn man aus irgend einem Punkt M auf derselben an BC, CD zwey gerade Linien MO, MP unter den Winkeln Q, S zieht, MO × α = MP × γ seye. Die Linie CM begegne der Seite BD in M, und durch die Punkte M, und H ziehe man die Linie HM; so wird diese der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man aus irgend einem Punkt A auf derselben innerhalb des Winkels

kels BDC an BC, BD, CD die gerade Linien AE, AF, AG unter den gegebenen Winkeln zieht; so wird $AE \times \alpha = AF \times \beta + AG \times \gamma$ seyn. Denn man ziehe die Linie MK, die der Linie AE in N begegne; so ist wegen der Parallelen und nach 1, 6. E. $AN \times \alpha : HK \times \alpha = AF \times \beta : HL \times \beta$. Nach der Verzeichnung aber ist $HK \times \alpha = HL \times \beta$, mithin ist auch $AN \times \alpha = AF \times \beta$. Eben so ist wegen der Parallelen, und nach 1, 6. E. $NE \times \alpha : MO \times \alpha = AG \times \gamma : MP \times \gamma$, nach der Verzeichnung aber ist $MO \times \alpha = MP \times \gamma$, folglich ist auch $NE \times \alpha = AG \times \gamma$. Nun ist gezeigt worden, daß auch $AN \times \alpha = AF \times \beta$ seye, folglich ist, auf beyden Seiten gleiche Rechteke hinzu gefügt, $AE \times \alpha = AF \times \beta + AG \times \gamma$.

Fig. 39. b.

Werden aber aus irgend einem Punkt A auf demjenigen Stük der verlängerten geraden Linie HM, das innerhalb des Nebenwinkels von BCD liegt, an die Linien BC, BD, CD die gerade Linien AE, AF, AG unter den gegebenen Winkeln gezogen; so ist in diesem Fall AE der Ueberschuß von AN über NE, folglich ist in diesem Fall $AE \times \alpha = AF \times \beta - AG \times \gamma$.

Fig. 39. c.

Werden endlich aus einem Punkt A auf irgend einem andern Stük der Linie HM die Linien AE, AF, AG gezogen, wie gesagt worden; so ist $AE \times \alpha = AG \times - AF \times \beta$, welches ganz wie bey der vorhergehenden Komposition bewiesen wird.

Uebrigens hat dieser Fall, in welchem nemlich die Punkte H, M auf den Seiten CD, BD des Dreyeks selbst liegen, keine Bestimmung.

Fig. 39. d.

2. Fall. Wenn die gerade Linie HM, welche der gesuchte Ort ist, einer der Seiten BD, DC des Dreyeks BCD, z. B. der Seite BD in M, und der andern über D hinaus verlängerten Seite CD in einem Punkt H auf der Verlängerung begegnet.

Dieser Fall (so wie die übrigen alle ausser dem lezten) werden auf eben die Art behandelt, wie der erste. Weil aber erfodert wird, daß der Punkt H auf der über D hinaus verlängerten Seite CD liegen soll; so wird, wenn man durch den Punkt B die Linie TBV mit CD gleichlauffend zieht, der Punkt H innerhalb des Winkels TBD liegen, und, wenn man HK, HL an BC, BD unter den gegebenen Winkeln, und DQ, CR mit HK, HL gleichlauffend an eben diese Linien zieht; so wird nach dem 4ten Lehnsaz HK : HK > DQ : CR seyn. Es ist aber HK : HL = β : α, wie bey dem vorhergehenden Fall gezeigt worden, also ist β : α > DQ : CR; und diß ist die Bestimmung für diesen Fall.

Wenn also β : α > DQ : CR, und man innerhalb des Winkels XBD, welcher der Nebenwinkel von CBD ist, eine gerade Linie BH findet, so, daß die aus irgend einem Punkt derselben an BC und BD mit DQ, CR parallel gezogene Linien eben das Verhältniß unter einander haben, welches β zu α hat; so wird diese Linie BH der über D hinaus verlängerten Linie CD nothwendig begegnen, nach dem 4ten Lehnsaz. Es geschehe diß in H, und man finde die gerade Linie CM völlig, wie beym vorhergehenden Fall; so wird die durch die Punkte H, M gezogene Linie HM der gesuchte Ort seyn, welches ganz wie beym vorhergehenden Fall bewiesen wird. Und eben so findet man auch, was erfolgen werde, wenn man den Punkt A auf der Verlängerung von HM annimmt,

nimmt, nach welcher Seite auch dieſe Verlängerung geſchehen mag.

Fig. 39. e.

3. Fall. Wenn die gerade Linie HM einer der Seiten, z. B. BD in M, der andern über C hinaus verlängerten Seite CD aber in einem Punkt H auf der Verlängerung begegnet. Dieſer Fall iſt von dem 2ten blos dadurch unterſchieden, daß hier $\alpha : \beta < DQ : CR$ ſeyn muß nach dem 4ten Lehnſaz. Uebrigens iſt die ganze nach beyden Seiten verlängerte Linie HM der geſuchte Ort, nur das zwiſchen den Punkten H, M gelegene Stük ausgenommen.

Fig. 39. f.

4. Fall. Wenn die gerade Linie HM beyden über D hinaus verlängerten Seiten BD, CD auf ihren Verlängerungen begegnet. Weil hier der Punkt H auf der über D hinaus verlängerten Linie CD liegen muß; ſo muß $\beta : \alpha > DQ : CR$ ſeyn, wie beym 2ten Fall gezeigt worden. Und, wenn man an CD die Linie BD mit MP oder AG gleichlauffend zieht; ſo wird auf ähnliche Art vermittelſt des 4ten Lehnſazes gezeigt werden, daß $\gamma : \alpha > DQ : BS$ ſeyn müſſe. Und, wenn ſich dieſe beyden Bedingungen finden, und man BH wie in dem 2ten Fall, und eben ſo CM innerhalb des Nebenwinkels von BCD zieht; ſo werden die Punkte H, M auf den über D hinaus verlängerten Seiten CD, BD liegen, und die Linie HM wird der geſuchte Ort ſeyn.

Fig. 39. g.

5. Fall. Wenn die gerade Linie HM beyden über die Grundlinien BC hinaus verlängerten Seiten CD,

BD begegnet. Dieſer Fall iſt von dem 4ten blos darinn unterſchieden, daß $\beta : \alpha < DQ : CR$, und auch $\gamma : \alpha < DQ : BS$ ſeyn muß. Und wenn man BH, CM innerhalb der Nebenwinkel von CBD, BCD zieht; ſo wird HM der geſuchte Ort ſeyn.

Fig. 39. h.

6. Fall. Wenn die Linie HM der einen über D hinaus verlängerten Seite CD, und der andern über die Grundlinie BC hinaus verlängerten Seite DB begegnet. Weil in dieſem Fall der Punkt H innerhalb des Winkels liegt, der von der Linie DB, und einer durch B mit CD gleichlauffend gezogenen Linie eingeſchloſſen iſt; ſo muß $\beta : \alpha > DQ : CR$ ſeyn. Und, weil der Punkt M innerhalb eines Winkels liegt, der von der Grundlinie BC, und einer durch C mit BD gleichlauffend gezogenen Linie eingeſchloſſen iſt, ſo muß $\gamma : \alpha < DQ : BS$ ſeyn nach dem 4ten Lehnſaz. Unter dieſen Bedingungen ziehe man BH, CM innerhalb der Nebenwinkel von CBD, BCD; ſo wird die ganze nach beyden Seiten verlängerte Linie HM der geſuchte Ort ſeyn, das Stük ausgenommen, welches zwiſchen den Punkten H, M eingeſchloſſen iſt.

Fig. 39. i.

7. Fall. Wenn die gerade Linie HM, auf welcher nemlich der Ort iſt, mit einer der Seiten BD, CD, z. B. mit CD gleichlauffend iſt, es mag übrigens HM entweder der Seite BD ſelbſt, oder ihrer nach irgend einer Seite geſchehenen Verlängerung begegnen.

1. Es begegne HM der Linie BD ſelbſt in dem Punkt M, und man ziehe AE, AF, AG unter den gegebenen Winkeln, wie im erſten Fall; ſo iſt nach der

Vor-

Vorausſezung $AE \times \alpha = AF \times \beta + AG \times \gamma$. Und, weil der Punkt M auf der Linie BD liegt; ſo wird, wenn man aus demſelben an BC, CD die Linien MO, MP mit AE, AG gleichlauffend zieht, $MO \times \alpha = MP \times \gamma$ ſeyn, d. i. wenn man nach MN mit BC gleichlauffend zieht, und MN der Linie AE in N begegnet, es wird $NE \times \alpha = AG \times \gamma$ ſeyn; folglich iſt der Reſt $AN \times \alpha$ gleich dem Reſt $AF \times \beta$, alſo $AN : AF = \beta : \alpha$. Und, wenn man DQ, CR mit AN, AF gleichlauffend zieht; ſo iſt nach dem 3ten Lehnſaz $AN : AF = DQ, CR$, alſo $\beta : \alpha = DQ, CR$. Soll alſo HM mit CD gleichlauffend ſeyn; ſo muß dieſe Proportion Statt finden. Es ſeye diß, und man finde die Linie CM wie in dem erſten Fall, CM begegne der Linie BD in M, und man ziehe durch M eine mit CD gleichlauffende Linie HM; ſo wird dieſe der geſuchte Ort ſeyn. Denn man ziehe aus irgend einem Punkt A auf derſelben innerhalb des Nebenwinkels von BDC die Linien AE, AF, AG, von denen AE der Linie MN, die mit BC gleichlauffend iſt, in N begegne; ſo iſt nach dem 3ten Lehnſaz $AN : AF = DQ : CR$, d. i. nach der Vorausſezung $= \beta : \alpha$. Alſo iſt $AN \times \alpha = AF \times \beta$. Und nach der Verzeichnung (durch welche nemlich der Punkt M gefunden wurde) iſt $MO \times \alpha = MP \times \gamma$, d. i. $NE \times \alpha = AG \times \gamma$, folglich nach Hinzuſezung gleicher Rechteke $AE \times \alpha = AF \times \beta + AG \times \gamma$.

2. Soll aber HM der über D hinaus verlängerten Linie BD begegnen, ſo muß $\gamma : \alpha > DQ : BS$ ſeyn, wenn man nemlich BS mit MP gleichlauffend zieht. Soll hingegen HM der über B hinaus verlängerten Linie BD begegnen; ſo muß $\gamma : \alpha < DQ : BS$ ſeyn nach dem 4ten Lehnſaz. In dieſen beyden Fällen aber muß überdiß $\beta : \alpha = DQ, CR$ ſeyn. Liegt der Punkt M auf der über D hinaus verlängerten Linie BD; ſo iſt das Stük von HM, welches innerhalb des Scheitelwinkels von

BDC liegt, der gesuchte Ort. Liegt aber der Punkt M auf der über B hinaus verlängerten Linie BD; so ist das Stük von HM der gesuchte Ort, welches innerhalb des Winkels liegt, der von der Linie BC, und der über BC hinaus verlängerten Linie BD eingeschlossen ist. Das übrige bleibt ganz wie beym ersten Theil dieses 7ten Falls.

Die Fälle, in welchen von den 3. der Lage nach gegebenen geraden Linien 2. unter einander gleichlauffend sind, werden auf ähnliche Art behandelt, und man wird für jeden derselben einen Ort finden, wie in den vorhergehenden Fällen vermittelst des 23sten und bisweilen des 22sten Sazes.

Berechnung.

Fig. 39. a—h.

6 erste Fälle. Man findet nach dem 23sten Saz den Winkel DBH, und da in dem Dreyek BDH noch die Seite BD nebst dem Winkel BDH gegeben ist; so läßt sich folglich DH berechnen. Eben so findet man nach dem 23sten Saz den Winkel DCM, und vermittelst dieses Winkels, der Seite CD, und des Winkels CDM findet man DM. Folglich kann man in dem Dreyek DMH aus den Seiten DM, DH und dem gegebenen Winkel HDM auch die beyden übrigen Winkel bestimmen.

Fig. 39. i.

7. Fall. Man findet DM wie vorhin, und der Winkel HMD ist ohne weitere Rechnung bekannt. Auf ähnliche Art verfährt man, wenn von den 3. der Lage nach gegebenen Linien 2. unter einander gleichlauffen. Eine andere Rechnungsart giebt übrigens die bey dem folgen-

folgenden Saz angeführte l' Huilierſche Behandlung an.

29. Saz.

Fig. 40. a.

Wenn 4 gerade Linien, BC, BD, CD, QB, die nicht alle unter einander gleichlauffen, (und nicht alle einen gemeinſchaftlichen Durchſchnitts-Punkt haben) der Lage nach gegeben ſind, und wenn aus einem Punkt A an dieſelbige 4. gerade Linien, AE, AF, AG, AS unter gegebenen Winkeln gezogen werden, und entweder das Rechtek, das zwiſchen einer der aus A gezogenen Linien AE, und einer gegebenen Linie α enthalten iſt, gleich iſt der Summe der Rechteke, die zwiſchen den übrigen aus A gezogenen Linien AF, AG, AS und eben ſo vielen gegebenen geraden Linien β, γ, δ enthalten ſind, oder die Summe von zwey Rechteken, die zwiſchen zwey aus A gezogenen Linien AE, AF, und eben ſo vielen gegebenen geraden Linien α, β enthalten ſind, gleich iſt der Summe der Rechteke, die zwiſchen den übrigen beyden aus A gezogenen Linien AG, AS und eben ſo vielen gegebenen geraden Linien γ, δ enthalten ſind: ſo berührt in beyden Fällen der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Es ſeye

1. $AE \times \alpha = AF \times \beta + AG \times \gamma + AS \times \delta$. H ſeye der Punkt, in welchem der Ort der Punkte A der geraden Linie CD begegnet, und man ziehe an BC, BD, QR die gerade Linien HK, HL, HT mit AE, AF, AS gleichlauffend; ſo iſt nach der Vorausſezung, $HK \times \alpha = HL \times \beta + HT \times \delta$. Alſo berührt nach dem vorhergehenden Saz der Punkt H eine der Lage nach gegebene gerade Linie; er berührt aber auch eine andere der Lage nach gegebene gerade Linie CD; mithin iſt der Punkt H

gegeben. Man ziehe die Linie AH, und dieſe begegne der Linie BD in M, durch die Punkte M, K, T ziehe man die Linien MK, MT, dieſe begegnen den Linien AE, AS in den Punkten N, V, und an BC, CD, QR ziehe man die Linien MO, MP, MX mit AE, AG, AS gleichlauffend. Weil nun wegen der Parallelen HK: AN = HL: AF = HT: AV, und HK×α = HL×β + HT×δ, ſo iſt nach dem 2ten Lehnſaz AN×α = AF×β + AV×δ. Nach der Vorausſezung aber iſt AE×α = AF×β + AG×γ + AS×δ; alſo iſt, jene erſte unter einander gleiche Rechteke von dieſen leztern gleichen Rechteken hinweg genommen, NE×α = AG×γ + VS×δ.

Es iſt aber, wie bey dem vorhergehenden Saz gezeigt worden, NE: MO = AG: MP, und, wegen der Parallelen iſt AG: MP = (AH: MH = VT: MT =) VS: MX. Alſo iſt NE: MO = AG: MP = VS: MX. Und, weil gezeigt worden, daß NE×α = AG×γ + VS×δ; ſo iſt nach dem 2ten Lehnſaz MO×α = MP×γ + MX×δ.

Alſo berührt nach dem vorhergehenden Saz der Punkt M eine der Lage nach gegebene gerade Linie, er berührt aber auch eine andere der Lage nach gegebene gerade Linie BD; mithin iſt der Punkt M gegeben; nun iſt gezeigt worden, daß auch der Punkt H gegeben ſeye; folglich berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie HM.

Kompoſition.

Man finde vermittelſt des vorhergehenden Sazes eine gerade Linie, die ein Ort ſeye von der Beſchaffenheit, daß, wenn man aus irgend einem Punkt deſſelben an die Linien BC, BD, QR 3 gerade Linien unter den gegebenen Winkeln zieht, das Rechtek, das zwiſchen der an

BC

BC gezogenen Linie, und der gegebenen geraden Linie α enthalten ist, gleich seye der Summe der Rechteke, von welchen das eine zwischen der an BD gezogenen Linie, und der gegebenen geraden Linie β, das andere zwischen der an QR gezogenen Linie und der gegebenen geraden Linie δ enthalten ist. Die gefundene gerade Linie begegne der Linie CD in dem Punkt H, und man ziehe an BC, BD, QR die Linien HK, HL, HT unter den gegebenen Winkeln; so ist folglich $HK \times \alpha = HL \times \beta + HT \times \delta$. Auf ähnliche Art finde man auf der geraden Linie BD den Punkt M, so, daß, an BC, CD, QR die Linien MO, MP, MX unter den gegebenen Winkeln gezogen, $MO \times \alpha = MP \times \gamma + MX \times \delta$ seye. Durch die Punkte H, und M ziehe man die gerade Linie HM, so wird diese der gesuchte Ort seyn; d. i. wenn man aus irgend einem Punkt A auf derselben an BC, BD, CD, QR 4 gerade Linien AE, AF, AG, AS unter den gegebenen Winkeln zieht; so wird $AE \times \alpha = AF \times \beta + AG \times \gamma + HS \times \delta$ seyn. Denn, man ziehe die Linien MK, MT, diese begegnen den Linien AE, AS in den Punkten N, V; und, weil HK : AN = HL : AF = HT : AV, und, nach der Verzeichnung, $HK \times \alpha = HL \times \beta + HT \times \delta$; so ist, nach dem 2ten Lehnsaz, $AN \times \alpha = AF \times \beta + AV \times \delta$. Eben so, weil NE : MO = AG : MP = VS : MX, wie vorhin gezeigt worden, und nach der Verzeichnung $MO \times \alpha = MP \times \gamma + MX \times \delta$; so ist, nach dem 2ten Lehnsaz, $NE \times \alpha = AG \times \gamma + VS \times \delta$. Und, weil gezeigt worden, daß auch $AN \times \alpha = AF \times \beta + AV \times \delta$ seye; so ist, die gleiche Rechteke zusammen genommen, $AE \times \alpha = AF \times \beta + AG \times \gamma + AS \times \delta$.

Es seye

2. $AE \times \alpha + AF \times \beta = AG \times \gamma + AS \times \delta$, und im übrigen bleibe alles, wie vorhin. H seye wieder der Punkt, in welchem der Ort der geraden Linie CD be-

gegnet, und man ziehe HK, HL, HT wie vorhin; so ist nach der Vorausſezung $HK\times\alpha + HL\times\beta = HT\times\delta$; alſo berührt der Punkt H nach dem 28ſten Saz eine der Lage nach gegebene gerade Linie; er berührt aber auch eine andere der Lage nach gegebene gerade Linie CD; folglich iſt der Punkt H gegeben. Man ziehe die nemlichen Linien wie im erſten Fall; ſo iſt HK: AN = HL: AF = HT: AV, und weil $HK\times\alpha + HL\times\beta = HT\times\delta$; ſo ſind nach dem 2ten Lehnſaz auch $AN\times\alpha + AF\times\beta = AV\times\delta$. Nach der Vorausſezung aber ſind $AE\times\alpha + AF\times\beta = AG\times\gamma + AS\times\delta$; folglich iſt, jene erſtere gleiche Rechteke von dieſen leztern hinweg genommen, $NE\times\alpha = AG\times\gamma + VS\times\delta$. Und, weil wie beym vorhergehenden Fall gezeigt worden, NE: MO = AG: MP = VS: MX; ſo iſt nach dem 2ten Lehnſaz $MO\times\alpha = MP\times\gamma + MX\times\delta$. Folglich iſt der Punkt M gegeben, es iſt aber gezeigt worden, daß auch der Punkt H gegeben ſeye; alſo berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Kompoſition.

Man finde nach dem 28ſten Saz den Punkt H auf der geraden Linie CD, ſo, daß $HK\times\alpha + HL\times\beta = HT\times\delta$ ſeye. Eben ſo finde man auf der geraden Linie BD den Punkt M, ſo, daß $MO\times\alpha = MP\times\gamma + MX\times\delta$ ſeye. Durch die Punkte H, M ziehe man die gerade Linie HM; ſo wird diß der geſuchte Ort ſeyn, d. i. wenn man aus irgend einem Punkt A dieſer Linie AE, AF, AG, AS zieht, wie geſagt worden; ſo werden $AE\times\alpha + AF\times\beta = AG\times\gamma + AS\times\delta$ ſeyn. Denn, man verzeichne alles, wie beym vorhergehenden Fall; ſo iſt HK: AN = HL: AF = HT: AV, und nach der Verzeichnung iſt $HK\times\alpha + HL\times\beta = HT\times\delta$; folglich iſt auch nach dem 2ten Lehnſaz $AN\times\alpha + AF\times\beta = AV\times\delta$.

$= AV \times \delta$. Eben so ist $NE : MO = AG : MP = VS : MX$, und $MO \times \alpha = MP \times \gamma + MX \times \delta$; folglich, nach dem 2ten Lehnsaz auch $NE \times \alpha = AG \times \gamma + VS \times \delta$. Mithin, die gleichen Rechteke zusammen genommen, $AE \times \alpha + AF \times \beta = AG \times \gamma + AS \times \delta$.

Fig. 40. b.

1. Zus. Auch, wenn die Rechteke, die zwischen einer der gezogenen Linien, oder zwischen einigen der gezogenen Linien, und zwischen gegebenen geraden Linien enthalten sind, nicht gleich sind der Summe der Rechteke, die zwischen den übrigen gezogenen Linien, und eben so viel gegebenen geraden Linien enthalten sind; sondern, wenn sie auch nur zu dieser Summe ein gegebenes Verhältniß haben; so berührt auch noch bey dieser Voraussezung der Punkt, aus welchem die geraden Linien gezogen sind, eine der Lage nach gegebene gerade Linie. Z. B. bey dem Fall von 4 geraden Linien. Es habe $AE \times \alpha + AF \times \beta$ zu $AG \times \gamma + AS \times \delta$ ein gegebenes Verhältniß. In eben diesem Verhältniß seye ε zu γ und ζ zu δ; so wird auch $AG \times \varepsilon$ zu $AG \times \gamma$, und $AS \times \zeta$ zu $AS \times \delta$ in eben diesem Verhältniß seyn. Folglich ist nach 12, 5. E. auch $AG \times \varepsilon + AS \times \zeta$ in eben diesem Verhältniß zu $AG \times \gamma + AS \times \delta$. Also sind $AE \times \alpha + AF \times \beta = AG \times \varepsilon + AS \times \zeta$. Mithin berührt der Punkt A nach gegenwärtigem Saz eine der Lage nach gegebene gerade Linie. Die Komposition erhellet von selbst.

Fig. 40. c.

2. Zus. Auch, wenn die Summe aller Rechteke gleich ist einem gegebenen Raum; so berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie. Man ziehe aus dem Punkt A an die der Lage nach gegebene gerade Linien

Linien BC, BD, CD u. ſ. w. die gerade Linien AE, AF, AG u. ſ. w. unter den gegebenen Winkeln, und es ſeye die Summe aller Rechteke AE×α, AF×β, AG×γ u. ſ. w. gleich einem gegebenen Raum; dieſer Raum ſeye gleich dem Rchtk EH×α, wo nemlich EA bis an den Punkt H hin verlängert werden muß; weil nun EH×α der Gröſſe nach, und überdiß auch α gegeben iſt; ſo iſt EH der Gröſſe nach gegeben; nun iſt BC der Lage nach, und überdiß auch der Winkel HEB gegeben; alſo berührt der Punkt H eine gerade mit BC gleichlaufſende Linie (20. Saz.). Es ſeye diß die Linie HK; und, weil nach der Vorausſezung die Summe der Rchtke AE×α, AF×β, AG×γ u. ſ. w. gleich iſt dem Rchtk EH×α; ſo iſt, das gemeinſchaftliche Rchtk AE×α hinweg genommen, die Summe der Rchtke AF×β, AG×γ u. ſ. w. gleich dem Rchtk AH×α. Alſo berührt der Punkt A nach gegenwärtigem Saz eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Kompoſition.

Aus irgend einem Punkt auf der geraden Linie BC ziehe man eine gerade mit AE gleichlauffende Linie, und nehme darauf BK ſo, daß BK×α gleich werde dem gegebenen Raum, durch K ziehe man KL mit BC gleichlauffend. Ferner ziehe man nach gegenwärtigem Saz eine gerade Linie, die ein Ort ſeye von der Beſchaffenheit, daß, wenn man aus irgend einem Punkt deſſelben an die der Lage nach gegebene gerade Linien KL, BD, DC u. ſ. w. eben ſo viel andere gerade Linien unter den gegebenen Winkeln zieht, das Rchtk, das zwiſchen der an KL gezogenen geraden Linie, und der gegebenen geraden Linie α enthalten iſt, gleich ſeye der Summe der Rchtke, die zwiſchen den übrigen aus dieſem Punkt gezogenen Linien, und den übrigen gegebenen geraden Linien β, γ u. ſ. w. ent-

enthalten sind; so wird die auf diese Art gezogene Linie der gesuchte Ort seyn. Denn man ziehe aus irgend einem Punkt A dieser Linie die Linien AH, AF, AG u. s. w. unter den gegebenen Winkeln; und, weil nach der Verzeichnung $AH \times \alpha = AF \times \beta + AG \times \gamma$ u. s. w. ist; so ist, das Rchtk $AE \times \alpha$ beyderseits hinzu gesezt, $AE \times \alpha + AF \times \beta + AG \times \gamma$ u. s. w. $= EH \times \alpha$, d. i. gleich dem gegebenen Raum.

Wenn α, β, γ, u. s. w. unter einander gleich sind; so ist die Summe von AE, AF, AG u. s. w. gleich einer der Grösse nach gegebenen geraden Linie EH. Also verwandelt sich in diesem Fall gegenwärtiger Zusaz in folgenden Ort: Wenn aus einem Punkt A an gerade der Lage nach gegebene Linien BC, BD, CD u. s. w. eben so viel gerade Linien AE, AF, AG u. s. w. unter gegebenen Winkeln gezogen werden, und die Summe aller dieser gezogenen Linien gleich ist einer gegebenen geraden Linie EH; so berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie. Eben so, wenn nur 3 oder 2 gerade Linien der Lage nach gegeben sind.

Fig. 40. d.

3. Zus. Auch, wenn die Summe einiger Rchtke um einen gegebenen Raum grösser ist, als die Summe der übrigen Rechtke; so berührt der Punkt, aus welchem die geraden Linien gezogen worden, eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Es seyen die Rechteke $AE \times \alpha$ u. s. w. gleich der Summe der Rchtke $AF \times \beta$, $AG \times \gamma$ u. s. w. und eines gegebenen Raums; und man nehme auf der verlängerten Linie AF, FH so, daß $FH \times \beta$ gleich seye dem gegebenen Raum; so berührt der Punkt H eine der Lage nach gegebene gerade Linie, wie bey dem 2ten Zus. gezeigt worden. Und, weil nach der Voraussezung $AE \times \alpha$

u. s.

Linien BC, BD, CD u. ſ. w. die gerade
AG u. ſ. w. unter den gegebenen Win
die Summe aller Rechteke AE×α,
u. ſ. w. gleich einem gegebenen Ra
ſeye gleich dem Rchtk EH×α, wo
den Punkt H hin verlängert wo
EH×α der Gröſſe nach, und
iſt; ſo iſt EH der Gröſſe nach
Lage nach, und überdiß auch
alſo berührt der Punkt H ei
fende Linie (30. Saz.).
und, weil nach der Vor
AE×α, AF×β, AG
EH×α; ſo iſt, das
weg genommen, di
u. ſ. w. gleich dem
Punkt A nach
gegebene gerade

Aus
ziehe man
nehme dar

u. ſ. w. = AF×β + AG×γ u. ſ. w. + FH×β, d. i. = AH×β + AG×γ u. ſ. w. ſo berührt der Punkt A nach gegenwärtigem Saz eine der Lage nach gegebene gerade Linie; und die Kompoſition iſt einerley mit der des vorigen Zuſ. Man muß nemlich hier nur zuerſt KH finden.

Fig. 40. b.

4. Zuſ. Endlich, wenn der Ueberſchuß der Summe einiger Rchtke über eine gegebene Gröſſe, oder die Summe einiger Rchtke und einer gegebenen Gröſſe zu der Summe der übrigen Rchtke ein gegebenes Verhältniß hat; oder, wenn die Summe von einigen dieſer Rchtke, und einer Gröſſe, zu welcher die Summe der übrigen Rchtke ein gegebenes Verhältniß hat, gegeben iſt; ſo berührt der Punkt, aus welchem die geraden Linien gezogen worden, eine der Lage nach gegebene gerade Linie. Es habe der Ueberſchuß der Summe der Rchtke AE×α und AF×β über einen gegebenen Raum Z zu der Summe der Rchtke AG×γ und AS×ζ ein gegebenes Verhältniß; und in eben dieſem Verhältniß ſeye ε zu γ, und ζ zu δ; ſo wird, wie beym 1ſten Zuſ. gezeigt werden, daß der Ueberſchuß der Summe der Rchke AE×α und AF×β über den Raum Q gleich ſeye der Summe der Rchtke AG×ε und AS×ζ. Folglich berührt der Punkt A nach dem 3ten Zuſ. eine der Lage nach gegebene gerade Linie. Auf ähnliche Art wird der 2te und 3te Fall dieſes Zuſazes behandelt, nur daß man bey lezterem den 2ten Zuſ. braucht.

Wenn 5 gerade Linien der Lage nach gegeben ſind; ſo wird ein Ort unter ähnlichen Vorausſezungen, wie bey dem gegenwärtigen Saz und ſeinen Zuſäzen völlig auf eben dieſe Art gefunden, und die Kompoſition wird vermittelſt des Orts bey geraden Linien gemacht, es mag

nun

nun entweder ein Rechtek gleich der Summe aller übrigen, oder die Summe von 2 Rechteken gleich der Summe der 3 übrigen seyn. Und auf ähnliche Art wird bey 6 geraden Linien der Ort vermittelst des Orts bey 5 Linien gefunden u. s. w. so viel auch gerade Linien der Lage nach gegeben seyn mögen.

Weil aber diese und ähnliche Säze sehr weitläufig werden, weil nemlich die Anzahl der der Lage nach gegebenen geraden Linien ohne Ende vermehrt werden kann; so ist es besser, zu zeigen, wie man von jeder beliebigen Anzahl von geraden Linien zu der nächst grössern Anzahl fortgehen könne, wie bey diesem und dem vorhergehenden Saz geschehen ist, nur, daß hier die Fälle, wenn entweder alle der Lage nach gegebene gerade Linien unter einander gleichlauffen, wie beym 26sten Saz, oder alle einen gemeinschaftlichen Durchschnitts-Punkt haben, wie beym 27sten Saz, noch nicht mit genommen sind. In allen Fällen aber so wohl der gleichlauffenden, als nicht gleichlauffenden Linien wird folgender Saz gleich brauchbar seyn.

Fig. 40. e. f.

Aus einem Punkt A seyen an die der Lage nach gegebenen geraden Linien BC, DE, FG u. s. w. die geraden Linien AH, AK, AL u. s. w. unter gegebenen Winkeln gezogen, und es seye $AH \times \alpha = AK \times \beta + AL \times \gamma$ u. s. w.; so berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Denn man verlängere AK bis M, so, daß $KM \times \beta = AH \times \alpha$, d. i. $= AK \times \beta + AL \times \gamma$ u. s. w.; so ist, das gemeinschaftliche Rechtk $AK \times \beta$ hinweg genommen, $AM \times \beta = AL \times \gamma$ u. s. w. Und, weil $AH \times \alpha = KM \times \beta$; so ist $\alpha : \beta = KM : AH$; also ist das Verhältniß von KM zu AH gegeben. Es begegne AM

der

der Linie BC in N, und, weil das Dreyek AHN der Gattung nach gegeben iſt; ſo iſt das Verhältniß von AH zu AN gegeben; folglich iſt (9. D.) auch das Verhältniß von KM zu AN gegeben. Es ſeye KM: NA = OM: OA; ſo iſt (19, 5. E. oder 12, 5. E.) KO: ON = KM: NA, alſo iſt das Verhältniß von KO zu ON, mithin auch das Verhältniß von KN zu NO gegeben. Sind nun (Fig. 46. e.) BC, DE gleichlauffend; ſo iſt, weil NK zwiſchen dieſen Linien unter einem gegebenen Winkel gezogen worden, NK der Gröſſe nach gegeben (35. D.). Alſo iſt die Linie NO, zu welcher NK ein gegebenes Verhältniß hat, ebenfalls der Gröſſe nach gegeben. Nun iſt die Lage von BC und der Winkel BNO gegeben; alſo berührt der Punkt O eine der Lage nach gegebene, mit BC gleichlauffende Linie (20. Saz.). Sind aber (Fig. 40. f.) BC, DE nicht gleichlauffend; ſo werden ſie einander in einem Punkt begegnen. Es geſchehe diß in B; ſo iſt das Dreyek NBK der Gattung nach gegeben, alſo das Verhältniß von KN zu NB gegeben; nun iſt gezeigt worden, daß das Verhältniß von KN zu NO gegeben ſeye; alſo iſt (9. D.) auch das Verhältniß von BN zu NO gegeben; nun iſt die Lage von BN, der Punkt B, und der Winkel BNO gegeben; alſo berührt der Punkt O eine gerade der Lage nach gegebene Linie nach dem 1ſten Fall des 23ſten Sazes. Und, weil in beyden Fällen gezeigt worden, daß das Verhältniß von KM zu NA, d. i. das Verhältniß von OM zu OA gegeben ſeye; ſo iſt alſo auch das Verhältniß von MA zu AO gegeben. Man nehme eine gerade Linie δ, die eben dieſes Verhältniß zu der gegebenen geraden Linie β habe; ſo iſt folglich die gerade Linie δ der Gröſſe nach gegeben, und es iſt $AO \times \delta = M\Lambda \times \beta$, d. i. $= AL \times \gamma$ u. ſ. w. So viel gerade Linien alſo auch nach der Vorausſezung des Sazes gegeben ſeyn mögen; ſo iſt jezt der Ort auf eine Anzahl gerader Linien

zurük

zurük gebracht, die um Eins kleiner iſt, als die Anzahl der im Anfang gegebenen geraden Linien, und, wenn man eine ähnliche Analyſe, ſo oft als nöthig iſt, wiederholt, ſo wird er auf den Fall zurük gebracht, in welchem nur 2 gerade Linien der Lage nach gegeben ſind, alſo auf den 22ſten oder 23ſten Saz, je nachdem dieſe 2 gerade Linien gleichlauffen oder nicht. Weil nun der Ort für den Fall von 2 geraden Linien in dem 22ſten und 23ſten Saz aufgelöſt iſt; ſo wird er nach dem vorhergehenden Saz auch in dem Fall von 3 geraden Linien aufgelöſt werden, und vermittelſt der Auflöſung in dieſem Fall auch in dem Fall von 4 geraden Linien, und ſo weiter fort. Fermat hat für den Ort in dem beſondern Fall von 3 geraden Linien, wenn die zwey von den gegebenen geraden Linien, welche wir β und γ nannten, gleich ſind, einen ziemlich weitläuffigen Beweis, und er würde noch weitläuffiger werden, wenn man ihn auf den Fall, wo keine der 3 gegebenen geraden Linien mit der andern gleich iſt, und noch mehr, wenn man ihn auf den Fall, wo mehr als 3 gerade Linien gegeben ſind, ausdehnen wollte. Und die algebraiſche Rechnung, welche Schooten dieſen Ort zu finden beybringt, kann vollends gar nicht bey der Auflöſung irgend einer Aufgabe vermittelſt dieſes Orts gebraucht werden. *)

Berechnung.

Fig. 40. a.

Man könnte nach dem 28ſten Saz die Punkte H, M finden, folglich in dem Dreyek DMH, in welchem die

*) Paul. Friſ. Oper. T. I. Probl. XLI. r. 2. 3. Coroll. giebt auch kurz den algebraiſchen Kalkul für dieſe Aufgabe an. Anm. des Ueberſ.

die Seiten DM, DH nebſt dem eingeſchloſſenen Winkel bekannt ſind, das übrige beſtimmen. Eben ſo könnte man den Fall, wenn 5 oder mehrere gerade Linien der Lage nach gegeben ſind, auf eine um Eins geringere Anzahl gegebener Linien zurük bringen. Kürzer und allgemeiner aber findet man dieſes alles nach dem ſogleich zu erklärenden l' Huilierſchen Verfahren.

Zugabe

zu den Säzen 22 bis 29

Von dieſen Säzen, die, wie aus dem, was am Ende des 29ſten Sazes geſagt worden iſt, erhellet, nur beſondere Fälle eines allgemeinen Sazes ſind, hat kürzlich ein mit der Geometrie der Alten vorzüglich vertrauter Mathematiker, Herr l' Huilier aus Genf, eine neue eben ſo einfache als allgemeine Auflöſung gegeben in dem Anhang zu ſeiner Polygonométrie, die zu Genf und Paris 1789 herausgekommen iſt. Ich glaube mich verbunden, das Weſentliche ſeiner Methode hier anzuführen, und verweiſe übrigens wegen der ausführlichern Entwiklung beſonders des Falls, wenn die der Lage nach gegebenen Linien keinen gemeinſchaftlichen Durchſchnitt haben, und der einzelnen ſchönen Bemerkungen auf die leſenswürdige Abhandlung ſelbſt.

Herr l' Huilier braucht hiebey ein paar Lehnſäze, die ich hier auf meine Art vortragen will. Es ſeye alſo

Lehnſaz A.

Fig. 41.

Wenn 2 Punkte A und B gegeben ſind; ſo läßt ſich immer auf der Linie, welche dieſe Punkte verbindet, ein dritter Punkt finden, ſo, daß, wenn man aus dieſen

sen 3 Punkten auf irgend eine Linie in der nemlichen Ebene Perpendikel fällt, das aus dem gefundenen Punkt gefällte Perpendikel doppelt genommen, gleich seye der Summe der Perpendikel, die aus den 2 gegebenen Punkten gefällt worden sind.

Analyse.

Fig. 41. a.

Der gesuchte Punkt seye C, man verlängere die Linie AB z. B. auf der Seite von A, und ziehe irgend eine gerade Linie XF, die der Verlängerung von AB in X begegne, und fälle auf XF die Perpendikel AD, CE, BF; so ist

XA : AD = XC : CE = XB : BF (4, 6. E.), folglich auch
XA : AD = AC : CE — AD (19, 5. E.) und eben so
XA : AD = XC : CE = CB : BF — CE (19, 5. E.)
folglich ist AC : CE — AD = CB : BF — CE (11, 5. E.)
Aber nach der Vorausseżung ist 2 CE = AD + BF, oder CE — AD = BF — CE; folglich ist AC = CB (14, 5. E.).

Der Punkt C wird also gefunden, wenn man AB in 2 gleiche Theile theilt. Die Komposition erhellet von selbst.

1. Zus. Die Analyse paßt auf alle die Fälle, wo die willkührlich gezogene Linie DF der Verlängerung von AB begegnet. Ist die Linie DF mit AB gleichlaufend; so erhellet von selbst, daß der gefundene Punkt auch dann noch der Aufgabe eine Genüge leiste. Denn alsdann ist CE = AD = BF (34, 1. E.), folglich 2 CE = AD + BF.

2. Zusaz. Wenn die willkührlich gezogene Linie DF nicht der Verlängerung von AB, sondern der Linie AB selbst in dem Punkt A begegnet; so verschwindet das

aus A zu ziehende Perpendikel, und es wird CE = ½ BF, oder 2 CE = BF.

Fig. 41. b.

3. Zuſaz. Wenn die willkührlich gezogene Linie DF der Linie AB ſelbſt zwiſchen A und B begegnet; z. B. zwiſchen A und C; ſo wird XA : AD = AC : CE + AD = CB : BF — CE. Wenn alſo hier auch AC = CB ſeyn ſoll, ſo muß die Vorausſezung dieſe ſeyn, daß CE + AD = BF — CE (14, 5. E.), oder, daß 2 CE = BF — AD ſeye. Nemlich, weil die Perpendikel hier auf entgegengeſezte Seiten der Linie DF gezogen werden; ſo muß eines in Bezug auf das andere als negativ betrachtet werden, es muß alſo, um auch dieſen Fall unter unſerm Lehnſaz mit begreiffen zu können, das Wort Summe in demſelben in dem allgemeinern Sinn genommen werden, nach welchem es für den Fall, wenn einige der Gröſſen, von denen die Rede iſt, in Bezug auf die andern negativ werden, ihren Unterſchied anzeigt.

4. Zuſ. Auſſer dem Punkt C kann kein anderer eben dieſe im Lehnſaz ausgedrukte Eigenſchaft haben. Denn, wenn es möglich iſt, ſo habe ein anderer Punkt G die nemliche Eigenſchaft, und man ziehe GC, und ziehe auf der Verlängerung von GC durch irgend einen Punkt E eine Linie DEF ſenkrecht auf GC, und fälle auf dieſelbe die Perpendikel AD, BF; ſo müßte folglich 2 GE = AD + BF ſeyn. Aber nach unſerm Lehnſaz iſt auch 2 CE = AD + BF; folglich müßte 2 GE = 2 CE, oder GE = CE ſeyn, welches unmöglich iſt (9. Ax. 1. E.).

Lehn-

Lehnsaz B.

Fig. 42.

Wenn 2 Punkte A und B gegeben sind; so läßt sich immer auf der Linie, welche diese 2 Punkte verbindet, ein dritter Punkt finden, so, daß, wenn man aus diesen 3 Punkten auf irgend eine Linie in eben dieser Ebene Perpendikel fällt, die Summe des m fachen des aus dem einen gegebenen Punkt gefällten Perpendikels, und des n fachen des aus dem andern gegebenen Punkt gefällten Perpendikels gleich seye dem (m+n) fachen des aus dem gesuchten Punkt gefällten Perpendikels.

Analyse.

Der gesuchte Punkt seye C, und man verlängere die Linie AB z. B. auf der Seite von A, und ziehe irgend eine gerade Linie XF, die der Verlängerung von AB in X begegne, und fälle auf XF die Perpendikel AD, CE, BF; so ist

XA : AD = XC : CE = XB : BF (4, 6. E.), folglich auch

XA : AD = AC : CE — AD (19, 5. E.)

und noch XA : AD = m. AC : m (CE — AD) (15, 5. E.)

Eben so XA : AD = XC : CE = CB : BF — CE (19, 5. E.)

und noch XA : AD = n. CB : n (BF — CE) (15, 5. E.)

folglich ist m. AC : m (CE — AD) = n. CB : n (BF — CE) (11, 5. E.).

Aber nach der Vorausseżung ist (m+n) CE = m. AD + n BF

oder m (CE — AD) = n (BF — CE),

folglich auch m. AC = n. CB (14, 5. E.), oder

AC : CB = n : m. Weil nun AB gegeben ist, so erhellet die Komposition aus 10, 6. E.

Zus. Man sieht leicht, daß hier wieder völlig die nemlichen Zusäze Statt finden, wie bey dem Lehnsaz A,

der nur ein besonderer Fall von diesem hier ist. Nahmentlich muß auch hier Summe in der dort angezeigten ausgedehntern Bedeutung genommen werden. Und auch hier kann ausser dem Punkt C kein anderer die im Lehnsaz ausgedrukte Eigenschaft haben.

Lehnsaz C.

Fig. 43.

Wenn eine beliebige Anzahl n Punkte A, B, C, D . . . . N in einer Ebene gegeben ist; so läßt sich immer ein anderer Punkt Z in dieser Ebene finden, so, daß, wenn man auf irgend eine gerade Linie in dieser Ebene von den gegebenen Punkten sowohl als von dem Punkt Z Perpendikel fällt, das aus Z gefällte Perpendikel n mahl genommen gleich seye der Summe aller aus den gegebenen Punkten gefällten Perpendikel, Summe immer in der erklärten allgemeinern Bedeutung genommen.

1. besonderer Fall. Wenn nur 2 Punkte A, B gegeben sind. In diesem Fall ist der Lehnsaz einerley mit dem oben erwiesenen Lehnsaz A.

Fig. 43. a.

2. besonderer Fall. Wenn 3 Punkte A, B, C gegeben sind. Es läßt sich nach dem Lehnsaz A ein Punkt Y finden, so daß das von ihm auf irgend eine Linie der Ebene gefällte Perpendikel 2 mahl genommen gleich seye der Summe der aus A und B auf eben diese Linie gefällten Perpendikel. Man ziehe YC; so läßt sich auf dieser Linie nach dem Lehnsaz B ein Punkt Z finden, so, daß das von ihm auf irgend eine Linie der Ebene gefällte Perpendikel $(2+1)$ mahl, d. h. 3mahl genommen gleich

seye

ſeye der Summe des aus Y auf eben dieſe Linie gefällten Perpendikels 2 mahl genommen, und des aus C auf die nemliche Linie gefällten Perpendikels, d. h. der Summe der aus A, B, C auf dieſe Linie gefällten Perpendikel.

Fig. 43. b.

3. beſonderer Fall. Wenn 4 Punkte A, B, C, D gegeben ſind. Es läßt ſich zwiſchen A und B ein Punkt X finden, deſſen auf jede Linie der Ebene gefälltes Perpendikel 2 mahl genommen gleich ſeye der Summe der aus A und B darauf gefällten Perpendikel (Lehnſaz A.). Eben ſo findet man zwiſchen X und C nach dem Lehnſaz B einen Punkt Y, deſſen Perpendikel 3mahl genommen, gleich iſt der Summe des doppelten Perpendikels von X und des einfachen von C, d. h. gleich der Summe aller aus A, B, C gefällten Perpendikel. Endlich findet man zwiſchen Y und D einen Punkt Z nach dem Lehnſaz B, deſſen Perpendikel 4 mahl genommen gleich iſt der Summe des dreyfachen Perpendikels von Y, und des einfachen von D, d. h. gleich der Summe aller aus A, B, C, D gefällten Perpendikel.

Im Allgemeinen ſieht man, daß völlig eben ſo durch einmahlige Anwendung des Lehnſazes A, und (n—2) mahlige Anwendung des Lehnſazes B die in unſerm Lehnſaz C vorgelegte Aufgabe aufgelöſt wird.

1. Zuſ. Es läßt ſich auch hier eben ſo, wie bey dem 4ten Zuſ. des Lehnſazes A erweiſen, daß immer nur ein Punkt Z der Aufgabe Genüge leiſte.

2. Zuſ. Man kann nun leicht auch den Punkt Z auf eine bequemere Art ſo beſtimmen. In der Ebene, in welcher die gegebenen Punkte liegen, ziehe man irgend eine gerade Linie, und fälle auf ſie aus allen gegebenen Punkten die Perpendikel AA', BB', CC', DD'....

NN′; ſo muß der Punkt Z ſo liegen, daß, wenn man aus ihm auf eben dieſe gerade Linie das Perpendikel ZZ′ fällt, nun

n. ZZ′ = AA′ + BB′ + CC′ + DD′ .... + NN′, oder daß

$$ZZ' = \frac{AA' + BB' + CC' + DD' \ldots + NN'}{n}$$ ſeye. Die

Linie ZZ′ iſt alſo der Gröſſe nach gegeben, und ihr einer Endpunkt Z′ berührt die angenommene, folglich der Lage nach gegebene gerade Linie A′ B′ C′ ... N′ unter einem gegebenen Winkel, mithin berührt auch ihr anderer Endpunkt Z eine der Lage nach gegebene mit A′ B′ C′ gleichlauffende gerade Linie (20. Saz Ap.). Man ziehe durch irgend einen Punkt der Linie A′ B′ C′ eine andere Linie darauf ſenkrecht, und fälle auf dieſe ebenfalls aus allen gegebenen Punkten die Perpendikel Aa, Bb, Cc, Dd ... Nn; ſo wird eben ſo gezeigt, daß der Punkt Z auf einer mit der Linie a b c d ... n in einer Entfernung

$$= \frac{Aa + Bb + Cc + Dd \ldots + Nn}{n}$$ gleichlaufſenden geraden Linie liegen müſſe. Er liegt alſo auf dem Durchſchnitt-Punkt der beyden mit A′ B′ C′ und a′ b′ c′ gleichlauffenden Linien, und iſt folglich gegeben.

3. Zuſ. Wollte man denken, von dem nach dem 2ten Zuſ. gefundenen Punkt Z ſeye es nur in Bezug auf die Linien A′ B′ C′ und a′ b′ c′ gewiß, daß er die in dem Lehnſaz erfoderte Eigenſchaft habe, d. h. daß ſein darauf gefälltes Perpendikel n mahl genommen gleich ſeye der Summe der aus den gegebenen Punkten darauf gefällten Perpendikel, man könne aber deswegen noch nicht wiſſen, ob er auch in Bezug auf jede andere Linie in dieſer Ebene dieſelbe Eigenſchaft habe, ſo läßt ſich dieſer Zweifel leicht heben. Nach unſerm Lehnſaz nemlich läßt ſich immer auf die bey der dortigen Auflöſung gezeigte Art ein Punkt P finden, der die verlangte Eigenſchaft

genſchaft in Bezug auf jede gerade Linie der Ebene hat. Dieſer Punkt P alſo muß die angezeigte Eigenſchaft auch für die Linien A′B′C′ und a′b′c′ haben, alſo nach dem 20ſten Saz des Apoll. auf dem Durchſchnitts-Punkt der vorhin mit A′B′C und a′b′c′ gezogenen Parallelen liegen, d. h. er muß mit dem nach dem 2ten Zuſ. gefundenen Punkt Z einerley ſeyn, der Punkt Z alſo muß, wie wenn er nach der Auflöſung des Lehnſazes ſelbſt gefunden wäre, die angezeigte Eigenſchaft in Bezug auf alle Linien der Ebene haben.

4. Zuſ. Der Punkt, den wir in den bisherigen Lehnſäzen zu finden gelernt haben, heißt in der Mechanik Schwerpunkt der gegebenen Punkte, wenn nemlich dieſe alle als gleich ſchwer gedacht werden. Kürze halber wollen wir dieſen Nahmen künftig auch brauchen, ſtatt immer die Beſchreibung der Eigenſchaften dieſes Punkts, wie ſie in dem Lehnſaz C angegeben ſind, zu wiederholen.

Diß vorausgeſezt, wendet ſich Herr l'Huilier zu den angeführten Säzen des Apollonius, die er aber noch allgemeiner macht, indem er, ſtatt vorauszuſezen, daß die Summe einiger Rechteke gleich ſey der Summe der übrigen, vorausſezt, daß die Summe aller Rechteke (Summe immer in dem allgemeinen Sinn genommen, in welchem diß Wort auch die Fälle begreift, wenn einige der Rechteke negativ genommen werden) gleich ſeye einem gegebenen Raum, wie in dem 2ten Zuſaz des 29ſten Sazes. Den Fall des 22ſten, 24ſten und 26ſten Sazes, wenn alle der Lage nach gegebene gerade Linien gleichlauffen, läßt Herr l'Huilier weg, weil er ſich leicht auf die einfache Aufgabe zurük bringen läßt: auf einer geraden Linie, auf welcher irgend eine Anzahl Punkte gegeben iſt, einen Punkt zu finden, ſo daß die Summe der Rechteke, von denen jedes zwiſchen der Entfernung dieſes Punkts von einem der gegebenen Punkte, und ei-

ner der Gröſſe nach gegebenen Linie enthalten iſt, einem gegebenen Raum gleich ſeye. Weiters betrachtet er zunächſt nur den beſondern Fall, wenn die gerade Linien, welche an die der Lage nach gegebenen geraden Linien gezogen werden, ſenkrecht auf ihnen ſtehen; weil nemlich der Fall, wenn ſie nicht ſenkrecht ſind, ſich ſogleich auf dieſen zurük bringen läßt, wenn man nur an die Stelle jeder der Gröſſe nach gegebenen Linie eine andere ſezt, die ſich zu der erſten verhält, wie der ſinus totus zum ſinus des Winkels, unter welchem die ihr zugehörige gerade Linie gezogen iſt. Wenn nun alle der Lage nach gegebene gerade Linien einen gemeinſchaftlichen Durchſchnitts-Punkt haben; ſo iſt das Verfahren des Herrn l' Huilier folgendes. Er zeigt die Sache, um ſie deſto leichter zu machen, zuerſt an dem beſondern Fall, wenn 3 gerade Linien der Lage nach gegeben ſind, welcher alſo mit Simſons 27ſten Saz einerley iſt.

Fig. 44.

Es ſeyen mithin 3 gerade Linien SA, SB, SC, die in einerley Ebene liegen, und einen gemeinſchaftlichen Durchſchnitts-Punkt haben, der Lage nach gegeben; man ſolle den Ort der Punkte Y finden, die ſo beſchaffen ſind, daß, wenn man von jedem derſelben die Perpendikel YA', YB', YC' auf die der Lage nach gegebenen Linien SA, SB, SC fällt, die Summe oder der Unterſchied der Rechteke, den dieſe Perpendikel mit 3 der Gröſſe nach gegebenen Linien einſchlieſſen, gleich ſeyen einem der Gröſſe nach gegebenen Raum Q.

Eintheilung. Man muß zuvörderſt beſtimmen, welche der auf die der Lage nach gegebenen Linien gefällten Perpendikel man als poſitiv betrachtet, ſo daß die auf die nemlichen Linien gefällten Perpendikel, welche eine entge-

entgegengeſezte Lage haben, als negativ betrachtet werden.

Es ſeye ASC > ASB, aber doch ASC < 2 rechte Winkel. Man verlängere die geraden Linien AS, BS, CS über S hinaus nach A″, B″, S″; ſo theilt ſich die Ebene, in welcher die der Lage nach gegebenen geraden Linien liegen, in 6 Gegenden: C″SA, ASB, BSC, CSA″, A″SB″, B″SC″.. Es ſcheint alſo zuerſt, man müſſe 6 verſchiedene Lagen des Punkts Y unterſuchen. Allein man bemerkt leicht, daß die Winkel C″SA, ASB, BSC ganz ähnliche Eigenſchaften haben mit den Winkeln CSA″, A″SB, B″SC″, wenn man nur die Zeichen der Perpendikel, die von den in den erſten dieſer Gegenden gelegenen Punkten gefällt werden, eben ſo ändert, wie ſich die Richtung dieſer Perpendikel ändert. Die 6 anfänglichen Fälle ſind alſo auf 3 zurük gebracht. Ferner haben die auſſen anliegenden Winkel C″SA, und BSC ähnliche Eigenſchaften, wenn man nur die Zeichen der auf ihre nicht gemeinſchaftlichen Schenkel gefällten Perpendikel ändert. Mithin ſind alle Fälle nur auf die Zwey zurük gebracht, ob der Punkt Y innerhalb des Winkels C″SA, oder innerhalb des Winkels ASB liegt.

Iſte Lage des Punkts Y innerhalb des Winkels C″SA.

Unterabtheilung. Die aus dem Punkt Y gefällten Perpendikel werden entweder alle 3 als poſitiv, oder 2 als poſitiv, und 1 als negativ, oder 1 als poſitiv, und 2 als negativ, oder alle 3 als negativ betrachtet, welches 8 verſchiedene Fälle zu geben ſcheint. Allein dieſe 8 Fälle laſſen ſich wieder auf 4 bringen. Denn alles, was man von 2 negativen und 1 poſitiven Perpendikel ſagen würde, das würde auch von 2 poſitiven und 1 negativen Perpendikel gelten, die in dem Winkel CSA″, der Scheitelwinkel von C″SA iſt, liegen würden. Von dieſen lezten aber gilt alles, was man

von

von 2 poſitiven und 1 negativen Perpendikel innerhalb des Winkels C″SA ſagt, ebenfalls, nur daß man überall entgegengeſezte Zeichen brauchen muß. Alſo gilt, was man von 2 poſitiven und 1 negativen Perpendikel innerhalb eines Winkels C″SA ſagt, auch von 2 negativen und 1 poſitiven innerhalb des nemlichen Winkels, wenn man nur überall entgegen geſezte Zeichen braucht. Die 4 zu betrachtenden Fälle ſind alſo dieſe:

YA′	YB′	YC′
+	+	+
+	+	−
+	−	+
−	+	+

1ſter Fall der Iſten Lage des Punkts Y, wo nemlich

YA′	YB′	YC′
+	+	+

Analyſe. Auf den der Lage nach gegebenen geraden Linien nehme man SA, SB, SC den der Gröſſe nach gegebenen geraden Linien verhältnißmäßig gleich. Man ziehe SY, und fälle darauf von den Punkten A, B, C die Perpendikel Aa, Bb, Cc; ſo ſind von den Dreyeken YSA′, YSB′, YSC′, ASa, BSb, CSc, immer zwey und zwey einander ähnlich, mithin die Rechteke $\begin{matrix} SA\times YA', SB\times YB', SC\times YC' \\ SY\times Aa, SY\times Bb, SY\times Cc \end{matrix}$ immer zwey und zwey einander gleich; folglich iſt die Summe der erſten Rechteke gleich der Summe der zweyten, d. h. gleich dem Rechtek, das zwiſchen SY, und der Summe der Linien Aa, Bb, Cc enthalten iſt. Es ſeye Z der Schwerpunkt der Punkte A, B, C, und man ziehe SZ, und fälle auf SY das Perpendikel Zz, und auf SZ das Perpendikel YZ′; ſo iſt (Lehnſaz C.) Aa + Bb + Cc = 3Zz; folglich SA×YA′ + SB×YB′ + SC×YC′ = 3SY×Zz. Aber, weil die Dreyeke YSZ′ und ZSz ähnlich ſind; ſo iſt SY×Zz = SZ×YZ′; folglich

folglich $SA \times YA' + SB \times YB' + SC \times YC' = 3\,SZ \times YZ'$. Es iſt alſo das Rechk $SZ \times YZ'$ der Gröſſe nach gegeben; folglich iſt, weil SZ der Gröſſe nach gegeben iſt, auch YZ' der Gröſſe nach gegeben. Aber YZ' iſt ſenkrecht auf die der Lage nach gegebene gerade Linie SZ; mithin liegt der Punkt Y auf einer der Lage nach gegebenen mit SZ gleichlauffenden geraden Linie.

Kompoſition.

Man nehme auf den der Lage nach gegebenen Linien SA, SB, SC verhältnißmäßig gleich den der Gröſſe nach gegebenen Linien. Man ſuche den Schwerpunkt Z der Punkte A, B, C (Lehnſ. C.), und ziehe SZ. Den der Gröſſe nach gegebenen Raum Q verwandle man in ein Rechtek, deſſen eine Seite $= 3\,SZ$ ſeye, und errichte aus irgend einem Punkt von SZ ein Perpendikel gleich der andern Seite dieſes Rechteks. Durch den Endpunkt dieſes Perpendikels ziehe man eine Parallele mit SZ, ſo wird dieſe Parallele der geſuchte Ort ſeyn. Denn, wenn man aus irgend einem Punkt dieſer Parallele Y die Perpendikel YA', YB', YC', YZ' auf SA, SB, SC, SZ zieht, hierauf auf SY die Perpendikel Aa, Bb, Cc, Zz zieht; ſo wird, wie vorhin erwieſen, daß die Rechteke $SA \times YA'$, $SB \times YB'$, $SC \times YC'$, $SZ \times YZ'$ $SY \times Aa$, $SY \times Bb$, $SY \times Cc$, $SY \times Zz$ immer zwey und zwey gleich ſeyen. Nun iſt aber (Verzeichn. und Lehnſ. C.) $SY \times Aa + SY \times Bb + SY \times Cc = 3\,SY \times Zz$

folglich $SA \times YA' + SB \times YB' + SC \times YC' = 3\,SZ \times YZ' = Q$.

1ſte Bemerkung. Da der Ort der Punkte Y mit SZ gleichlauft; ſo hängt die Lage dieſes Orts in Bezug auf die der Lage nach gegebenen Linien von der Lage des Punkts Z ab. Da nun das Dreyek ABC ganz innerhalb des Winkels ASC liegt, ſo liegt auch der Punkt Z innerhalb dieſes Winkels, und zwar entweder in dem

Winkel

3ter Fall der Isten Lage des Punkts Y, wo nemlich

YA′	YB′	YC′
+	—	+

Wenn man statt des Punkts B den Punkt B″ nimmt, so, daß SB = SB; so bleiben Analyse und Komposition, wie für den ersten Fall.

1ste Bemerkung. Die Punkte A, C, B″ liegen in Bezug auf jede durch S gehende Linie auf verschiedenen Seiten derselben, mithin kann sich der Punkt Z innerhalb jedes der Winkel ASC, CSB″, B″SA finden, d. h. innerhalb einer jeden der 6 Gegenden, in welche die Ebene durch die der Lage nach gegebenen Linien und ihre Verlängerungen abgetheilt ist, und die Lage des Punkts Z hängt von der Grösse der gegebenen Linien SA, SB″, SC ab. Die Veränderungen der Zeichen der aus dem Punkt Y gefällten Perpendikel, die bey der Veränderung ihrer Richtung vorkommen, bestimmt man wie vorhin.

Gegenden des Punkts Y	Zeichen der Perpendikel YA′	YB′	YC′
ASC″ - - - -	+	—	+
C″SB″ - - - -	+	—	—
B″SA″ - - - -	+	+	—
A″SC - - - -	—	+	—
CSD - - - -	—	+	+
BSA - - - -	—	—	+

2te Bemerk. Die Möglichkeit, daß sich der Punkt Z in jeder der 6 Gegenden der Ebene befindet, macht einen ersten Unterschied zwischen diesem Fall und dem vorhergehenden. Aber noch eine grössere findet sich darinn, daß es möglich ist, daß der Ort unmöglich wird. Wirklich, da der Ort der Punkte Y mit SZ gleichlaufen soll, so muß, damit der Ort bestimmt werde, die

Lage

Lage von SZ selbst bestimmt seyn, und daher Z nicht auf S fallen. Denn wäre diß, so würde SZ jede beliebige Richtung haben können, folglich auch eben so der Ort der Punkte Y. Da nun, wenn 2 der Punkte A, B″, C auf einer Seite einer durch S gehenden geraden Linie sind, der dritte immer auf der entgegengesezten Seite liegt, und S der Schwerpunkt dieser 3 Punkte ist; so muß die Summe der 2 Perpendikel, die aus den Punkten gefällt werden, die auf einer Seite der geraden Linie liegen, gleich seyn dem Perpendikel, das aus dem Punkt auf der entgegen gesezten Seite gefällt wird. Folglich ist der Unterschied der Summe der beyden ersten Perpendikel und des lezten gleich Null. Also muß in diesem Fall auch der Raum $Q = 0$ seyn, folglich ist $3\,SZ \times YZ' = 0$, mithin kann, da $SZ = 0$ ist, YZ' jeder beliebigen Grösse gleich seyn, oder Y kann jeder beliebige Punkt der Ebene seyn.

4ter Fall der Isten Lage des Punkts Y, wo nemlich

YA′	YB′	YC′
—	+	+

Wenn man den Punkt A″ statt des Punkts A sezt, so bleibt alles übrige, wie bey dem ersten Fall. Der Ort ist bestimmt.

Gegenden des Punkts Z.	Gegenden des Punkts Y	Zeichen der Perpendikel YA′	AB′	YC′
A″SC - - - -	C″SA	—	+	+
	ASB	+	+	+
	BSC	+	—	+
	CSA″	+	—	—
BSC - - - -	B″SC″	—	+	—
	C″SA	—	+	+
	ASB	+	+	+
	BSC	+	—	+

von 2 poſitiven und 1 negativen Perpendikel innerha
des Winkels C″SA ſagt, ebenfalls, nur daß man übe
all entgegengeſezte Zeichen brauchen muß. Alſo gi
was man von 2 poſitiven und 1 negativen Perpendik
innerhalb eines Winkels C′SA ſagt, auch von 2 nega
tiven und 1 poſitiven innerhalb des nemlichen Winkel
wenn man nur überall entgegen geſezte Zeichen brauch
Die 4 zu betrachtenden Fälle ſind alſo dieſe:

YA′	YB′	YC′
+	+	+
+	+	−
+	−	+
−	+	+

1ſter Fall der Iſten Lage des Punkts Y, wo nemlich

YA′	YB′	YC′
+	+	+

Analyſe. Auf den der Lage nach gegebenen gera
den Linien nehme man SA, SB, SC den der Gröſſe nac
gegebenen geraden Linien verhältnißmäßig gleich. Ma
ziehe SY, und fälle darauf von den Punkten A, B,
die Perpendikel Aa, Bb, Cc; ſo ſind von den Dreyeke
YSA′, YSB′, YSC′,
ASa, BSb, CSc, immer zwey und zwey einand
ähnlich, mithin die Rechteke SA×YA′, SB×YB′, SC×Y
SY×Aa, SY×Bb, SY×Cc
immer zwey und zwey einander gleich; folglich iſt d
Summe der erſten Rechteke gleich der Summe der zwe
ten, d. h. gleich dem Rechtek, das zwiſchen SY, un
der Summe der Linien Aa, Bb, Cc enthalten iſt. E
ſeye Z der Schwerpunkt der Punkte A, B, C, und ma
ziehe SZ, und fälle auf SY das Perpendikel Zz, un
auf SZ das Perpendikel YZ′; ſo iſt (Lehnſaz C.) A
+ Bb + Cc = 3Zz; folglich SA×YA′ + SB×YB
+ SC×YC′ = 3SY×Zz. Aber, weil die Dreyek
YSZ′ und ZSz ähnlich ſind; ſo iſt SY×Zz = SZ×YZ
folglic

folglich $SA \times YA' + SB \times YB' + SC \times YC' = 3\,SZ \times YZ'$. Es iſt alſo das Rchtk $SZ \times YZ'$ der Gröſſe nach gegeben; folglich iſt, weil SZ der Gröſſe nach gegeben iſt, auch YZ' der Gröſſe nach gegeben. Aber YZ' iſt ſenkrecht auf die der Lage nach gegebene gerade Linie SZ; mithin liegt der Punkt Y auf einer der Lage nach gegebenen mit SZ gleichlauffenden geraden Linie.

Kompoſition.

Man nehme auf den der Lage nach gegebenen Linien SA, SB, SC verhältnißmäßig gleich den der Gröſſe nach gegebenen Linien. Man ſuche den Schwerpunkt Z der Punkte A, B, C (Lehnſ. C.), und ziehe SZ. Den der Gröſſe nach gegebenen Raum Q verwandle man in ein Rechtek, deſſen eine Seite $= 3\,SZ$ ſeye, und errichte aus irgend einem Punkt von SZ ein Perpendikel gleich der andern Seite dieſes Rechteks. Durch den Endpunkt dieſes Perpendikels ziehe man eine Parallele mit SZ, ſo wird dieſe Parallele der geſuchte Ort ſeyn. Denn, wenn man aus irgend einem Punkt dieſer Parallele Y die Perpendikel YA', YB', YC', YZ' auf SA, SB, SC, SZ zieht, hierauf auf SY die Perpendikel Aa, Bb, Cc, Zz zieht; ſo wird, wie vorhin erwieſen, daß die Rechteke $SA \times YA'$, $SB \times YB'$, $SC \times YC'$, $SZ \times YZ'$ immer zwey und $SY \times Aa$, $SY \times Bb$, $SY \times Cc$, $SY \times Zz$ zwey gleich ſeyen. Nun iſt aber (Verzeichn. und Lehnſ. C.)

$SY \times Aa + SY \times Bb + SY \times Cc = 3\,SY \times Zz$

folglich $SA \times YA' + SB \times YB' + SC \times YC' = 3\,SZ \times YZ' = Q$.

1ſte Bemerkung. Da der Ort der Punkte Y mit SZ gleichlauft; ſo hängt die Lage dieſes Orts in Bezug auf die der Lage nach gegebenen Linien von der Lage des Punkts Z ab. Da nun das Dreyek ABC ganz innerhalb des Winkels ASC liegt, ſo liegt auch der Punkt Z innerhalb dieſes Winkels, und zwar entweder in dem Winkel

von 2 positiven und 1 negativen Perpendikel innerhalb des Winkels C″SA sagt, ebenfalls, nur daß man überall entgegengesezte Zeichen brauchen muß. Also gilt, was man von 2 positiven und 1 negativen Perpendikel innerhalb eines Winkels C″SA sagt, auch von 2 negativen und 1 positiven innerhalb des nemlichen Winkels, wenn man nur überall entgegen gesezte Zeichen braucht. Die 4 zu betrachtenden Fälle sind also diese:

YA′	YB′	YC′
+	+	+
+	+	−
+	−	+
−	+	+

1ster Fall der Isten Lage des Punkts Y, wo nemlich

YA′	YB′	YC′
+	+	+

Analyse. Auf den der Lage nach gegebenen geraden Linien nehme man SA, SB, SC den der Grösse nach gegebenen geraden Linien verhältnißmäßig gleich. Man ziehe SY, und fälle darauf von den Punkten A, B, C die Perpendikel Aa, Bb, Cc; so sind von den Dreyeken YSA′, YSB′, YSC′, ASa, BSb, CSc, immer zwey und zwey einander ähnlich, mithin die Rechteke SA×YA′, SB×YB′, SC×YC′ / SY×Aa, SY×Bb, SY×Cc immer zwey und zwey einander gleich; folglich ist die Summe der ersten Rechteke gleich der Summe der zweyten, d. h. gleich dem Rechtek, das zwischen SY, und der Summe der Linien Aa, Bb, Cc enthalten ist. Es seye Z der Schwerpunkt der Punkte A, B, C, und man ziehe SZ, und fälle auf SY das Perpendikel Zz, und auf SZ das Perpendikel YZ′; so ist (Lehnsaz C.) Aa + Bb + Cc = 3 Zz; folglich SA×YA′ + SB×YB′ + SC×YC′ = 3 SY×Zz. Aber, weil die Dreyeke YSZ′ und ZSz ähnlich sind; so ist SY×Zz = SZ×YZ′; folglich

folglich $SA \times YA' + SB \times YB' + SC \times YC' = 3\,SZ \times YZ'$. Es iſt alſo das Rchtk $SZ \times YZ'$ der Gröſſe nach gegeben; folglich iſt, weil SZ der Gröſſe nach gegeben iſt, auch YZ' der Gröſſe nach gegeben. Aber YZ' iſt ſenkrecht auf die der Lage nach gegebene gerade Linie SZ; mithin liegt der Punkt Y auf einer der Lage nach gegebenen mit SZ gleichlauffenden geraden Linie.

Kompoſition.

Man nehme auf den der Lage nach gegebenen Linien SA, SB, SC verhältnißmäßig gleich den der Gröſſe nach gegebenen Linien. Man ſuche den Schwerpunkt Z der Punkte A, B, C (Lehnſ. C.), und ziehe SZ. Den der Gröſſe nach gegebenen Raum Q verwandle man in ein Rechtek, deſſen eine Seite $= 3\,SZ$ ſeye, und errichte aus irgend einem Punkt von SZ ein Perpendikel gleich der andern Seite dieſes Rechteks. Durch den Endpunkt dieſes Perpendikels ziehe man eine Parallele mit SZ, ſo wird dieſe Parallele der geſuchte Ort ſeyn. Denn, wenn man aus irgend einem Punkt dieſer Parallele Y die Perpendikel YA', YB', YC', YZ' auf SA, SB, SC, SZ zieht, hierauf auf SY die Perpendikel Aa, Bb, Cc, Zz zieht; ſo wird, wie vorhin erwieſen, daß die Rechteke

$SA \times YA'$, $SB \times YB'$, $SC \times YC'$, $SZ \times YZ'$

$SY \times Aa$, $SY \times Bb$, $SY \times Cc$, $SY \times Zz$ immer zwey und zwey gleich ſeyen. Nun iſt aber (Verzeichn. und Lehnſ. C.)

$SY \times Aa + SY \times Bb + SY \times Cc = 3\,SY \times Zz$

folglich $SA \times YA' + SB \times YB' + SC \times YC' = 3\,SZ \times YZ' = Q$.

1ſte Bemerkung. Da der Ort der Punkte Y mit SZ gleichlauft; ſo hängt die Lage dieſes Orts in Bezug auf die der Lage nach gegebenen Linien von der Lage des Punkts Z ab. Da nun das Dreyek ABC ganz innerhalb des Winkels ASC liegt, ſo liegt auch der Punkt Z innerhalb dieſes Winkels, und zwar entweder in dem

Winkel

Winkel ASB, oder in dem Winkel BSC, oder auf der dieſen beyden Winkeln gemeinſchaftlichen Linie BS. Es liege

1. der Punkt Z in dem Winkel ASB; ſo durchſtreift der Ort der Punkte Y die Gegenden A″SB″, B″SC″, C″SA, ASB.

Gegenden des Punkts Y	Zeichen der Perpendikel YA′, YB′, YC′			Gleichungen
A″SB″	+	—	—	Q=+SA×YA′−SB×YB′−SC×YC′
B″SC″	+	+	—	Q=+SA×YA′+SB×YB′−SC×YC′
C″SA	+	+	+	Q=+SA×YA′+SB×YB′+SC×YC′
ASB	—	+	+	Q=−SA×YA′+SB×YB′+SC×YC′

Die Perpendikel nemlich, welche in Vergleich mit denen, die man als poſitiv anſieht, ihre Richtung ändern, haben das Zeichen —

Es ſeye nun

2. der Punkt Z in dem Winkel BSC; ſo durchſtreift der Ort der Punkte Y die Gegenden B″SC″, C″SA, ASB, BSC.

Gegenden des Punkts Y	Zeichen der Perpendikel YA′	YB′	YC′
B″SC″	+	+	—
C′SA	+	+	+
ASB	—	+	+
BSC	—	—	+

3. liege der Punkt Z auf der den beyden Winkeln BSC, CSA gemeinſchaftlichen Linie BS; ſo durchſtreift der Ort der Punkte Y die den beyden vorigen Lagen gemeinſchaftlichen Gegenden B″SC, C″SA, ASB, und es findet alſo eben das Statt, was bey den vorigen Lagen für dieſe Fälle.

2te Bemerkung. Man ſieht aus dieſem Beyſpiel, daß man ſich nicht mit der Summe der Rechteke, von denen die Rede iſt, beſchäftigen kann, das Wort Summe im eigentlichen, eingeſchränkteren Sinn genommen, ohne ſich zugleich mit dem Unterſchied dieſer Rechteke zu beſchäftigen, welcher ſtatt der Summe vorkommt, wenn die Richtung, folglich auch die Zeichen der Perpendikel ſich ändern, die nach einer gewiſſen beſtimmten Richtung hin als poſitiv angeſehen werden.

2ter Fall der Iſten Lage des Punkts Y, wo nemlich

YA′	YB′	YC′
+	+	—

Analyſe und Kompoſition ſind wie bey dem erſten Fall, wenn man nur ſtatt des Punkts C den Punkt C″ nimmt, der auf der über S hinaus verlängerten Linie SC ſo genommen wird, daß SC″ = SC.

Bemerk. Der Punkt Z iſt hier in dem Winkel BSC″, nemlich (mit Weglaſſung des gemeinſchaftlichen Falls, wo Z auf SA liegt) entweder in dem Winkel ASB, oder ASC″.

Gegenden des Punkts Z:	Gegenden des Punkts Y	Zeichen der Perpendikel YA′	YB′	YC′
ASB	A″SB″	+	—	+
	B″SC″	+	+	+
	C″SA	+	+	—
	ASB	—	+	—
ASC″	CSA″	—	—	+
	A″SB″	+	—	+
	B″SC″	+	+	+
	C″SA	+	+	—

3ter Fall der Isten Lage des Punkts Y, wo nemlich

YA′	YB′	YC′
+	—	+

Wenn man statt des Punkts B den Punkt B″ nimmt, so, daß SB = SB; so bleiben Analyse und Komposition, wie für den ersten Fall.

1ste Bemerkung. Die Punkte A, C, B″ liegen in Bezug auf jede durch S gehende Linie auf verschiedenen Seiten derselben, mithin kann sich der Punkt Z innerhalb jedes der Winkel ASC, CSB″, B″SA finden, d. h. innerhalb einer jeden der 6 Gegenden, in welche die Ebene durch die der Lage nach gegebenen Linien und ihre Verlängerungen abgetheilt ist, und die Lage des Punkts Z hängt von der Grösse der gegebenen Linien SA, SB″, SC ab. Die Veränderungen der Zeichen der aus dem Punkt Y gefällten Perpendikel, die bey der Veränderung ihrer Richtung vorkommen, bestimmt man wie vorhin.

Gegenden des Punkts Y	Zeichen der Perpendikel YA′	YB′	YC′
ASC″ - - - -	+	—	+
C″SB″ - - - -	+	—	—
B″SA″ - - - -	+	+	—
A″SC - - - -	—	+	—
CSD - - - -	—	+	+
BSA - - - -	—	—	+

2te Bemerk. Die Möglichkeit, daß sich der Punkt Z in jeder der 6 Gegenden der Ebene befindet, macht einen ersten Unterschied zwischen diesem Fall und den vorhergehenden. Aber noch eine grössere findet sich darinn, daß es möglich ist, daß der Ort unmöglich wird. Wirklich, da der Ort der Punkte Y mit SZ gleichlaufen soll, so muß, damit der Ort bestimmt werde, die

Lage

lage von SZ ſelbſt beſtimmt ſeyn, und daher Z nicht auf S fallen. Denn wäre diß, ſo würde SZ jede beliebige Richtung haben können, folglich auch eben ſo der Ort der Punkte Y. Da nun, wenn 2 der Punkte A, B″, C auf einer Seite einer durch S gehenden geraden Linie ſind, der dritte immer auf der entgegengeſezten Seite liegt, und S der Schwerpunkt dieſer 3 Punkte iſt; ſo muß die Summe der 2 Perpendikel, die aus den Punkten gefällt werden, die auf einer Seite der geraden Linie liegen, gleich ſeyn dem Perpendikel, das aus dem Punkt auf der entgegen geſezten Seite gefällt wird. Folglich iſt der Unterſchied der Summe der beyden erſten Perpendikel und des lezten gleich Null. Alſo muß in dieſem Fall auch der Raum $Q = o$ ſeyn, folglich iſt $3\,SZ \times YZ' = o$, mithin kann, da $SZ = o$ iſt, YZ' jeder beliebigen Gröſſe gleich ſeyn, oder Y kann jeder beliebige Punkt der Ebene ſeyn.

4ter Fall der Iſten Lage des Punkts Y, wo nemlich

YA′	YB′	YC′
—	+	+

Wenn man den Punkt A″ ſtatt des Punkts A ſezt, ſo bleibt alles übrige, wie bey dem erſten Fall. Der Ort iſt beſtimmt.

Gegenden des Punkts Z.	Gegenden des Punkts Y	Zeichen der Perpendikel YA′	AB′	YC′
A″SC - - - -	C″SA	—	+	+
	ASB	+	+	+
	BSC	+	—	+
	CSA″	+	—	—
BSC - - - -	B″SC″	—	+	—
	C″SA	—	+	+
	ASB	+	+	+
	BSC	+	—	+

IIte Lage des Punkts Y innerhalb des Winkels ASB.

Unterabtheilung. Man bringt, wie bey der ersten Lage alle Fälle auf die 4 folgenden Veränderungen der Zeichen der Perpendikel

YA′	YB′	YC′
+	+	+
+	+	—
+	—	+
—	+	+

1ster Fall der IIten Lage.

YA′	YB′	YC′
+	+	+

Dieser Fall hat Verbindung mit dem 4ten Fall der ersten Lage, und der Punkt Z ist der Schwerpunkt der Punkte A″, B, C.

2ter Fall der IIten Lage.

YA′	YB′	YC′.
+	+	—

Man seze statt der Punkte A, C die Punkte A″, C″; so ist Z der Schwerpunkt der Punkte A″, B, C″. Dieser Fall kann unbestimmt werden, wie der 3te Fall der 1sten Lage.

3ter Fall der IIten Lage.

YA′	YB′	YC′.
+	—	+

Man seze die Punkte A″, B″ statt A, B; so ist Z der Schwerpunkt der Punkte A″, B″, C, und der Ort ist bestimmt.

4ter Fall der IIten Lage.

YA′	YB′	YC′.
—	+	+

Dieser Fall kommt mit dem 1sten Fall der Isten Lage überein, und der Punkt Z ist der Schwerpunkt der Punkte A, B, C.

Es läßt sich leicht auch durch Rechnung der Winkel bestimmen, unter welchem der gesuchte Ort die der Lage nach gegebenen geraden Linien schneidet. Z. B. für den ersten Fall der Isten Lage des Punkts Y, wenn

der

der Punkt Z innerhalb des Winkels ASB iſt. Man denke ſich aus A, B, C auf SZ Perpendikel gefällt, ſo wird ihr Werth ſeyn:

SA. ſin. ASZ; SB. ſin. BSZ; SC. ſin. CSZ, und nach Lehnſaz C. iſt

SA. ſin. ASZ = SB. ſin. BSZ + SC. ſin. CSZ

= SB. ſin. (ASB — ASZ) + SC ſin. (ASC — ASZ)

folglich iſt ſin. ASZ (SA + SB. coſin. ASB + SC. coſin. ASC)

= coſin. ASZ (SB. ſin. ASB + SC. ſin. ASC)

$$\text{oder tang. ASZ} = \frac{\text{SB. ſin. ASB} + \text{SC. ſin. ASC}}{\text{SA} + \text{SB. coſin. ASB} + \text{SC. coſin. ASC}}$$

Eben ſo wird

$$\text{tang. BSZ} = \frac{\text{SA. ſin. ASB} - \text{SC. ſin. BSC}}{\text{SB} + \text{SA. coſin. ASB} + \text{SC. coſin. ASC}}$$

$$\text{und tang. CSZ} = \frac{\text{SA. ſin. ASC} + \text{SB. ſin. BSC}}{\text{SC} + \text{SA. coſin. ASC} + \text{SB. coſin. BSC}}$$

Bemerk. Dieſe Formeln enthalten alle Lagen des Punkts Z. Er iſt nemlich in dem Winkel ASB, auf der Linie SB, oder in dem Winkel BSC, je nachdem SA ſin. ASB $>=<$ SC. ſin. BSC iſt. Ferner, wenn man die Zeichen von SA, SB, SC ändert, ſo wie ſich die Richtungen der Perpendikel ändern; ſo erhält man alle oben angeführte Fälle. Z. B. wenn die Perpendikel auf SB als negativ betrachtet werden; ſo wird

$$\text{tang. ASZ} = \frac{-\text{SB. ſin. ASB} + \text{SC ſin. ASC}}{\text{SA} - \text{SB. coſin. ASB} + \text{SC. coſin. ASC}}$$

welches bey dem 3ten Fall der Iſten Lage des Punkts Y Statt findet.

Iſt nun zu gleicher Zeit SB. ſin. ASB = SC. ſin. ASC, und SA + SC coſin. ASC = SB coſin. ASB; ſo verſchwinden Nenner und Zähler des Bruchs zu gleicher Zeit, die Tangente wird alſo unbeſtimmt, mithin der Ort der Punkte Y unbeſtimmt.

Um nun noch die Entfernung des Orts von SZ zu bestimmen, muß die Grösse von SZ bestimmt werden. Man denke sich eine Linie durch S senkrecht auf SA, und fälle auf diß Perpendikel sowohl, als auf SA selbst aus den gegebenen Punkten A, B, C, und dem Schwerpunkt Z Perpendikel; so sind die erste mit SA gleichlauffende Perpendikel der Ordnung nach diese SA; SB. cosin. ASB; SC. cosin. ASC; SZ. cosin. ASZ, und die auf SA selbst gefällten Perpendikel sind SB. sin. ASB; SC. sin. ASC; SZ sin. ASZ, und nach Lehns. C. hat man die beyden Gleichungen:

3. SZ. cosin. ASZ = SA + SB. cosin. ASB + SC. cosin. ASC,

und

3. SZ. sin. ASZ = SB. sin. ASB + SC. sin. ASC. Erhebt man sie ins Quadrat, und addirt sie; so erhält man

9. $SZ^2 = (SB.\ \text{sin. ASB} + SC.\ \text{sin. ASC})^2 + (SA + SB.\ \text{cosin. ASB} + SC.\ \text{cosin. ASC})^2$.

Hat man auf diese Art SZ gefunden; so ist, wenn der gegebene Raum Q heißt, die Entfernung des Orts von SZ, d. h. $YZ' = \frac{Q}{3SZ}$.

Die ausführliche Behandlung dieses besondern Falls, wenn 3 gerade Linien, die sich in einem Punkt schneiden, der Lage nach gegeben sind, wird nun, auch ohne besondere Figur, den allgemeinen Saz, wenn jede beliebige Anzahl gerader Linien der Lage nach gegeben ist, leicht verständlich machen.

Es seye also jede beliebige Anzahl n von geraden Linien SA, SB, SC, SD .... SL, SM, SN der Lage nach gegeben, so, daß die Winkel ASB, ASC ... ASM, ASN immer grösser und grösser werden, und doch der gröste derselben ASN kleiner ist als 2 rechte Winkel. Man fragt nach dem Ort der Punkte Y, die

so

ſo beſchaffen ſind, daß, wenn man von einem derſelben auf die der Lage nach gegebenen geraden Linien die Perpendikel YA′, YB′, YC′, YD′ . . . YL′, YM′, YN′ fällt, die Summe oder der Unterſchied der Rechteke, den dieſe Perpendikel mit eben ſo viel der Gröſſe nach gegebenen geraden Linien einſchlieſſen, gleich ſeye einem gegebenen Raum Q. Man trage auf die der Lage nach gegebenen geraden Linien von beyden Seiten des Punkts S

die Linien $\begin{matrix} SA, & SB, & SC, & \ldots . & SL, & SM, & SN \\ SA'', & SB'', & SC'', & & SL'', & SM'', & SN'' \end{matrix}$

verhältnißmäßig gleich den der Gröſſe nach gegebenen geraden Linien. Man betrachte zuerſt die Perpendikel als poſitiv, die aus einem innerhalb des Winkels ASN″ gelegenen Punkt Y gefällt werden. Man denke ſich SY gezogen, und darauf die Perpendikel Aa, Bb, Cc, Dd . . . Ll, Mm, Nn gefällt. Nun ſind die Dreyeke YSA′, YSB′, YSC′ . . . YSL′, YSM′, YSN′ verhältnißmäßig gleich den Dreyeken ASa, BSb, CSc . . . LSl, MSm, NSn. Folglich ſind die Rechteke SA×YA′, SB×YB′, SC×YC′ . . . SL×YL′, SM×YM′, SN×YN verhältnißmäßig gleich den Rechteken SY×Aa, SY×Bb, SY×Cc . . . . SY×Ll, SY×Mm, SY×Nn, folglich iſt die Summe der erſten Rechteke, d. h. der gegebene Raum Q gleich dem Rechtek, das zwiſchen SY, und der Summe der Linien Aa, Bb, Cc . . . . . Ll, Mm, Nn enthalten iſt. Es ſeye Z der gemeinſchaftliche Schwerpunkt der Punkte A, B, C . . . . L, M, N, und Zz ſeye ſenkrecht auf SY, und YZ′ ſenkrecht auf SZ; ſo erhält man (Lehnſ. C.) Aa + Bb + Cc . . . + Ll + Mm + Nn = n. Zz. Folglich Q = n. SY×Zz, oder $\frac{1}{n}Q = SY \times Zz$. Es ſind aber die Dreyeke YSZ′, ZSz ähnlich, folglich iſt SY×Zz = SZ×YZ′;

also $\frac{1}{n} Q = SZ \times YZ'$; mithin ist das Rechtek $SZ \times YZ'$ gegeben; es ist aber SZ der Grösse nach gegeben, folglich auch YZ', und weil YZ' auf der der Lage nach gegebenen Linie SZ senkrecht ist, so berührt Y eine der Lage nach gegebene, mit SZ gleichlauffende gerade Linie (20. Saz Apoll.)

Komposition.

Man suche Z den Schwerpunkt der Punkte A, B, C, ... L, M, N, und ziehe SZ. Man verwandle den gegebenen Raum Q in ein Rechtek, dessen eine Seite die gerade Linie SZ so vielmahl genommen seye, als gerade Linien der Lage nach gegeben sind; aus irgend einem Punkt von SZ errichte man darauf ein Perpendikel gleich der andern Seite dieses Rechteks. Durch den Endpunkt dieses Perpendikels ziehe man eine gerade Linie mit SZ gleichlauffend, so wird diese der gesuchte Ort seyn. Der Beweis fließt unmittelbar aus der Analyse.

1ste Bemerkung. Die Lage des Punkts Z in einem der Winkel ASB, BSC ... MSN hängt von der Lage der Punkte A, B, C ... L, M, N, d. h. von der Grösse der der Grösse nach gegebenen Linien ab; folglich, da der gesuchte Ort mit SZ gleichläuft; so hängt auch die Lage der Theile dieses Orts in den Winkeln ASB, BSC u. s. w. von der Grösse eben dieser Linien ab. Und die Aenderung der Zeichen der von den Punkten Y in diesen verschiedenen Gegenden gefällten Perpendikel hängt von der Aenderung ihrer Richtungen in Bezug auf diejenige ab, die man anfänglich als positiv betrachtete. Folgende 2 Beyspiele mögen hinreichend seyn.

Winkel in welchen Z ist.	Winkel in welchen Y ist.	Zeichen der Perpendikel. YA′, YB′, YC′, ... YL′, YM′, YN′
ASB ----	BSA	— + + ... + + +
	ASN″	+ + + ... + + +
	N″SM″	+ + + ... + + —
	M″SL″	+ + + ... + — —
	.	.
	.	.
	.	.
	.	.
	D″SC″	+ + + ... — — —
	C″SB″	+ + — .... — — —
	B″SA″	+ — — .... — — —
BSC ----	CSB	— — + ... + + +
	BSA	— + + ... + + +
	ASN″	+ + + ... + + +
	N″SM″	+ + + ... + + —
	M″SL″	+ + + ... + — —
	.	.
	.	.
	.	.
	.	.
	D″SC″	+ + + ... — — —
	C″SB″	+ + — .... — — —

Diese Beyspiele zeigen wieder, daß man von der Summe im eingeschränktern Verstand nicht reden kann, ohne zugleich die damit in Verbindung stehenden Unterschiede zu betrachten, und daß man immer auf die Richtungen Rükſicht nehmen muß, nach welchen ein Perpendikel als positiv oder negativ betrachtet wird, um hienach die Zeichen gehörig zu verändern. Ohne zu grosse Weitläuffigkeit können hier nicht alle Voraussezungen

zungen betrachtet werden, die man in Rükſicht auf die Perpendikel machen kann, welche man als poſitiv oder negativ betrachtet. Wir wollen nur einen Fall in Betracht ziehen. Es ſeye der Punkt Y in dem Winkel ASN″, und die Zeichen der Perpendikel dieſe YA′, YB′, YC′, YD′ .... YL′, YM′, YN′.

\+ — — + + — +

Man ſeze bey der Auflöſung ſtatt B, C, M die Punkte B″, C″, M″, und ſuche den Schwerpunkt Z der Punkte A, B″, C″, D .... L, M″, N; ſo iſt der geſuchte Ort, wenn er beſtimmt iſt, mit SZ gleichlauffend.

Da in dieſem Fall, wenn man durch S irgend eine gerade Linie zieht, einige der Punkte A, B″, C″... L, M″, N auf die eine, und andere nothwendig auf die andere Seite dieſer geraden Linie fallen; ſo muß der Punkt Z in keine beſtimmte Gegend der Winkel fallen, in welche die Ebene durch die der Lage nach gegebene gerade Linien getheilt iſt. Fallen die Punkte S und Z zuſammen, ſo kann die Linie SZ jede beliebige Richtung haben, und der verlangte Ort iſt unbeſtimmt, der gegebene Raum Q aber muß in dieſem Fall nothwendig = o werden, welches, wie oben in dem Fall für 3 gerade Linien erwieſen wird.

Uebrigens drükt ſich die Veränderung der Richtung der Perpendikel in Bezug auf die, welche man anfänglich als poſitiv betrachtete, durch die Subſtitution der Punkte A″, B″, C″... L″, M″, N″ ſtatt A, B, C... L, M, N aus, und die Konſtruction bleibt übrigens immer in allen Fällen die nemliche.

Weil der Ort mit SZ gleichlauft; ſo macht er mit den der Lage nach gegebenen geraden Linien verhältnißmäßig die nemlichen Winkel, welche SZ mit ihnen macht. Nun beſtimmt man dieſe lezte Winkel durch die aus dem Lehnſ. C. flieſſende Gleichung:

SA.

SA. sin. ASZ + SB. sin. BSZ + SC. sin. CSZ . . . . .
SL. sin. LSZ + SM. sin. MSZ + SN. sin. NSZ = 0. Hieraus folgt

$$\text{tang. ASZ} = \frac{\text{SB. sin. ASB} + \text{SC. sin. ASC} + \ldots}{\text{SA} + \text{SB.cosin.ASB} + \text{SC.cosin.ASC} + \ldots}$$

$$\frac{\ldots \text{SL. sin. ASL} + \text{SM. sin. ASM} + \text{SN sin. ASN}}{\ldots \text{SL.cosin.ASL} + \text{SM.cosin.ASM} + \text{SN.cosin.ASN}}$$

Man findet folglich den Winkel, unter welchem SZ, folglich auch der damit gleichlauffende Ort die der Lage nach gegebenen geraden Linien schneidet.

Nimmt man nun ferner die Linie SZ so oft, als gerade Linien der Lage nach gegeben sind, also n mahl; so ist $n^2 . SZ^2$ gleich der Summe der Quadrate der beyden Glieder des Bruchs, der die Tangente ASZ ausdrükt.

Verändert man die Zeichen derjenigen unter den Linien SA, SB, SC . . . SL, SM, SN, die man als negativ betrachtet; so wird der vorige Ausdruk allgemein für alle Fälle der Summe und der Unterschiede. Verschwinden die beyden Glieder des Bruchs zugleich; so wird der Ausdruk für die Tangente unbestimmt, SZ, folglich auch Q verschwinden, und alle Punkte der Ebene haben einerley Eigenschaft in Bezug auf die der Lage nach gegebenen geraden Linien.

Haben hingegen (welches der 2te Hauptfall ist) die der Lage nach gegebenen geraden Linien nicht alle einerley gemeinschaftlichen Durchschnitts-Punkt; so zeigt Herr l'Huilier, daß sich dieser Fall ganz leicht auf den vorhergehenden zurük bringen lasse. Wirklich nehme man in der Ebene, in welcher die der Lage nach gegebenen Punkte liegen, irgend einen Punkt, und ziehe durch denselben Parallelen mit allen diesen Linien. Die Perpendikel, die man von irgend einem Punkt dieser Ebene auf die der Lage nach gegebenen Linien fällt, sind

die Summen oder die Unterschiede der Perpendikel, die man von dem nemlichen Punkt auf die gezogenen Parallelen fällen kann, und der Entfernungen dieser leztern von den der Lage nach gegebenen Linien. Da nun diese Entfernungen beständig gleich groß bleiben; so ist die Summe der Rechteke, die enthalten sind zwischen den auf die der Lage nach gegebenen geraden Linien gefällten Perpendikeln, und zwischen eben so viel der Grösse nach gegebenen geraden Linien, um eine beständige Grösse verschieden von der Summe der Rechteke, die zwischen eben diesen der Grösse nach gegebenen Linien, und zwischen den auf die gezogenen Parallelen von eben dem Punkt gefällten Perpendikeln enthalten sind. Ist daher die erste Summe gegeben; so ist es die zweyte auch. Mithin berührt nach dem vorhergehenden Fall, der Punkt, aus dem die Perpendikel gefällt sind, eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Herr l'Huilier zieht nun nach weiterer Entwiklung dieses Falls aus allem Bisherigen noch einige Folgerungen, von denen ich die zwey ersten hieher seze:

1. Wenn eine beliebige Anzahl gerader Linien der Lage nach auf einer Ebene gegeben ist; und wenn in der nemlichen Ebene andere gerade Linien ebenfalls in beliebiger Anzahl der Lage nach gegeben sind; so ist (wenn anders der Ort bestimmt ist) eine gerade Linie der Ort aller Punkte von der Beschaffenheit, daß, wenn man aus einem derselben auf alle der Lage nach gegebene Linien Perpendikel fällt, die Summe der Rechteke, die zwischen den Perpendikeln, die auf die ersten geraden Linien gefällt werden, und zwischen eben so viel der Grösse nach gegebenen Linien enthalten sind, zu der Summe der Rechteke, die zwischen den auf die zweyte gerade Linien gefällten Perpendikeln und zwischen eben so viel der Grösse nach gegebenen geraden Linien enthalten sind, ein gegebenes Verhältniß hat. Der Beweis dieses

Zusazes

Zusazes läßt sich leicht finden, und eben so von dem folgenden.

2. Wenn in einer Ebene eine beliebige Anzahl gerader Linien der Grösse und Lage nach gegeben ist; so ist eine gerade Linie der Ort von den Scheiteln von Dreyeken, deren Summe gegeben ist, und welche die gegebenen geraden Linien zu Grundlinien haben. Hiemit ist 37, I. Elem. allgemeiner gemacht.

Das bisher angeführte l' Huilierſche Verfahren scheint vor dem Simsonſchen bedeutende Vorzüge zu haben, theils in der Leichtigkeit der ganzen Behandlung; theils in der Allgemeinheit, womit die nemliche Auflösung unmittelbar auf jede beliebige Anzahl gegebener Linien anwendbar ist, statt daß nach Simsons Verfahren der Fall von einer gewissen Anzahl von Linien immer erst auf die um Eins geringere Anzahl, und so fort bis endlich auf nur 2 Linien herabgebracht werden muß; endlich auch noch durch die Art, wie der Fall, in welchem die der Lage nach gegebenen Linien keinen gemeinschaftlichen Durchschnitt haben, auf den ersten zurük gebracht wird, wo sie einen haben.

30. Saz.

Wenn aus einem Punkt an eine der Lage nach gegebene gerade Linie zwey gerade Linien unter gegebenen Winkeln gezogen werden, und die Stüke, welche auf der der Lage nach gegebenen Linie zwischen den gezogenen Linien und einem, oder zwey gegebenen Punkten abgeschnitten sind, ein gegebenes Verhältniß unter einander haben; so berührt der Punkt, aus welchem die zwey Linien gezogen worden, eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Fig.

Fig. 45. 2.

1. Fall. Wenn Ein Punkt gegeben iſt. Es ſeyen aus dem Punkt A an die der Lage nach gegebene gerade Linie BC, auf welcher der Punkt D gegeben iſt, zwey gerade Linien AE, AF unter den gegebenen Winkeln AED, AFD gezogen, und das Verhältniß von DE zu DF ſeye gegeben; ſo berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie. Denn, weil das Verhältniß von DE zu DF gegeben iſt; ſo iſt auch das Verhältniß von DE zu EF gegeben (6. D.), und, weil das Dreyek EAF der Gattung nach gegeben iſt (43. D.); ſo iſt das Verhältniß von EF zu EA gegeben; alſo iſt (9. D.) das Verhältniß von DE zu EA gegeben, und, weil auch der Winkel DEA gegeben iſt; ſo iſt, DA noch gezogen, das Dreyek DEA der Gattung nach gegeben (44. D.); und, weil der Punkt D gegeben iſt; ſo iſt DA der Lage nach gegeben (32. D.).

Kompoſition.

Man nehme auf der Linie BC irgend zwey Punkte G, H ſo, daß DG zu DH in dem gegebenen Verhältniß ſeye; aus dieſem ziehe man GH, HK unter den gegebenen Winkeln; durch die Punkte D, K ziehe man die gerade Linie DK, und verlängere ſie nach Belieben; ſo wird diß der geſuchte Ort ſeyn. Denn man ziehe aus irgend einem Punkt A auf derſelben an BC die geraden Linien AE, AF mit KG, KH gleichlauffend; ſo iſt DE: DG = (DA: DK =) DF: DH, und verwechſelt DE: DF = DG: DH, d. i. in dem gegebenen Verhältniß. Dieſe Kompoſition iſt etwas kürzer, als diejenige, welche man finden würde, wenn man genau der Analyſe folgte. Es geſchieht diß öfters, wenn man eine gerade Linie bey der Kompoſition brauchen kann, die man bey

der

der Analyse noch nicht brauchen durfte, wie hier die gerade Linie DK.

Fig. 45. b.

2. Fall. Wenn 2 Punkte gegeben sind. Es seyen die Punkte B, G gegeben, aus A werden an BC die geraden Linien AE, AF unter den gegebenen Winkeln gezogen, und es seye das Verhältniß von BE zu CF gegeben. Weil also die Punkte B, C gegeben, und auf der Linie BC die Punkte E, F so genommen sind, daß das Verhältniß von BE zu CF gegeben ist; so ist ein anderer Punkt D gegeben, so, daß das Verhältniß von DE zu DF dem gegebenen gleich werde. Man nehme nemlich DB zu DC in dem gegebenen Verhältniß von BE zu CF; so hat (12, 5. E. oder 19, 5. E.) DE zu DF das nemliche gegebene Verhältniß. Und, weil BC gegeben ist; so ist der Punkt D gegeben, also berührt der Punkt A nach dem vorhergehenden Fall eine der Lage nach gegebene gerade Linie. Und, wenn man den Punkt D findet, wie gesagt worden, BC, CG unter den gegebenen Winkeln, und durch die Punkte D, G die gerade Linie DG zieht, und verlängert; so wird diese der gesuchte Ort seyn. Denn man ziehe aus irgend einem Punkt A auf derselben die Linien AE, AF mit BG, CG gleichlauffend; so wird, wie beym vorhergehenden Fall erwiesen, daß DE : DF = DB : BC seye. Also ist (19, 5. E. oder 12, 5. E.) BE : CF = DB : DC, d. i. in dem gegebenen Verhältniß.

Berech-

Berechnung.

Fig. 45. a.

D : DF = ſin. AFD : ſin. (AFD + ADF)
E : AD = ſin. (AED + ADF) : ſin. AED

AFD. ſin. (AED + ADF) : ſin. AED : ſin. (AFD + ADF)
ng. ADF + cotang. AED : cotang. ADF + cotang. AFD
DF. ctg. AED — DE. ctg. AFD
DE — DF

Fig. 45. b.

ſt D wird leicht beſtimmt, und ſo iſt dieſer Fall auf den vori-
n findet nemlich

ctg. ADF = $\frac{\text{CF. ctg. AED} - \text{BE. ctg. AFD}}{\text{BE} - \text{CF}}$

31. Saz.

Fig. 46.

Wenn aus einem Punkt G an zwey der Lage nach gegebenen geraden Linien AB, CD zwey gerade Linien GH, GK unter gegebenen Winkeln gezogen werden, und die Stüke EH, FK, welche auf den der Lage nach gegebenen Linien zwiſchen gegebenen Punkten E, F, und zwiſchen dieſen gezogenen Linien abgeſchnitten ſind, ein gegebenes Verhältniß unter einander haben; ſo berührt der Punkt G, aus welchem die Linien gezogen ſind, eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Fig. 46. a.

I. Fall. Wenn die der Lage nach gegebenen geraden Linien gleichlauffen. Es ſeye

1) EH = FK oder das gegebene Verhältniß das Verhältniß der Gleichheit. Man ziehe EF, HK. Weil nun die Punkte E, F gegeben ſind; ſo iſt EF der Lage und Gröſſe nach gegeben. Nach der Vorausſezung aber ſind EH, FK gleich, und gleichlauffend; alſo ſinds auch EF, HK; folglich iſt HK der Gröſſe nach gegeben. Der Winkel KHB aber iſt gleich dem gegebenen FEB, und, nach der Vorausſezung iſt BHG gegeben, alſo iſt der Winkel KHG gegeben. Eben ſo iſt auch der Winkel HKG gegeben; alſo iſt das Dreyek GHK der Gattung nach gegeben; nun iſt KH der Gröſſe nach gegeben, folglich auch HG. Weil alſo aus dem Punkt G an die der Lage nach gegebene gerade Linie AB eine der Gröſſe nach gegebene gerade Linie GH unter einem gegebenen Winkel GHB gezogen iſt; ſo berührt der Punkt G eine der Lage nach gegebene mit AB gleichlauffende Linie nach dem 20ſten Saz.

Kompo-

Berechnung.

Fig. 45. a.

DF = sin. AFD : sin. (AFD + ADF)
AD = sin. (AED + ADF) : sin. AED
AFD. sin. (AED + ADF) : sin. AED : sin. (AFD + ADF)
ang. ADF + cotang. AED : cotang. ADF + cotang. AFD
DE. etg. AED — DE. etg. AFD
DE — DF

Fig. 45. b.

ff ist wird leicht bestimmt, und so ist dieser Fall auf den vorh
an findet nemlich

b etg. ADF = $\frac{CF.\ etg.\ AED - BE.\ etg.\ AFD}{BE - CF}$,

31. Saz.

Fig. 46.

Wenn aus einem Punkt G an zwey der Lage nach gegebenen geraden Linien AB, CD zwey gerade Linien GH, GK unter gegebenen Winkeln gezogen werden, und die Stüke EH, FK, welche auf den der Lage nach gegebenen Linien zwiſchen gegebenen Punkten E, F, und zwiſchen dieſen gezogenen Linien abgeſchnitten ſind, ein gegebenes Verhältniß unter einander haben; ſo berührt der Punkt G, aus welchem die Linien gezogen ſind, eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Fig. 46. a.

I. Fall. Wenn die der Lage nach gegebenen geraden Linien gleichlauffen. Es ſeye

1) EH = FK oder das gegebene Verhältniß das Verhältniß der Gleichheit. Man ziehe EF, HK. Weil nun die Punkte E, F gegeben ſind; ſo iſt EF der Lage und Gröſſe nach gegeben. Nach der Vorausſezung aber ſind EH, FK gleich, und gleichlauffend; alſo ſinds auch EF, HK; folglich iſt HK der Gröſſe nach gegeben. Der Winkel KHB aber iſt gleich dem gegebenen FEB, und, nach der Vorausſezung iſt BHG gegeben, alſo iſt der Winkel KHG gegeben. Eben ſo iſt auch der Winkel HKG gegeben; alſo iſt das Dreyek GHK der Gattung nach gegeben; nun iſt KH der Gröſſe nach gegeben, folglich auch HG. Weil alſo aus dem Punkt G an die der Lage nach gegebene gerade Linie AB eine der Gröſſe nach gegebene gerade Linie GH unter einem gegebenen Winkel GHB gezogen iſt; ſo berührt der Punkt G eine der Lage nach gegebene mit AB gleichlauffende Linie nach dem 20ſten Saz.

Kompo-

Kompoſition.

Man ziehe EF, und EL, FL unter den gegebenen Winkeln, dieſe beyde Linien begegnen einander in L; durch L ziehe man LG mit AB, CD gleichlauffend; ſo wird LG der geſuchte Ort ſeyn. Denn aus irgend einem Punkt G auf derſelben ziehe man an AB, CD die geraden Linien GH, GK mit LE, LF gleichlauffend; ſo iſt, weil die Figuren ELGH, GKFL Pellgrmme ſind, EH gleich LG, d. i. gleich FK.

Fig. 46. b.

2. Es ſeye nicht EH = FK, oder das gegebene Verhältniß ſeye nicht das Verhältniß der Gleichheit, und das übrige bleibe, wie vorhin. Es begegne GK der Linie AB in L, und man ziehe FM an AB mit GK gleichlauffend. Weil nun FK, ML gleich ſind, und nach der Vorausſezung das Verhältniß von EH zu FK, gegeben iſt; ſo iſt auch das Verhältniß von EH zu ML gegeben; es iſt aber die Linie FM der Lage nach gegeben, denn ſie iſt aus einem gegebenen Punkt F auf einer der Lage nach gegebenen geraden Linie CD unter einem gegebenen Winkel gezogen (32. D.), und, weil auch AB der Lage nach gegeben iſt; ſo iſt der Punkt M gegeben. Weil alſo 2 Punkte E, M auf der geraden Linie AB gegeben ſind, und an dieſe Linie die Linien GH, GL unter gegebenen Winkeln gezogen ſind, und die Stüke EH, ML ein gegebenes Verhältniß unter einander haben; ſo berührt der Punkt G eine der Lage nach gegebene gerade Linie nach dem 2ten Fall des vorhergehenden Sazes.

Kompoſition.

Aus dem Punkt F auf der der Lage nach gegebenen geraden Linie CD ziehe man an die andere der Lage nach gege-

gebene gerade Linie AB, die gerade Linie FM, unter
nem Winkel gleich dem, den die an CD zu ziehende
nie mit CD einſchlieſſen ſoll; und nun finde man, wie
y dem 2ten Fall des vorhergehenden Sazes gezeigt
rden, eine gerade Linie NO, ſo, daß, wenn man aus
gend einem Punkt derſelben an die gerade Linie AB
ey gerade Linien unter den gegebenen Winkeln zieht,
e Stüke EH, ML, welche zwiſchen den Punkten E,
, und den gezogenen Linien abgeſchnitten ſind, das
gebene Verhältniß unter einander haben; ſo wird die
nie NO der geſuchte Ort ſeyn. Denn aus irgend ei-
m Punkt G auf derſelben ziehe man an AB, CD die
nien GH, GLK unter den gegebenen Winkeln. Es
d alſo nach der Verzeichnung LK, FM gleichlauffend,
d weil EH zu ML das gegebene Verhältniß hat, und
L gleich iſt FK; ſo hat auch EH zu FK das gegebe-
Verhältniß.

II. Fall. Wenn die der Lage nach gegebenen ge-
den Linien einander ſchneiden. Es ſchneiden einander
e der Lage nach gegebenen Linien AB, CD in dem
unkt B, und unter gegebenen Winkeln ſeyen an dieſel-
die geraden Linien GH, GK gezogen, die

Fig. 46. c.

1. mit CD, AB gleichlauffend ſeyen, und die Stüke
E, KF, welche zwiſchen den gezogenen Linien und ge-
benen Punkten E, F abgeſchnitten ſind, haben ein ge-
benes Verhältniß unter einander. Man ergänze das
ligrm. EBFM, und GK begegne der Linie EM in N.
eil nun EH, KF gleich ſind GN, NM, und der Win-
MNG gegeben iſt; ſo iſt, die gerade Linie MG ge-
jen, das Dreyek GMN der Gattung nach gegeben,
4. D.) alſo iſt der Winkel NMG gegeben; nun iſt
Lage von EM, und der Punkt M gegeben; alſo iſt
gerade Linie MG der Lage nach gegeben (32. D.).

Kompoſition.

Man ziehe EF, und EL, FL unter den gegebenen Winkeln, dieſe beyde Linien begegnen einander in L; durch L ziehe man LG mit AB, CD gleichlauffend; ſo wird LG der geſuchte Ort ſeyn. Denn aus irgend einem Punkt G auf derſelben ziehe man an AB, CD die geraden Linien GH, GK mit LE, LF gleichlauffend; ſo iſt, weil die Figuren ELGH, GKFL Pellgrmme ſind, EH gleich LG, d. i. gleich FK.

Fig. 46. b.

2. Es ſeye nicht EH = FK, oder das gegebene Verhältniß ſeye nicht das Verhältniß der Gleichheit, und das übrige bleibe, wie vorhin. Es begegne GK der Linie AB in L, und man ziehe FM an AB mit GK gleichlauffend. Weil nun FK, ML gleich ſind, und nach der Vorausſezung das Verhältniß von EH zu FK, gegeben iſt; ſo iſt auch das Verhältniß von EH zu ML gegeben; es iſt aber die Linie FM der Lage nach gegeben, denn ſie iſt aus einem gegebenen Punkt F auf einer der Lage nach gegebenen geraden Linie CD unter einem gegebenen Winkel gezogen (32. D.), und, weil auch AB der Lage nach gegeben iſt; ſo iſt der Punkt M gegeben. Weil alſo 2 Punkte E, M auf der geraden Linie AB gegeben ſind, und an dieſe Linie die Linien GH, GL unter gegebenen Winkeln gezogen ſind, und die Stüke EH, ML ein gegebenes Verhältniß unter einander haben; ſo berührt der Punkt G eine der Lage nach gegebene gerade Linie nach dem 2ten Fall des vorhergehenden Sazes.

Kompoſition.

Aus dem Punkt F auf der der Lage nach gegebenen geraden Linie CD ziehe man an die andere der Lage nach gege-

gebene gerade Linie AB, die gerade Linie FM, unter
iem Winkel gleich dem, den die an CD zu ziehende
nie mit CD einſchlieſſen ſoll; und nun finde man, wie
y dem 2ten Fall des vorhergehenden Sazes gezeigt
rden, eine gerade Linie NO, ſo, daß, wenn man aus
gend einem Punkt derſelben an die gerade Linie AB
ey gerade Linien unter den gegebenen Winkeln zieht,
e Stüke EH, ML, welche zwiſchen den Punkten E,
, und den gezogenen Linien abgeſchnitten ſind, das
gebene Verhältniß unter einander haben; ſo wird die
nie NO der geſuchte Ort ſeyn. Denn aus irgend ei-
m Punkt G auf derſelben ziehe man an AB, CD die
ien GH, GLK unter den gegebenen Winkeln. Es
d alſo nach der Verzeichnung LK, FM gleichlauffend,
d weil EH zu ML das gegebene Verhältniß hat, und
L gleich iſt FK; ſo hat auch EH zu FK das gegebe-
Verhältniß.

II. Fall. Wenn die der Lage nach gegebenen ge-
den Linien einander ſchneiden. Es ſchneiden einander
der Lage nach gegebenen Linien AB, CD in dem
nkt B, und unter gegebenen Winkeln ſeyen an dieſel-
die geraden Linien GH, GK gezogen, die

Fig. 46. c.

1. mit CD, AB gleichlauffend ſeyen, und die Stüke
E, KF, welche zwiſchen den gezogenen Linien und ge-
benen Punkten E, F abgeſchnitten ſind, haben ein ge-
benes Verhältniß unter einander. Man ergänze das
ligrm. EBFM, und GK begegne der Linie EM in N.
eil nun EH, KF gleich ſind GN, NM, und der Win-
MNG gegeben iſt; ſo iſt, die gerade Linie MG ge-
gen, das Dreyek GMN der Gattung nach gegeben,
4. D.) alſo iſt der Winkel NMG gegeben; nun iſt
Lage von EM, und der Punkt M gegeben; alſo iſt
gerade Linie MG der Lage nach gegeben (32. D.).

Die Kompoſition erhellt von ſelbſt. Man ergänze nemlich das Prllgrm BM, nehme OE zu EM in dem gegebenen Verhältniß, und ziehe die Linie MO; ſo wird dieſe der geſuchte Ort ſeyn. Denn, man ziehe aus irgend einem Punkt G auf derſelben die geraden Linien GH, GK, wie geſagt worden; ſo iſt GN : NM, d. i. EH : FK = OE : EM, d. i. in dem gegebenen Verhältniß.

Fig. 46. d. e.

2. Es ſeyen nicht beyde gezogene Linien mit den der Lage nach gegebenen geraden Linien gleichlauffend, und das übrige bleibe, wie vorhin. Wenn eine der gezogenen Linien GH mit einer von den der Lage nach gegebenen Linien, z. B. mit CD gleichlauffend iſt; ſo ziehe man durch den gegebenen Punkt F auf der Linie CD eine mit der andern der Lage nach gegebenen Linie AB gleichlauffende Linie FL; iſt aber keine der gezogenen Linien GH, GK mit einer von den der Lage nach gegebenen geraden Linien gleichlauffend; ſo ziehe man, auf welcher der gegebenen Linien man will, z. B. auf CD durch den gegebenen Punkt F eine mit der andern der Lage nach gegebenen geraden Linie AB gleichlauffende Linie FL, und FL begegne in beyden Fällen, der an CD gezogenen Linie GK in dem Punkt L. Es iſt alſo FL der Lage nach gegeben (31. D.); und, weil in dem Dreyek FKL die Winkel KFL, FKL gegeben ſind; ſo iſt das Verhältniß von KF zu FL gegeben, nach der Vorausſezung aber iſt das Verhältniß von EH zu FK gegeben; alſo iſt (9. D.) auch das Verhältniß von EH zu FL gegeben. Weil alſo an 2 der Lage nach gegebene Parallel-Linien AB, FL zwey gerade Linien GH, GL unter gegebenen Winkeln gezogen ſind, und die Stüke EH, FL, die zwiſchen den gezogenen Linien und den auf den Parallelen gegebenen Punkten E, F abgeſchnit-

ſchnitten ſind, ein gegebenes Verhältniß unter einander haben; ſo berührt der Punkt G eine der Lage nach gegebene gerade Linie nach dem 1ſten vorhergehenden Fall.

Kompoſition.

Es ſeye das Verhältniß von FM zu FN gleich dem gegebenen Verhältniß, welches nemlich das Stük auf der Linie AB zu dem Stük auf der Linie CD haben ſoll, und durch den Punkt N ziehe man NO mit GK gleichlauffend, durch F aber ziehe man FL mit AB gleichlauffend, und FL begegne der Linie NO in O: und, vermittelſt des vorhergehenden Falls, finde man die Linie GP, ſo, daß, wenn man aus irgend einem Punkt derſelben G die geraden Linien GH, GL an die Parallelen AB, FO unter den gegebenen Winkeln zieht, die Stüke EH, FL, welche zwiſchen dieſen gezogenen Linien und zwiſchen den gegebenen Punkten E, F abgeſchnitten ſind, eben das Verhältniß unter einander haben, welches FM zu FO hat; ſo werden eben dieſe Linien GH, GL auf AB, CD die Stüke EH, FK ſo abſchneiden, daß dieſe eben das Verhältniß unter einander haben, welches FM zu FN hat. Denn, weil nach der Verzeichnung

EH: FL = FM: FO

und FL: FK = FO: FN

ſo iſt gleichförmig (ex aequo) EH: FK = FM: FN.

Schooten fügt dieſem Ort, bey dem Fall, wo die der Lage nach gegebenen geraden Linien unter einander gleichlauffen, folgende Bemerkung bey, S. 249 ſeiner Exercitationum Mathematicarum: „Es iſt zwar dieſer Saz allgemein, und findet Statt, wie groß auch „die Anzahl der Parallel-Linien ſeyn mag, inzwiſchen „hielt ich es doch für der Mühe werth, der vollſtändi-

»gern Entwikelung wegen folgende Operation bei zuse»zen.« Hierauf giebt er eine Algebraische Operation an, vermittelst welcher er den Saz in dem Fall von 3 geraden Linien zu beweisen glaubt. Allein hier fiel er offenbahr in einen groben Fehler, worein er durch seine nicht genau genug angestellte Rechnung verleitet wurde, da er nemlich seine Aufmerksamkeit mehr auf die Zeichen des Kalkuls, als auf die Sache selbst richtete. Denn, wenn aus einem Punkt an 3 der Lage nach gegebene gerade Parallelen 3 gerade Linien unter gegebenen Winkeln gezogen werden, und die Stüke, welche auf den Parallelen zwischen gegebenen Punkten und zwischen den gezogenen Linien abgeschnitten werden, ein gegebenes Verhältniß unter einander haben; wer sieht nicht sogleich, daß dieser Punkt schon wegen 2 auf gedachte Art gezogenen Linien eine der Lage nach gegebene gerade Linie berühre, und daß der nemliche Punkt wegen einer von diesen 2 Linien, und wegen der dritten noch eine andere der Lage nach gegebene gerade Linie berühren müsse (denn ausser zufälligen Umständen wird die leztere mit der erstern nicht einerley seyn), daß also dieser Punkt gegeben seye, und der Saz keinen Ort, sondern eine Aufgabe enthalte. Wenn aber mehr als 3 Parallelen der Lage nach gegeben sind, so wird (ausser unter zufälligen Umständen) kein Punkt gefunden werden können, der dem verlangten eine Genüge leistete. Schooten aber gerieth dadurch in diesen Irrthum, weil er nicht bemerkte, daß die gerade Linie CD die bey ihm durch die Zeichen $\frac{bx - ay}{c}$ ausgedrükt ist, auch durch $x - a$ ausgedrükt werden könne: hätte er diß gethan, so hätte er eine Gleichung erhalten, in welcher nur eine von den unbekannten Grössen x, y enthalten gewesen wäre. Eben diesen aus der nemlichen Quelle herfliessenden Feh-

ser wiederholt er nochmahlen für den Fall, wenn die beyden der Lage nach gegebenen geraden Linien sich schneiden.

Fig. 46. f.

Es scheint übrigens dieser Saz den Apollonischen von späterer Hand beigefügt zu seyn. Denn, er ist nur sehr wenig von dem 22sten und 23sten Saz verschieden. Denn, es seyen an die geraden Linien AB, CD die zwey Linien GH, GK unter gegebenen Winkeln gezogen, und die Stüke HE, KF die auf den gegebenen Linien zwischen gegebenen Punkten E, F, und zwischen den gezogenen Linien abgeschnitten sind, haben ein gegebenes Verhältniß unter einander, und man ergänze die Prllgrmme EHGL, FKGM; so sind folglich EL, FM der Lage nach gegeben, und überdiß sind auch die Winkel bey L, M gegeben, die nemlich den gegen über stehenden bey H, K gleich sind. Weil also aus einem Punkt G an die der Lage nach gegebenen Linien EL, FM zwey gerade Linien GL, GM, die ein gegebenes Verhältniß unter einander haben, (denn sie sind den Linien HE, KF gleich) unter gegebenen Winkeln gezogen sind; so berührt der Punkt G nach dem 22sten oder 23sten Saz eine der Lage nach gegebene gerade Linie. Inzwischen, weil dieser Saz doch bey Pappus vorkommt, gab ich ihm eine eigene Auflösung, und sezte ihm den 30sten Saz vor, der bey Pappus nicht vorkommt.

Berechnung.

Fig. 46. a.

I. Fall. 1. Der Punkt L, durch welchen die mit AB gleichlauffende Linie LG geht, wird leicht bestimmt. Es ist nemlich in dem Dreyek LEF die

Seite EF nebſt den beyden anliegenden Winkeln gegeben.

Fig. 46. b.

2. In dem Dreyek EFM findet man $EM = \frac{EF.\ \text{ſin.}\ (GKC - BEF)}{\text{ſin.}\ GKC}$. Hieraus findet man, wie in dem 2ten Fall des 20ſten Sazes

$$EN = \frac{EM.\ EH}{FK - EH},$$ und

$$\text{cotang.}\ GNB = \frac{EH.\text{cotang.}GKC - FK.\text{cotang.}GHA}{FK - EH}$$

Fig. 46. c.

II. Fall. 1. In dem Dreyek EMO iſt $EM = BF$ gegeben, und $EO = \frac{BF.\ EH}{FK}$, und der eingeſchloſſene Winkel MEO gleich dem gegebenen Winkel ABC, alſo findet man leicht das übrige.

Fig. 46. d. e.

2. Es iſt $KF : FL = \text{ſin.}\ KLF : \text{ſin.}\ FKC$

nem gegebenen Raum gleich ist; so berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Fig. 47. a.

1. Fall. Wenn der Punkt A zwischen den Parallelen liegt. Es begegne AG der Linie BC in dem Punkt H, so ist, weil der Winkel AGD gegeben ist, der ihm gleiche AHF ebenfalls gegeben; es ist aber auch der Winkel AFH gegeben, mithin ist das Dreyek AFH der Gattung nach gegeben (43. D.), also ist das Verhältniß von AF zu AH, oder das Verhältniß des Rechteks GAF zu dem Rechtek GAH gegeben; nach der Voraussezung aber ist das Rechtek GAF gegeben, also ist auch das Rechtek GAH gegeben; und weil die gerade Linie GH der Grösse nach gegeben ist (35. D.), so ist auch GA der Grösse nach gegeben (86. D.); es ist aber auch der Winkel AGD gegeben, mithin berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie nach dem 20sten Saz.

Weil aber zur Komposition erfordert wird, nemlich nach 86. D., daß das gegebene Rechtek GAH über einem Stük von der der Grösse nach gegebenen Linie GH beschrieben, und über dem andern Stük der Linie GH als Ergänzung des vorigen Rechteks ein Quadrat errichtet werde, und, weil diß (27, 6. E.) nicht geschehen kann, ausser wenn dieser gegebene Raum GAH nicht grösser ist, als das Quadrat auf der Hälfte der Linie GH; so wird der Ort nicht immer verzeichnet werden können. Ist aber der gegebene Raum, dem das Rechtek GAF gleich seyn soll, gerade von der Beschaffenheit, daß der Punkt A auf die Mitte von GH fällt, so wird nur eine einige gerade Linie dem Ort Genüge thun. Den Raum nun, der gerad diese Beschaffenheit hat,

findet man, wenn man aus irgend einem Punkt G auf der geraden Linie DE an BC die geraden Linien GH, GM unter den gegebenen Winkeln zieht; denn, wenn man GH in K in zwey gleiche Theile theilt, und KL mit GM gleichlauffend zieht, so wird der gesuchte Raum gleich seyn dem Rechtek GKL; es ist aber wegen der Parallelen KH: KL = GH: GM; also nach 1, 6. E. das Rechtek GKH: Rechtek GKL = Quadrat GH: Rechtek HGM; es ist aber das Rechtek GKH gleich dem Quadrat von GK, d. i. gleich dem vierten Theil des Quadrats von GH; also ist das Rechtek GKL gleich dem vierten Theil vom Rechtek HGM. Daß aber der Raum GKL der größte seye unter allen Rechteken, die zwischen geraden Linien eingeschlossen werden können, welche von einem zwischen den Parallelen gelegenen Punkt A an diese Parallelen unter gegebenen Winkeln gezogen werden, erhellet leicht. Denn, weil KH: KL = AH: AF, so ist das Rechtek GKH: Rechtek GKL = Rchtk GAH: Rechtek GAF; es ist aber GKH > GAH (5, 2. E.), mithin auch GKL > GAF; also GKL das größte unter allen möglichen Rechteken.

Kompositon.

Man ziehe aus irgend einem Punkt G auf der geraden Linie DE an BC die geraden Linien GH, GM unter den gegebenen Winkeln, und es seye der gegebene Raum gleich dem Rechtek N; wenn nun der gegebene Raum N grösser wäre, als der vierte Theil des Rechteks HGM, so würde man den Ort nicht verzeichnen können, weil der gegebene Raum grösser wäre, als der größte, der sich verzeichnen läßt. Es seye mithin der Raum N nicht grösser, als der vierte Theil des Rechteks HGM; und man nehme den Raum O in eben dem

Ver-

Verhältniß zu dem Raum N, welches GH zu GM hat; ſo iſt (1, 6. E.) Rchtk HGM : Qudrt. GH = N : O; und, weil N nicht gröſſer iſt, als der vierte Theil von dem Rechtek von HGM; ſo iſt auch O nicht gröſſer, als der vierte Theil von dem Quadrat von GH, d. i. O iſt nicht gröſſer, als das Quadrat von GK, welche Linie die Hälfte iſt von GH; alſo kann man über einem Stük von GH ein Rechtek gleich O beſchreiben, ſo, daß ſeine Ergänzung auf dem andern Stük der Linie GH ein Quadrat wird (28, 6. E.); man thue diß, und, es ſeyen A, α die Punkte, bis an welche das auf einem Stük von GH beſchriebene Rechtek ſich erſtrekt, ſo werden die durch dieſe beyden Punkte mit den beyden Parallelen ebenfalls gleichlauffend gezogenen Linien AP, απ der geſuchte Ort ſeyn; d. i. wenn man aus irgend einem Punkt A auf einer derſelben an BC, DE die geraden Linien AF, AG mit GM, GH gleichlauffend zieht, ſo wird das Rchtk GAF gleich dem gegebenen Raum N ſeyn. Denn, weil Rchtk GAF : Rchtk GAH = (AF : AH, d. i. = GM : GH, d. i. nach der Verzeichnung =) N : O; und das Rechtek GAH nach der Verzeichnung gleich iſt dem Raum O; ſo iſt das Rechtek GAF gleich N, d. i. gleich dem gegebenen Raum.

Fig. 47. b.

2. Fall. Wenn der Punkt A auſſerhalb der Parallelen liegt, ſo erhält man völlig die nemliche Analyſis und Kompoſition vermittelſt 85. D. alſo findet hier keine Beſtimmung Statt.

Berechnung.

Fig. 47. a. b.

Für beyde Fälle ist

$$\left.\begin{matrix}AH\\GA\times AH\end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix}AF\\GA\times AF = \text{sin. AFB : sin. AGD}\\\text{Raum N}\end{matrix}\right.$$

Nun ist in dem 1sten Fall $AG = GH - AH$, mithin

$$(GH - AH)\,AH = \frac{N.\ \text{sin. AFB}}{\text{sin. AGD}}$$

und $AH = \frac{1}{2}GH \pm \sqrt{\frac{1}{4}GH^2 - \frac{N.\ \text{sin. AFB}}{\text{sin. AGD}}}$

Für den 2ten Fall ist $AG = GH + AH$, mithin

$$AH = -\frac{1}{2}GH \pm \sqrt{\frac{1}{4}GH^2 + \frac{N.\ \text{sin. AFB}}{\text{sin. AGD}}}.$$

33. Satz.

Fig. 48.

Wenn aus einem Punkt A an zwey der Lage nach gegebene Parallelen BC, DE die geraden Linien AF, AG unter gegebenen Winkeln gezogen werden, und die Summe der über diesen Linien beschriebenen der Gattung nach gegebenen Figuren gleich ist einem gegebenen Raum; so berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

1. Fall. Wenn die der Gattung nach gegebenen Figuren Quadrate sind.

Es begegne AG der geraden Linie BC in H, und man errichte auf AH das Perpendikel AK, nehme AK gleich AF, und ziehe die Linien HK, GK. Weil nun das Dreyek AFH der Gattung nach gegeben ist; so ist das Verhältniß von HA zu AF oder AK gegeben, und,

da

da auch der Winkel HAK gegeben ist; so ist (44. D.) das Dreyek AHK der Gattung nach, also der Winkel AHK, und das Verhältniß von KH zu AH gegeben. Nach der Voraussezung aber ist die Summe der Quadrate von GA und AF, oder von GA und AK gegeben; also ist das Quadrat von GK, und GK selbst der Grösse nach gegeben; es ist aber auch GH der Grösse nach gegeben (35. D.), also das Verhältniß von GH zu GK gegeben; nun ist gezeigt worden, daß der Winkel GHK gegeben seye; also ist das Verhältniß von GH zu HK gegeben (47. D.); nun ist GH gegeben, also auch HK. Und, da gezeigt worden, daß das Verhältniß von KH zu HA gegeben seye; so ist HA der Grösse nach gegeben (2. D.), und, weil auch der Winkel AHC, und die Lage der geraden Linie BC gegeben ist; so berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie nach dem 2östen Saz.

Weil aber zur Komposition erfodert wird, daß man aus irgend einem Punkt G auf der geraden Linie DE, die Linie GH unter dem Winkel HGD gleich dem gegebenen Winkel ziehe, und dann die der Grösse nach gegebene Linie GK aus dem gegebenen Punkt G an die der Lage nach gegebene Linie HK ziehe, welches nicht immer möglich ist; so kann der Ort nicht immer verzeichnet werden, so oft nemlich die gerade Linie GK die Seite eines Quadrats, das dem gegebenen Raum gleich ist, kleiner ist, als das aus dem Punkt G auf HK gefällte Perpendikel. Nur eine einzige Auflösung wird möglich seyn, wenn GK gerade gleich ist diesem Perpendikel. Den Raum nun, bey welchem dieses Statt findet, und den Ort in diesem Fall findet man so. Man denke sich die Sache schon geschehen, nemlich, es seye (Fig. 48. a.) der Punkt a auf dem gesuchten Ort, und man ziehe af, aG an BC, DE unter den gegebenen Winkeln, aM gleich af errichte man senkrecht auf aH, und

ziehe

ziehe HM; so muß die von G an M gezogene Linie GM senkrecht auf HM seyn. Es ist also der rechte Winkel GMH gegeben, und, daß der Winkel GHM gegeben seye, beweißt man wie im vorhergehenden; also ist das Dreyek GHM der Gattung nach gegeben, und, da GH gegeben ist; so ist folglich auch GM die Seite eines Quadrats gegeben, das der Summe der Quadrate von Ga und aM gleich ist. Daß aber auch die gerade Linie Ha gegeben seye, wird auf eben die Art, wie im vorhergehenden von HA bewiesen werden.

Komposition in diesem besondern Fall.

Man ziehe aus irgend einem Punkt G auf einer der Parallelen, die geraden Linien GH, GL unter den gegebenen Winkeln, und GN gleich GL senkrecht auf GH; auf die hierauf gezogene Linie HN fälle man das Perpendikel GM; so wird das Quadrat von GM der gesuchte Raum seyn. Auf GH fälle man das Perpendikel Ma; so wird die gerade durch a mit BC gleichlaufend gezogene Linie aa der gesuchte Ort seyn. Denn, man ziehe an BC, die Linie af gleichlauffend mit GL. Und, weil GL: af = (GH: aH =) GN: aM, und GL = GN; so ist auch af gleich aM. Also ist die Summe der Quadrate von Ga und af gleich (der Summe der Quadrate von Ga und aM, d. i. gleich) dem Quadrat von GM.

Es erhellet aber leicht, daß das Quadrat von GM kleiner seye, als der Raum, der gleich ist der Summe der Quadrate von geraden Linien AF, AG, welche aus irgend einem nicht auf der Linie aa liegenden Punkt an die der Lage nach gegebenen geraden Linien BC, DE unter den gegebenen Winkeln gezogen werden. Denn, man ziehe an HM die Linie AK gleichlauffend mit GN; so ist, wie von den geraden Linien af, aM bewiesen wor-

rden, auch AK gleich AF; alſo die Summe der Qua-
ate von AG und AF gleich dem Quadrat von GK.
s iſt aber GM kleiner als GK, mithin das Quadrat
n GM der kleinſte mögliche Raum. Weiter weiß
an, daß die Summe der Quadrate von den geraden
nien, die aus einem Punkt A gezogen ſind, der näher
y aa liegt, immer kleiner ſeyn werde, als die Summe
r Quadrate von geraden Linien, die aus einem von aa
tfernten Punkt gezogen werden; weil nemlich die ge-
de Linie GK kleiner iſt als jede gerade Linie, die aus
m Punkt G an HN in gröſſerer Entfernung von
m Perpendikel GM gezogen wird. Diß voraus-
ſezt iſt

Ueberhaupt für den erſten Fall folgendes die Kompoſition.

Aus irgend einem Punkt G auf einer der Paralle-
DE ziehe man an die andere BC die geraden Linien
H, GL unter den gegebenen Winkeln, und errichte
s dem Punkt G GN gleich GL ſenkrecht auf GH;
f die alsdann gezogene Linie HN fälle man das Per-
ndikel GM. Iſt nun der gegebene Raum gleich dem
uadrat von GM, ſo findet man den Ort, wie vorhin
zeigt worden. Iſt er nicht gleich dem Quadrat von
M; ſo muß er nothwendig gröſſer ſeyn, weil gezeigt
rden, daß das Quadrat von GM der kleinſte mögli-
e Raum ſeye. Es ſeye alſo der gegebene Raum gleich
m Quadrat von GO, einer Linie, die mithin gröſſer
als GM, und man beſchreibe aus dem Mittelpunkt
mit dem Halbmeſſer GO einen Kreis, der nothwen-
ig die gerade Linie HN in zwey Punkten K, k ſchnei-
n wird. Aus jedem dieſer Punkte fälle man auf GH
n Perpendikel KA, und ziehe durch den Punkt A die

Linie

[redacted] ist nicht [redacted] der gesu[redacted]
[redacted] Dann nun [redacted] AF mit GL gleichlaufe[redacted]
[redacted] der [redacted] Parallelen GL. AF = GH: A[redacted]
[redacted] = [redacted] mit [redacted] der Verzeichnung [redacted]
[redacted] = GN [redacted] ist und AF = AK. Also ist die Summ[redacted]
[redacted] Quadrate von LA und AF gleich der Summe [redacted]
[redacted] Quadrate von LA und AK. d. i. gleich dem Quadr[redacted]
[redacted] AK d. i. gleich dem Quadrat von GO, d. i. gle[redacted]
[redacted] gegebenen Raum. Auf dynamische Art findet m[redacted]
[redacted] einen andern Ort vermittelst des Punkts k, wen[redacted]
[redacted] nemlich so entfernt als GH. und auf gleichem[redacted]
[redacted] mit K [redacted].

In beiden Fällen aber einer oder beyde Oert[redacted] zwischen der innerhalb der Parallelen fallen, kann ma[redacted] leicht [redacted] unterscheiden. Es sey nun den geraden Linie[redacted] GH, GL, die linie GH diejenige, die nicht kleiner ist als die andere. Ist nun (Fig. 48. 2.) der gegeben[redacted] Raum kleiner, als das Quadrat von GL, das heißt, ist GO kleiner als GL; so ist offenbahr, daß die Punkte K, k zwischen die Punkte H, N fallen. Denn die Punkte H, N liegen ausserhalb des Kreises, weil GO kleiner als GL, d. i. kleiner als GN ist; der Punkt M aber, der, weil der Winkel HGN ein rechter ist, zwischen die Punkte H, N fällt, liegt innerhalb des

[redacted]

ɟlich auch gröſſer als GL oder GN; ſo fiele der Punkt
ıuf die Verlängerung von HN nach der Seite von H
, der Punkt k aber auf die Verlängerung von HN
h N hin; alſo läge A auf der Verlängerung von
H nach H, α auf der Verlängerung von GH nach G
, d. i. beyde Oerter fielen auſſerhalb der Parallelen.
ıdlich, wenn GO gleich iſt GL oder GN, (Fig. 48. d.)
geht der Kreis durch den Punkt N, der alſo mit dem
ınkt k zuſammen fällt, und, da NG ſenkrecht iſt
ſ GH; ſo iſt die Linie DGE ſelbſt einer von den Oer-
n, und der andere fällt zwiſchen die Parallelen.

Der kleinſte mögliche Raum aber, das heißt, das
ıadrat von GM wird ſo beſtimmt. Wegen der recht-
nklichten Dreyeke HGN, HMG iſt (8, 6. E.) HN:
G = GH: GM, folglich ſind auch (22, 6. E.) die
ſ dieſen Linien beſchriebenen Quadrate proportional,
i. das Quadrat von GM iſt die vierte Proportional-
röſſe zu der Summe der Quadrate von GH und GL,
ın Quadrat von GL, und dem Quadrat von GH.

Fig. 48. e.

2. Fall. Wenn die der Gattung nach gegebenen
guren keine Quadrate ſind.

Es begegne AG der geraden Linie BC in H, und
ſeye das Quadrat von GK gleich der über GA beſchrie-
nen der Gattung nach gegebenen Figur; ſo hat folg-
h (53. D.) das Quadrat von GK ein gegebenes Ver-
ıltniß zu dem Quadrat von GA; mithin iſt auch das
erhältniß von GK zu GA gegeben (2. Zuſ. 20, 6. E.
ıd 13. D. oder 59. D.). Man errichte KL ſenkrecht
ıf GK, und nehme den Punkt L ſo, daß das Quadrat
ın KL gleich wird der über AF beſchriebenen, der Gat-
ıng nach gegebenen Figur; ſo wird eben ſo gezeigt wer-
den,

ziehe HM; so muß die von G an M gezogene Linie GM senkrecht auf HM seyn. Es ist also der rechte Winkel GMH gegeben, und, daß der Winkel GHM gegeben seye, beweißt man wie im vorhergehenden; also ist das Dreyek GHM der Gattung nach gegeben, und, da GH gegeben ist; so ist folglich auch GM die Seite eines Quadrats gegeben, das der Summe der Quadrate von Ga und aM gleich ist. Daß aber auch die gerade Linie Ha gegeben seye, wird auf eben die Art, wie im vorhergehenden von HA bewiesen werden.

Komposition in diesem besondern Fall.

Man ziehe aus irgend einem Punkt G auf einer der Parallelen, die geraden Linien GH, GL unter den gegebenen Winkeln, und GN gleich GL senkrecht auf GH; auf die hierauf gezogene Linie HN fälle man das Perpendikel GM; so wird das Quadrat von GM der gesuchte Raum seyn. Auf GH fälle man das Perpendikel Ma; so wird die gerade durch a mit BC gleichlauffend gezogene Linie aa der gesuchte Ort seyn. Denn, man ziehe an BC, die Linie af gleichlauffend mit GL. Und, weil GL: af = (GH: aH =) GN: aM, und GL = GN; so ist auch af gleich aM. Also ist die Summe der Quadrate von Ga und af gleich (der Summe der Quadrate von Ga und aM, d. i. gleich) dem Quadrat von GM.

Es erhellet aber leicht, daß das Quadrat von GM kleiner seye, als der Raum, der gleich ist der Summe der Quadrate von geraden Linien AF, AG, welche aus irgend einem nicht auf der Linie aa liegenden Punkt an die der Lage nach gegebenen geraden Linien BC, DE unter den gegebenen Winkeln gezogen werden. Denn, man ziehe an HM die Linie AK gleichlauffend mit GN; so ist, wie von den geraden Linien af, aM bewiesen wor-

worden, auch AK gleich AF; also die Summe der Quadrate von AG und AF gleich dem Quadrat von GK. Es ist aber GM kleiner als GK, mithin das Quadrat von GM der kleinste mögliche Raum. Weiter weiß man, daß die Summe der Quadrate von den geraden Linien, die aus einem Punkt A gezogen sind, der näher bey aa liegt, immer kleiner seyn werde, als die Summe der Quadrate von geraden Linien, die aus einem von aa entferntern Punkt gezogen werden; weil nemlich die gerade Linie GK kleiner ist als jede gerade Linie, die aus dem Punkt G an HN in gröſſerer Entfernung von dem Perpendikel GM gezogen wird. Diß vorausgesezt ist

Ueberhaupt für den ersten Fall folgendes die Komposition.

Aus irgend einem Punkt G auf einer der Parallelen DE ziehe man an die andere BC die geraden Linien GH, GL unter den gegebenen Winkeln, und errichte aus dem Punkt G GN gleich GL senkrecht auf GH; auf die alsdann gezogene Linie HN fälle man das Perpendikel GM. Ist nun der gegebene Raum gleich dem Quadrat von GM, so findet man den Ort, wie vorhin gezeigt worden. Ist er nicht gleich dem Quadrat von GM; so muß er nothwendig gröſſer seyn, weil gezeigt worden, daß das Quadrat von GM der kleinste mögliche Raum seye. Es seye also der gegebene Raum gleich dem Quadrat von GO, einer Linie, die mithin gröſſer ist als GM, und man beschreibe aus dem Mittelpunkt G mit dem Halbmesser GO einen Kreis, der nothwendig die gerade Linie HN in zwey Punkten K, k schneiden wird. Aus jedem dieser Punkte fälle man auf GH ein Perpendikel KA, und ziehe durch den Punkt A die

Linie

Linie AA mit BC gleichlauffend; so wird AA der gesuchte Ort seyn. Denn, man ziehe AF mit GL gleichlauffend; und, weil wegen der Parallelen GL : AF = (GH : AH, d. i. =) GN : AK, und nach der Verzeichnung GL = GN; so ist auch AF = AK. Also ist die Summe der Quadrate von GA und AF gleich (der Summe der Quadrate von GA und AK, d. i. gleich dem Quadrat von GK, d. i. gleich) dem Quadrat von GO, d. i. gleich dem gegebenen Raum. Auf ähnliche Art findet man noch einen andern Ort vermittelst des Punkts k, wenn man nemlich kα senkrecht auf GH, und αα gleichlauffend mit BC zieht.

In welchen Fällen aber einer oder beyde Oerter zwischen oder ausserhalb der Parallelen fallen, kann man leicht so unterscheiden. Es seye unter den geraden Linien GH, GL, die Linie GH diejenige, die nicht kleiner ist, als die andere. Ist nun (Fig. 48. a.) der gegebene Raum kleiner, als das Quadrat von GL, das heißt, ist GO kleiner als GL; so ist offenbahr, daß die Punkte K, k zwischen die Punkte H, N fallen. Denn die Punkte H, N liegen ausserhalb des Kreises, weil GO kleiner als GL, d. i. kleiner als GN ist; der Punkt M aber, der, weil der Winkel HGN ein rechter ist, zwischen die Punkte H, N fällt, liegt innerhalb des Kreises; also fallen die Punkte K, k zwischen die Punkte H, N. Folglich fallen in diesem Fall die Punkte A, a zwischen die Punkte G, H, d. i. beyde Oerter fallen zwischen die Parallelen. Ist hingegen GO zwar gröſser als GN, oder GL, aber kleiner, als GH (Fig. 48. b.); so fällt der Punkt K wie vorhin zwischen die Punkte H, N; der Punkt k aber fällt auf die Verlängerung von HN, denn der Punkt N liegt innerhalb des Kreises. Also in diesem Fall liegt A zwischen den Punkten G, H, aber α auf der Verlängerung von HG auf der Seite von G. Wäre GO gröſser als GH, (Fig. 48. c.)

folg-

folglich auch gröſſer als GL oder GN; ſo fiele der Punkt K auf die Verlängerung von HN nach der Seite von H hin, der Punkt k aber auf die Verlängerung von HN nach N hin; alſo läge A auf der Verlängerung von GH nach H, α auf der Verlängerung von GH nach G hin, d. i. beyde Oerter fielen auſſerhalb der Parallelen. Endlich, wenn GO gleich iſt GL oder GN, (Fig. 48. d.) ſo geht der Kreis durch den Punkt N, der alſo mit dem Punkt k zuſammen fällt, und, da NG ſenkrecht iſt auf GH; ſo iſt die Linie DGE ſelbſt einer von den Oertern, und der andere fällt zwiſchen die Parallelen.

Der kleinſte mögliche Raum aber, das heißt, das Quadrat von GM wird ſo beſtimmt. Wegen der rechtwinklichten Dreyeke HGN, HMG iſt (8, 6. E.) HN: NG = GH: GM, folglich ſind auch (22, 6. E.) die auf dieſen Linien beſchriebenen Quadrate proportional, d. i. das Quadrat von GM iſt die vierte Proportional-Gröſſe zu der Summe der Quadrate von GH und GL, dem Quadrat von GL, und dem Quadrat von GH.

Fig. 48. e.

2. Fall. Wenn die der Gattung nach gegebenen Figuren keine Quadrate ſind.

Es begegne AG der geraden Linie BC in H, und es ſeye das Quadrat von GK gleich der über GA beſchriebenen der Gattung nach gegebenen Figur; ſo hat folglich (53. D.) das Quadrat von GK ein gegebenes Verhältniß zu dem Quadrat von GA; mithin iſt auch das Verhältniß von GK zu GA gegeben (2. Zuſ. 20, 6. E. und 13. D. oder 59. D.). Man errichte KL ſenkrecht auf GK, und nehme den Punkt L ſo, daß das Quadrat von KL gleich wird der über AF beſchriebenen, der Gattung nach gegebenen Figur; ſo wird eben ſo gezeigt werden,

den, daß das Verhältniß von KL zu AF gegeben seye. Man nehme GM zu GH in eben dem Verhältniß, das GK zu GA hat; so hat auch noch (12, 5. E. oder 19, 5. E.) KM zu AH das nemliche Verhältniß; also ist das Verhältniß von KM zu AH und von GM zu GH gegeben. Es ist aber GH der Grösse nach gegeben (35. D.), mithin auch GM. Man ziehe GL und LM, weil nun das Verhältniß von KM zu AH, und von AH zu AF, und von AF zu KL gegeben ist; so ist (9. D.) auch das Verhältniß von KM zu KL gegeben; nun ist auch noch der Winkel MKL gegeben, mithin ist (44. D.) auch der Winkel KML, und das Verhältniß von ML zu MK gegeben.

Nach der Voraussezung aber ist die Summe der über AG, AF beschriebenen, der Gattung nach gegebenen Figuren, d. i. die Summe der Quadrate von GK und KL gegeben, folglich ist das Quadrat von GL, also GL selbst der Grösse nach gegeben, also hat GL zu GM ein gegebenes Verhältniß. Nun ist der Winkel GML, mithin (47. D.) das Dreyek GML der Gattung nach, also das Verhältniß von LM zu MG gegeben; es ist aber MG gegeben, also auch LM. Es ist aber gezeigt worden, daß das Verhältniß von LM zu MK und von MK zu AH gegeben seye; mithin ist auch (9. D.) das Verhältniß von LM zu AH gegeben; und, weil LM der Grösse nach gegeben ist; so ist auch AH der Grösse nach gegeben. Es ist aber auch der Winkel AHC, und die Lage der Linie BC gegeben. Also berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie nach dem 20sten Saz.

Kompoſition.

Aus irgend einem Punkt G auf einer der Parallelen DE ziehe man an die andere BC die geraden Linien GH,

GH, GN unter den gegebenen Winkeln, und denke ſich über denſelben Figuren beſchrieben ähnlich denjenigen, welche über den Linien AG, AF, die man an BC, DE ziehen ſoll, beſchrieben werden ſollen. Auf GH nehme man die Linie GM (die man nach 14, 2. E. finden kann), ſo, daß das Quadrat von GM gleich ſeye der über GH zu beſchreibenden Figur. Man errichte GO ſenkrecht auf GH, und nehme darauf den Punkt O ebenfalls ſo, daß das Quadrat über GO gleich ſeye der über GN zu beſchreibenden Figur, und ziehe MO. Und es ſeye der gegebene Raum, dem die Summe der über AG, AF zu beſchreibenden Figuren gleich ſeyn ſoll, gleich dem Quadrat von GP. Es erhellet aber auf eben die Art, wie beym vorigen Fall bey einer ähnlichen Veranlaſſung bewieſen worden, daß GP nicht kleiner ſeyn dürfe, als die Linie GQ, die von dem Punkt G ſenkrecht auf MO gezogen wird. Man beſchreibe aus dem Mittelpunkt G mit dem Halbmeſſer GP einen Kreis, welcher der geraden Linie MO in einem oder zwey Punkten begegnen wird, einer dieſer Punkte ſeye L, und man fälle aus L auf GM das Perpendikel LK. Nun nehme man GK zu GA im nemlichen Verhältniß, welches GM zu GH hat, (es wird alſo auch KM zu AH eben dieſes Verhältniß haben), und durch A ziehe man AR mit BC gleichlauffend, ſo wird AR der geſuchte Ort ſeyn. Denn, man ziehe AF gleichlauffend mit GN; ſo iſt, weil wegen der Parallelen GO : GM = KL : KM
und, nach der Verzeichnung GM : GH = KM : AH
und, wegen der Parallelen GH : GN = AH : AF,

gleichförmig (ex aequo) GO : GN = KL : AF,
und verwechſelt GO : KL = GN : AF; alſo iſt (22, 6. E.) das Quadrat von GO zu dem Quadrat von KL, wie die über GN beſchriebene Figur, zu einer ähnlichen und ähnlich liegenden Figur über AF. Es iſt aber nach

der Verzeichnung das Quadrat von GO gleich der Figur über GN, mithin ist auch das Quadrat über KL gleich der Figur über AF. Und, weil nach der Verzeichnung GM : GH = GK : GA, so ist verwechselt auch GM : GK = GH : GA. Also ist (22, 6. E.) das Quadrat von GM zum Quadrat von GK, wie die über GH beschriebene Figur zu einer ähnlichen und ähnlich liegenden über GA beschriebenen Figur. Es ist aber das Quadrat von GM gleich der über GH beschriebenen Figur; also ist auch das Quadrat von GK gleich der über GA beschriebenen Figur. Folglich ist die Summe der über GA und AF beschriebenen Figuren gleich der Summe der Quadrate über GK und KL, d. i. gleich dem Quadrat von GL, oder GP, d. i. gleich dem gegebenen Raum.

Der kleinste mögliche Raum aber, nemlich das Quadrat von GQ wird, wie beym vorhergehenden Fall bestimmt. Denn es ist MO : GO = GM : GQ, also sind auch die Quadrate dieser Linien proportional; d. i. das Quadrat von GQ ist die vierte Proportional-Grösse zu der Summe der Quadrate von GM und GO, zu dem Quadrat von GO, und zu dem Quadrat von GM; oder, welches das nemliche ist, das Quadrat von GQ ist die vierte Proportional-Grösse zu der Summe der über GN, GH beschriebenen Figuren, zu der über GN, und zu der über GH beschriebenen Figur.

Berechnung.

Fig. 48. a—d.

1. Fall. Es ist $AF : AH = \sin. AGD : \sin. AFB$

folglich $AF = \frac{AH . \sin. AGD}{\sin. AFB}$

Ferner

erner ist $\overline{AF}^2 + \overline{AG}^2 = \overline{GK}^2$ Man substituire für F seinen eben angezeigten Werth, und AG drüke man urch HG und AH aus; so erhält man eine qua-ratische Gleichung, in welcher AH allein unbekannt t, und man kann folglich durch Auflösung dieser Glei-ung AH finden. Weil man aber auf diese Art AH rch eine Formel erhält, die zu der wirklichen Rech-ung nicht sehr bequem ist; so wird es besser seyn, so zu rfahren. Es ist

tang. GHK: sin.tot.=GH: $\begin{cases} GN \\ GL \end{cases}$ = sin. AFB: sin. AGD.

ierdurch findet man den Winkel GHK. Da nun in m Dreyek GHK noch weiter die Seiten GH, GK ge-ben sind; so berechne man die 3te Seite HK, für elche man 2 Werthe HK und Hk finden wird. End-h hat man

$$AH: \begin{cases} HK \\ Hk \end{cases} = \text{cosin. GHK : sin. tot.}$$

Fig. 48. e.

2. Fall. Man kennt in dem rechtwinklichten reyek MGO die Linien MG, GO, weil MG^2 der Figur er GH, und OG^2 der Figur über GN gleich ist; folg-h findet man den Winkel GMO durch die Formel: tang. GMO : sin. tot. = GM : GO. Ausser die-m Winkel GMO kennt man in dem Dreyek GML ch die Seiten GM, GL, folglich findet man leicht ML er MI, und hieraus leitet man ferner in dem recht-inklichten Dreyek MLK, in welchem man alle Winkel nnt, MK her, und findet endlich

$$AH = \frac{MK \cdot GH}{GM}.$$

34. Saz.

Fig. 49.

Wenn aus einem Punkt A an zwey der Lage nach gegebene gerade Parallel-Linien BC, DE die geraden Linien AF, AG unter gegebenen Winkeln AFB, AGD gezogen werden, und der Unterschied der über diesen Linien beschriebenen der Gattung nach gegebenen Figuren gleich ist einem gegebenen Raum; so berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

1. Fall. Wenn die der Gattung nach gegebenen geraden Linien Quadrate sind.

Es seye AG diejenige von den gezogenen Linien, die grösser ist, als die andere AF, und, weil nach der Voraussezung das Quadrat von AG gleich ist der Summe des Quadrats von AF, und eines gegebenen Raums; so ist, wenn man FH senkrecht auf AF zieht, und auf FH die Linie FK so abschneidet, daß das Quadrat von FK gleich ist dem gegebenen Raum, und nach AK zieht, AK gleich AG (47, 1. E.). Es begegne AF der Linie DE in L; so ist FL der Grösse nach gegeben (35. D.), es ist aber auch die Grösse von FK und der Winkel LFK gegeben; mithin ist, die Linie LK gezogen, das Dreyek FKL der Gattung und Grösse nach gegeben (44. und 56. D.), also ist der Winkel ALK gegeben; und, weil das Dreyek ALG der Gattung nach gegeben ist, so ist das Verhältniß von AL zu AG, d. i. das Verhältniß von AL zu AK gegeben. Mithin ist (47. D.) das Dreyek ALK der Gattung nach gegeben, aber auch der Grösse nach, weil LK der Grösse nach gegeben ist; also ist AL der Grösse nach gegeben, und, da auch der Winkel ALD, und die Lage der Linie DL gegeben ist; so berühret der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie nach dem 20sten Saz.

Die

hiehet vermittelſt der Kompoſition des 47ſten Sazes
Data. Aus irgend einem Punkt F auf der geraden
e BC ziehe man an DE die Linien FL, FM unter den
benen Winkeln, und es ſeye FM diejenige Linie, die
DE den Winkel FMD einſchließt, der gleich iſt dem
nkel, den die aus A an DE zu ziehende Linie mit
einſchlieſſen ſoll. Es iſt alſo das Verhältniß von
zu FM das gegebene Verhältniß, welches, wie in
Analyſe geſagt worden, AL zu AG oder AK hat;
ſeye weiter das Quadrat von FK gleich dem gegebe-
Raum, und man ziehe FK ſenkrecht auf FL; weil
AK aus dem Punkt K an FL ſo gezogen werden
ß, daß AK zu AL in dem beſagten Verhältniß ſteht;
ird diß geſchehen, wenn man aus dem Mittelpunkt
it dem Halbmeſſer FM einen Kreis beſchreibt, wel-
der noch vorher gezogenen Linie LK in den Punk-
N, n begegne, und dann die Linien FN oder Fn,
mit einer von dieſen KA, oder Ka gleichlauffend
t. Weil aber dieſer Kreis der geraden Linie KL
t immer begegnen kann; ſo wird ſich auch der Ort
t immer verzeichnen laſſen. Man ſieht aber leicht,
, wenn entweder der Punkt L, oder der Punkt K in-
halb des Kreiſes liegt, d. i. wenn die gerade Linie
l gröſſer iſt, als die Linien FL, FK, oder auch nur
ſſer iſt als eine derſelben, daß alsdann die gerade
ie LK dem Kreis nothwendig in zwey Punkten be-
ne: in dieſen Fällen alſo wird der Ort immer ver-
net werden können. Iſt aber FM kleiner, als jede
Linien FL, FK, in welchem Fall alſo die Punkte
K auſſerhalb des Kreiſes liegen müſſen; ſo kann die
ade Linie LK den Kreis entweder ſchneiden, oder be-
ren, oder auſſerhalb deſſelben fallen. Berührt LK
Kreis; ſo wird nur eine einige gerade Linie der Auf-

nterſchied der Quadrate über AG, AF. Alſo der
aum, welchem der Unterſchied der Linien QS, QF
ich iſt, die aus einem auf dem Ort QR gelegenen
nkt gezogen werden, der gröſte mögliche.

Ferner wird der Unterſchied der Quadrate über ge-
en Linien, welche aus näher in QR gelegenen Punk-
gezogen werden, gröſſer ſeyn, als der Unterſchied
Quadrate über geraden Linien, welche aus entfern-
n Punkten gezogen ſind. Es ſeye auf der Linie FQ
Punkt a näher bey QR, als der Punkt A, und man
ge AG, ag gleichlauffend mit FM, und AT, at
ichlauffend mit PQ. Es iſt alſo, wie gezeigt wor-
, AG = AT, und ſo auch ag = at, man ziehe noch
, aP; ſo muß alſo jezt der Unterſchied der Quadrate
er AG, AF, d. i. über AT, AF verglichen werden mit
n Unterſchied der Quadrate über ag, aF, d. i. über
aF. Weil nun die rechtwinklichten Dreyeke AFP,
FP über der gemeinſchaftlichen Grundlinie AP ſtehen;
iſt der Unterſchied der Quadrate über AT, AF gleich
n Unterſchied der Quadrate über PF, PT. Und auf
liche Art iſt, weil die rechtwinklichten Dreyeke aFP,
über einerley Grundlinien aP ſtehen, der Unterſchied
Quadrate über at, aF gleich dem Unterſchied der
adrate über PF, Pt. Alſo müſſen jezt die geraden
ien PT, Pt mit einander verglichen werden. Es iſt
r PT > Pt, weil nach der Vorausſezung AQ > aQ.
o iſt der Unterſchied der Quadrate über PF, Pt gröſ-
, als der Unterſchied der Quadrate über PF, PT;
, wenn wir jezt die vorigen Schlüſſe wieder rükwärts
folgen; ſo wird bewieſen, daß der Unterſchied der
adrate über ag, aF gröſſer ſeye, als der Unterſchied
Quadrate über AG, AF. Diß voraus geſchikt wird
n die Kompoſition ſo fortgeſezt.

Man ziehe, wie ſchon geſagt worden, die Linien
, FM, FK, LK, wo FK die Seite eines Quadrats

ist, das gleich ist dem gegebenen Raum, beschreibe aus dem Mittelpunkt F mit dem Halbmesser FM einen Kreis, und ziehe aus L die Berührungs-Linie LO; begegnet nun LK dem Kreis nicht; so kann der Ort nicht verzeichnet werden; berührt LK den Kreis, so wird der Ort verzeichnet, wie im vorhergehenden gezeigt worden. Schneidet endlich LK den Kreis in zwey Punkten N, n; so ziehe man durch jeden derselben z. B. durch N eine gerade Linie an den Punkt F, und durch K eine mit NF gleichlauffende Linie KA, die der Linie FL in dem Punkt A begegne, endlich durch A die Linie AV gleichlauffend mit BC; so ist AV der gesuchte Ort. Denn, man ziehe aus irgend einem Punkt A auf derselben die Linien AG, AF gleichlauffend mit FM, FL; weil nun

AG : $\left\{\begin{matrix} FM \\ FN \end{matrix}\right.$ = (AL : FL, d. i. =) AK : FN; so ist AG = AK. Also ist der Unterschied der Quadrate über AG, AF gleich dem Unterschiede der Quadrate über AK, AF, d. i. gleich dem Quadrat über FK, oder dem gegebenen Raum.

Der größte mögliche Raum aber, nemlich das Quadrat von FD wird so bestimmt. Man ziehe FO; so ist wegen der gleichwinklichten Dreyeke OLF, OFP (8, 6. E.) OL : LF = OF : FP, also sind auch die Quadrate dieser Linien proportional, das heißt, der größte mögliche Raum, oder das Quadrat von FP ist die vierte Proportional-Grösse zu dem Quadrat von OL, d. i. zu dem Ueberschuß des Quadrats von FL über das Quadrat von OF oder FM, zu dem Quadrat von LF, und zu dem Quadrat von FM.

Die Fälle aber, in welchen der Ort AV entweder zwischen die Parallelen BC, DE, oder ausserhalb derselben, und zwar entweder auf die Seite von BC, oder von DE fällt, können so unterschieden werden.

1. Es

1. Es seye FM kleiner, als jede der Linien FL, FK. Man ziehe LO, die den Kreis in O berühre, und diese Linie LO begegne der Linie FK in dem Punkt P; nun ist, wie bey der Bestimmung gezeigt worden, FK nie gröſſer, als FP, mithin wird, wenn man noch die Linie LK zieht, diese entweder mit LP zusammen fallen, oder den Kreis in zwey Punkten N, n schneiden. In beyden Fällen aber sieht man leicht, daß bey dem ersten Fall die gerade Linie PQ, die mit OF gleichlauffend ist, oder bey dem 2ten Fall die Linien KA, Ka, die mit NF, nF gleichlauffend sind, der verlängerten Linie LF auf der Seite von F begegne. In diesem Fall also wird der Ort QR, oder AV, av immer ausserhalb der Parallelen fallen. Ist aber FM gleich FL, aber kleiner, als FK; so wird der Punkt L mit dem Punkt n zusammen fallen, also wird die gerade Linie, die durch den Punkt K mit nF, d. i. LF gleichlauffend gezogen wird, der Linie LF nie begegnen, und AV wird der einzige Ort seyn. Ist FM gleich FK, aber kleiner, als FL; so wird der Punkt K mit dem Punkt N zusammen fallen, also wird der Punkt A auf den Punkt F fallen, und BC selbst wird der eine von den Oertern seyn.

Fig. 49. b.

2. Es seye FM kleiner als FL, aber gröſſer als FK; so wird folglich der Punkt L ausserhalb und der Punkt K innerhalb des Kreises fallen, und, weil der Punkt K auf der Seite LN des Dreyeks FLN liegt; so wird der Punkt A auf der Seite LF liegen, also der Ort zwischen die Parallelen fallen. Und, weil eben dieser Punkt K auf der über nF hinaus verlängerten Seite Ln des Dreyeks FLn liegt; so wird der Punkt a auf der nach F hin verlängerten Seite LF liegen, mithin

hin dieſer 2te Ort auſſerhalb der Parallelen auf der Seite von BC liegen. *)

Fig. 49. c.

3. Es ſeye FM gröſſer als FL, aber kleiner als FK; ſo wird folglich der Punkt L innerhalb, der Punkt K aber auſſerhalb des Kreiſes fallen. Weil nun der Punkt K auf der über FN hinaus verlängerten Seite LN des Dreyeks FLN liegt; ſo wird der Punkt A auf der nach F hin verlängerten Seite LF eben dieſes Dreyeks liegen, mithin der Ort auſſerhalb der Parallelen auf der Seite von BC ſeyn. Und, weil eben dieſer Punkt K auf der über L hinaus verlängerten Seite Ln des Dreyeks FLn liegt; ſo wird der Punkt a auf den nach L hin verlängerten Seite LF eben dieſes Dreyeks liegen, mithin dieſer 2te Ort auſſerhalb der Parallelen auf der Seite von DE ſeyn.

Fig. 49. d.

4. Iſt FM gröſſer, als jede der Linien FL, FK; ſo werden folglich die Punkte L, K innerhalb des Kreiſes liegen; und, weil der Punkt K auf der Seite LN des Dreyeks FLN liegt; ſo wird der Punkt A auf der Seite FL liegen, mithin der Ort innerhalb der Parallelen liegen. Weil aber eben dieſer Punkt K auf der über L hinaus verlängerten Seite nL des Dreyeks FLn liegt; ſo wird der Punkt a auf der über L hinaus verlängerten Seite FL eben dieſes Dreyeks liegen, mithin der Ort auſſerhalb der Parallelen auf der Seite von DE ſeyn.

*) Was hier, und bey 3. noch von den Fällen geſagt wird, wenn entweder FM = FK aber zugleich FM < FL; oder FM = FL, aber zugleich FM < FK, bliebe, da es ſchon bey 1. bemerkt iſt, in der Ueberſezung weg.

seyn. Ist aber FM gleich FL; so fällt der Punkt L mit dem Punkt n zusammen, also wird eine durch K mit nF, d. i. LF gleichlauffend gezogene Linie dieser niemahls begegnen, folglich die gerade Linie AV der einzige Ort seyn.

Fig. 49. e.

2ter Fall. Wenn die der Gattung nach gegebenen Figuren keine Quadrate sind. Es seye AG diejenige von den gezogenen Linien, über welche die grössere Figur beschrieben ist, und das Quadrat von FH seye gleich der Figur über AF. Aus dem Punkt F ziehe man eine gerade auf AF senkrechte Linie, nehme darauf FK gleich der Seite eines Quadrats, das so groß ist, als der gegebene Raum, und ziehe HK. Weil nun nach der Voraussezung die Figur über AG gleich ist der Summe der Figur über AF und des Quadrats über FK, d. h. gleich ist der Summe der Quadrate von HF, FK; so ist die Figur über AG gleich dem Quadrat über HK. Also ist (53. D.) auf eben die Art, wie beym 2ten Fall des vorhergehenden Sazes gezeigt worden, das Verhältniß von AG zu HK, und so auch das Verhältniß von AF zu HF gegeben. Nun begegne FA der Linie DE in dem Punkt L, und man nehme FM: FL = FH: FA; so ist folglich auch HM: AL = FH: FA, mithin das Verhältniß von HM zu AL, und von FM zu FL gegeben. Nun ist FL der Grösse nach gegeben (35. D.), also auch FM. Und, weil das Verhältniß von HM zu AL, und von AL zu AG, und von AG zu HK gegeben ist; so ist auch das Verhältniß von HM zu HK gegeben (9. D.). Und, weil MF, FK der Grösse nach, und noch der Winkel MFK gegeben ist; so ist (44. D.) das Dreyek MFK der Grösse und Gattung nach gegeben, also der Winkel HMK gegeben, und,

da

da gezeigt worden, daß das Verhältniß von HM zu HK gegeben seye; so ist das Dreyek MHK der Gattung nach gegeben (47. D.), also das Verhältniß von MK zu MH gegeben. Nun ist schon gezeigt worden, daß das Verhältniß von MH zu AL gegeben seye; also ist das Verhältniß von MK zu AL gegeben (9. D.), und weil MK der Grösse nach gegeben ist; so ist es auch AL. Da überdiß der Winkel ALE, und die Lage von DE gegeben ist; so berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie nach dem 2cſten Saz.

Kompoſition.

Aus irgend einem Punkt F auf einer der Parallelen BC ziehe man an die andere DE die geraden Linien FL, FN unter den gegebenen Winkeln, und denke ſich über denſelben Figuren beſchrieben ähnlich denjenigen, welche über den an die Parallelen BC, DE zu ziehenden Linien AF, AG beſchrieben werden ſollen. Auf FL nehme man den Punkt M ſo, daß das Quadrat von FM gleich ſeye der Figur über FL, und auf FN den Punkt O, ſo, daß das Quadrat von FO gleich ſeye der Figur über FN. Senkrecht auf FL ziehe man FK die Seite des Quadrats, das ſo groß iſt, als der gegebene Raum, dem der Unterſchied der Figuren AG, AF gleich ſeyn ſoll, und durch die Punkte M, K ziehe man MK. Aus dem Mittelpunkt F mit dem Halbmeſſer FO beſchreibe man einen Kreis, welcher der Linie MK in einem oder zwey Punkten begegne (denn FK darf nicht gröſſer ſeyn, als die Linie FQ, die zwiſchen dem Punkt F, und der Linie MQ, die den Kreis berührt, abgeſchnitten wird), der eine von den Punkten, in welchen MK den Kreis ſchneidet, ſeye P, man ziehe PF, und mit PF gleichlaufſend die Linie KH, die der Linie FL in dem Punkt H begegne. Nun nehme man AF : HF = FL : FM; ſo

ist auch AL: HM = FL: FM, durch den Punkt A ziehe man AR gleichlauffend mit BC; so ist AR der gesuchte Ort. Denn, man ziehe AG gleichlauffend mit FN; weil nun FP: FM = HK: HM
und FM: FL = HM: AL
und FL: FN = AL: AG
so ist gleichförmig (ex aequo) FP: FN = HK: AG,
und, verwechselt $\left.\begin{matrix}FP\\FO\end{matrix}\right\}$: HK = FN: AG. Also ist (22, 6. E.) das Quadrat von FO zu dem Quadrat von HK in eben dem Verhältniß, welches die über FN beschriebene Figur zu einer ähnlichen und ähnlich liegenden über AG beschriebenen Figur hat. Nach der Verzeichnung aber ist das Quadrat über FO gleich der Figur über FN; mithin ist das Quadrat über HK gleich der Figur über AG. Und, weil nach der Verzeichnung FM: FL = FH: FA; so ist verwechselt FM: FH = FL: FA. Also verhält sich (22, 6. E.) das Quadrat von FM zu dem Quadrat von FH, wie die über FL beschriebene Figur zu einer ähnlichen und ähnlich liegenden Figur über FA. Es ist aber nach der Verzeichnung das Quadrat von FM gleich der Figur über FL; mithin ist das Quadrat über FH gleich der Figur über FA. Also ist der Ueberschuß der Figur auf AG über die Figur auf AF gleich dem Ueberschuß des Quadrats von HK über das Quadrat von FH, d. i. gleich dem Quadrat von FK, d. i. gleich dem gegebenen Raum.

Der größte mögliche Raum aber, nemlich das Quadrat von FQ, wird auf eben die Art bestimmt, wie beym vorhergehenden Fall. Denn, es berühre MQ den Kreis in S, und man ziehe FS; so verhält sich (8, und 22, 6. E.) das Quadrat von SM zu dem Quadrat von MF wie das Quadrat von SF zu dem Quadrat von FQ. Das heißt, der größte mögliche Raum, oder, das

Quadrat

Quadrat von FQ ist die vierte Proportional-Grösse zu dem Ueberschuß des Quadrats von MF über das Quadrat von FS oder FO zu dem Quadrat von MF und zu dem Quadrat von FO, oder welches das nemliche ist, das Quadrat von FQ ist die vierte Proportional-Grösse zu dem Ueberschuß der Figur über FL, über die Figur über FN, zu der Figur über FL, und zu der Figur über FN.

Schooten beweißt den 2ten Fall in diesem und in dem vorhergehenden Saz nicht; er glaubt aber, in beyden werde sich der 2te Fall vermittelst des 59sten Sazes der Data auflösen lassen, worinn er sich aber wirklich irrte, denn es wird hier gar nicht voraus gesezt, daß die der Gattung nach gegebenen Figuren ein gegebenes Verhältniß unter einander haben.

Berechnung.

Fig. 49. a—d.

1. Fall. Die Berechnung dieses Sazes wird überhaupt mit der des vorigen ähnlich. Man kann entweder FA durch eine ähnliche Formel, wie dort AH bestimmen, oder auch in dem rechtwinklichten Dreyek KFL, in welchem man die beyden Seiten LF, FK kennt, den Winkel bey L, aus diesem Winkel, und den Seiten LF, FN in dem Dreyek LFN den Winkel LFN, d. i. den Winkeln LAK, und endlich aus diesem Winkel und der Seite FK in dem rechtwinklichten Dreyek FKA die Seite FA berechnen.

Fig. 49. e.

2. Fall. In dem rechtwinklichten Dreyek MFK kennt man MF, weil $\overline{MF}^2$ gleich ist der Figur über FL, und

und FK, weil $\overline{FK}^2$ gleich ist dem gegebenen Raum, folglich findet man leicht den Winkel FMK. Da man nun ausser diesem Winkel in dem Dreyek FMP noch die Seiten FM, FP (weil $\overline{FP}^2$ der Figur über FN gleich ist) kennt; so findet man den Winkel MFP, d. h. den Winkel MHK, man weiß folglich auch seinen Nebenwinkel FHK, und vermittelst dieses und der Seite FK findet man in dem rechtwinklichten Dreyek FHK die Seite FH. Endlich ist

$$AF = \frac{HF.\ FL}{FM}.$$

Zweytes Buch.

1. Lehnſaz.

Dieſer Lehnſaz iſt bey Pappus der 120ſte Saz des 7ten Buchs, und heißt bey ihm Lehnſaz zum 2ten Ort.

Fig. 50.

Wenn in einem Dreyek ABC das Perpendikel AD gefällt wird; ſo iſt der Unterſchied der Quadrate über BA, AC gleich dem Unterſchied der Quadrate über BD, DC. Und, wenn man BC in dem Punkt E in zwey gleiche Theile theilt; ſo iſt der Unterſchied der Quadrate über BA, AC gleich dem doppelten Rchtk BC×ED.

Der Ueberſchuß des Quadrats von AB über das Quadrat von AC iſt (47, 1. E.) gleich dem Ueberſchuß der Summe der Quadrate von AD und BD über die Summe der Quadrate von AD und DC, und, das gemeinſchaftliche Quadrat über AD hinweg genommen, iſt der Ueberſchuß des Quadrats von AB über das Quadrat von AC gleich dem Ueberſchuß des Quadrats von BD über das Quadrat von DC, und diß war das erſte. Und, weil BE gleich iſt EC; ſo iſt BD gleich der Summe von CE und ED; es iſt aber (8, 2. E.) der Ueberſchuß des Quadrats von CE und ED als einer Linie über das Quadrat von CD gleich dem vierfachen Rchtk CED, d. i.

gleich

ich dem doppelten Rchtk BC×ED. Alſo iſt der Un-
ſchied der Quadrate über BD, CD, oder der Unter-
ied der Quadrate über AB, AC gleich dem doppelten
htk BC×ED, und diß war das zweyte.

1. Saz.

Die erſten ſieben Säze des 2ten Buchs folgen in
en der Ordnung, wie ſie bey Pappus vorkommen.

Fig. 51. a. b. c.

Wenn aus zwey gegebenen Punkten A, B zwey
rade Linien an einen dritten Punkt C hin gezogen wer-
n, und der Unterſchied der Quadrate über den gezo-
nen Linien AC, BC gleich iſt einem gegebenen Raum;
berührt der Punkt C, in dem ſie zuſammen ſtoſſen,
ie der Lage nach gegebene gerade Linie.

Man ziehe AB, fälle auf dieſelbe das Perpendikel
D, und theile AB in E in zwey gleiche Theile; ſo iſt
ch dem vorhergehenden Lehnſaz der Unterſchied der
uadrate über AC, BC gleich dem doppelten Rchtk
B×ED. Nun iſt nach der Vorausſezung der Unter-
ied der Quadrate über AC, BC gegeben; alſo iſt das
ppelte Rchtk AB×ED, mithin das Rchtk AB×ED
bſt gegeben; es iſt aber AB der Lage und Gröſſe nach
geben; folglich iſt ED der Gröſſe nach gegeben; es iſt
ner der Punkt E gegeben, folglich auch (30. D.) der
unkt D; und, weil noch der rechte Winkel ADC, und
e Lage der Linie AD gegeben iſt; ſo iſt DC der Lage
ch gegeben (32. D.); alſo berührt der Punkt C eine
r Lage nach gegebene gerade Linie.

Kompoſition.

Es ſeye der gegebene Unterſchied der Quadrate
ich dem Raum F, und der Punkt A ſeye derjenige,

Zweytes Buch.

1. Lehnsaz.

Dieser Lehnsaz ist bey Pappus der 120ste Saz des 7ten Buchs, und heißt bey ihm Lehnsaz zum 2ten Ort.

Fig. 50.

Wenn in einem Dreyek ABC das Perpendikel AD gefällt wird; so ist der Unterschied der Quadrate über BA, AC gleich dem Unterschied der Quadrate über BD, DC. Und, wenn man BC in dem Punkt E in zwey gleiche Theile theilt; so ist der Unterschied der Quadrate über BA, AC gleich dem doppelten Rchtk BC×ED.

Der Ueberschuß des Quadrats von AB über das Quadrat von AC ist (47, 1. E.) gleich dem Ueberschuß der Summe der Quadrate von AD und BD über die Summe der Quadrate von AD und DC, und, das gemeinschaftliche Quadrat über AD hinweg genommen, ist der Ueberschuß des Quadrats von AB über das Quadrat von AC gleich dem Ueberschuß des Quadrats von BD über das Quadrat von DC, und diß war das erste. Und, weil BE gleich ist EC; so ist BD gleich der Summe von CE und ED; es ist aber (8, 2. E.) der Ueberschuß des Quadrats von CE und ED als einer Linie über das Quadrat von CD gleich dem vierfachen Rchtk CED, d. i.

gleich

gleich dem doppelten Rchtk BC×ED. Also ist der Unterschied der Quadrate über BD, CD, oder der Unterschied der Quadrate über AB, AC gleich dem doppelten Rchtk BC×ED, und diß war das zweyte.

1. Saz.

Die ersten sieben Säze des 2ten Buchs folgen in eben der Ordnung, wie sie bey Pappus vorkommen.

Fig. 51. a. b. c.

Wenn aus zwey gegebenen Punkten A, B zwey gerade Linien an einen dritten Punkt C hin gezogen werden, und der Unterschied der Quadrate über den gezogenen Linien AC, BC gleich ist einem gegebenen Raum; so berührt der Punkt C, in dem sie zusammen stossen, eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Man ziehe AB, fälle auf dieselbe das Perpendikel CD, und theile AB in E in zwey gleiche Theile; so ist nach dem vorhergehenden Lehnsaz der Unterschied der Quadrate über AC, BC gleich dem doppelten Rchtk AB×ED. Nun ist nach der Voraussezung der Unterschied der Quadrate über AC, BC gegeben; also ist das doppelte Rchtk AB×ED, mithin das Rchtk AB×ED selbst gegeben; es ist aber AB der Lage und Grösse nach gegeben; folglich ist ED der Grösse nach gegeben; es ist ferner der Punkt E gegeben, folglich auch (30. D.) der Punkt D; und, weil noch der rechte Winkel ADC, und die Lage der Linie AD gegeben ist; so ist DC der Lage nach gegeben (32. D.); also berührt der Punkt C eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Komposition.

Es seye der gegebene Unterschied der Quadrate gleich dem Raum F, und der Punkt A seye derjenige,

Zweytes Buch.

1. Lehnsaz.

Dieser Lehnsaz ist bey Pappus der 120ste Saz des 7ten Buchs, und heißt bey ihm Lehnsaz zum 2ten Ort.

Fig. 50.

Wenn in einem Dreyek ABC das Perpendikel AD gefällt wird; so ist der Unterschied der Quadrate über BA, AC gleich dem Unterschied der Quadrate über BD, DC. Und, wenn man BC in dem Punkt E in zwey gleiche Theile theilt; so ist der Unterschied der Quadrate über BA, AC gleich dem doppelten Rchtk BC×ED.

Der Ueberschuß des Quadrats von AB über das Quadrat von AC ist (47, 1. E.) gleich dem Ueberschuß der Summe der Quadrate von AD und BD über die Summe der Quadrate von AD und DC, und, das gemeinschaftliche Quadrat über AD hinweg genommen, ist der Ueberschuß des Quadrats von AB über das Quadrat von AC gleich dem Ueberschuß des Quadrats von BD über das Quadrat von DC, und diß war das erste. Und, weil BE gleich ist EC; so ist BD gleich der Summe von CE und ED; es ist aber (8, 2. E.) der Ueberschuß des Quadrats von CE und ED als einer Linie über das Quadrat von CD gleich dem vierfachen Rchtk CED, d. i.

gleich

gleich dem doppelten Rchtk BC×ED. Also ist der Unterschied der Quadrate über BD, CD, oder der Unterschied der Quadrate über AB, AC gleich dem doppelten Rchtk BC×ED, und diß war das zweyte.

1. Saz.

Die ersten sieben Säze des 2ten Buchs folgen in eben der Ordnung, wie sie bey Pappus vorkommen.

Fig. 51. a. b. c.

Wenn aus zwey gegebenen Punkten A, B zwey gerade Linien an einen dritten Punkt C hin gezogen werden, und der Unterschied der Quadrate über den gezogenen Linien AC, BC gleich ist einem gegebenen Raum; so berührt der Punkt C, in dem sie zusammen stossen, eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Man ziehe AB, fälle auf dieselbe das Perpendikel CD, und theile AB in E in zwey gleiche Theile; so ist nach dem vorhergehenden Lehnsaz der Unterschied der Quadrate über AC, BC gleich dem doppelten Rchtk AB×ED. Nun ist nach der Voraussezung der Unterschied der Quadrate über AC, BC gegeben; also ist das doppelte Rchtk AB×ED, mithin das Rchtk AB×ED selbst gegeben; es ist aber AB der Lage und Grösse nach gegeben; folglich ist ED der Grösse nach gegeben; es ist ferner der Punkt E gegeben, folglich auch (30. D.) der Punkt D; und, weil noch der rechte Winkel ADC, und die Lage der Linie AD gegeben ist; so ist DC der Lage nach gegeben (32. D.); also berührt der Punkt C eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Komposition.

Es seye der gegebene Unterschied der Quadrate gleich dem Raum F, und der Punkt A seye derjenige,

aus dem die grössere Linie an C gezogen werden soll; man theile AB in dem Punkt E in zwey gleiche Theile, und trage aus E nach B hin die gerade Linie ED, deren Grösse man so bestimmt, daß das doppelte Rchtk ED×AB gleich wird dem gegebenen Raum F, aus D errichte man auf AD das Perpendikel DG; so wird DG der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man an irgend einen Punkt C auf der Linie DG die geraden Linien AC, BC zieht; so wird der Unterschied der über denselben beschriebenen Quadrate gleich seyn dem gegebenen Raum F. Denn nach dem Lehnsaz ist der Unterschied der Quadrate von AC, BC gleich dem doppelten Rchtk AB×ED, d. i. nach der Verzeichnung gleich dem gegebenen Raum F. Wenn der gegebene Raum F kleiner ist, als das Quadrat über AB, d. h. kleiner ist, als das vierfache Quadrat über der Hälfte von AB oder über EB; so ist das Rchtk BED viermahl genommen kleiner als das Quadrat über EB viermahl genommen; also ED kleiner als EB, mithin fällt der Punkt D zwischen E, B; ist F gleich dem Quadrat über AB; so fallen die Punkte D, B zusammen; ist F grösser, als das Quadrat von AB; so fällt, wie man leicht sieht, D auf die Verlängerung von EB.

Fig. 51. c.

Schootens Verzeichnung, die darinn besteht, daß man das Rchtk BAH gleich dem gegebenen Raum macht, und dann HB in D in zwey gleiche Theile theilt, ist der Sache selbst nach mit der vorhergehenden einerley; denn, weil AH doppelt so groß ist als ED; so ist das doppelte Rchtk AB×ED gleich dem Rchtk AB×AH, d. i. dem gegebenen Raum. Aber dem Lehnsaz des Pappus zufolge scheint Apollonius die vorhergehende Auflösung gegeben zu haben.

2. Lehn-

2. Lehnſaz.

Iſt bey Pappus der 19te Saz des 7ten Buchs, und heißt dort Lehnſaz zum erſten Ort des 2ten Buchs.

Fig. 52.

Wenn aus dem Scheitel A eines Dreyeks ABC die Linie AD an die Grundlinie ſo gezogen wird, daß BD ſich zu DC verhält, wie das Quadrat über AB zu dem Quadrat über AC; ſo iſt das Rchtk BD×DC gleich dem Quadrat über AD.

Man ziehe durch C die Linie CE mit AB gleichlauffend; ſo iſt folglich BD: DC = AB: CE = AB^2: AB×CE. Nach der Vorausſezung aber iſt BD: DC = AB^2: AC^2; folglich iſt AB: AC = AC: CE. Es ſchlieſſen aber die Seiten AB, AC und AC, CE die gleichen Wechſels-Winkel BAC, ACE ein; mithin ſind die Dreyeke BAC, ACE gleichwinklicht, und der Winkel CAD gleich dem Winkel B; alſo ſind auch die Dreyeke ABD, CAD gleichwinklicht; mithin BD: DA = DA: DC; alſo iſt das Rchtk BD×DC gleich dem Quadrat über AD.

2. Saz.

Fig. 53.

Wenn aus zwey gegebenen Punkten A, B zwey gerade Linien AC, BC, die ein gegebenes Verhältniß unter einander haben, an einen dritten Punkt C hin gezogen werden; ſo berührt der Punkt C, in dem ſie zuſammen ſtoſſen, eine der Lage nach gegebene gerade Linie, oder einen der Lage nach gegebenen Kreis.

1. Fall. Wenn das gegebene Verhältniß das Verhältniß der Gleichheit iſt.

Fig. 53. a.

Man ziehe AB, und fälle darauf das Perpendikel CD; weil nun AC = CB; so ist (26, 1. E.) AD = DB; nun ist AB der Lage und Grösse nach gegeben, also ist der Punkt D gegeben; und, weil auch der Winkel ADC gegeben ist; so ist DC der Lage nach gegeben (32. D.): also berührt der Punkt C eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Die Kompoſition ergiebt ſich von ſelbſt. Man theile nemlich AB in D in zwey gleiche Theile, und ziehe DC ſenkrecht auf AD; ſo ſieht man leicht ein, daß die geraden Linien AC, BC, die aus den Punkten A, B an irgend einen Punkt C auf der Linie DC gezogen werden, gleich ſeyen.

2. Fall. Wenn das gegebene Verhältniß nicht das Verhältniß der Gleichheit iſt.

Fig. 53. b.

Weil das Verhältniß von AC zu CB gegeben iſt, ſo iſt (54. D.) das Verhältniß des Quadrats über AC zu dem Quadrat über CB gegeben; man verlängere AB bis D ſo, daß $AD : DB = AC^2 : AB^2$; weil nun AB der Lage und Gröſſe nach, und das Verhältniß von AD zu DB gegeben iſt; ſo iſt der Punkt D, nebſt den Stüken AD, BD gegeben; alſo iſt das Rchtk AD × DB gegeben; dieſem Rchtk aber iſt nach dem 2ten Lehnſ. das Quadrat von CD gleich; folglich iſt dieſes Quadrat, mithin die Linie DC ſelbſt der Gröſſe nach gegeben; es iſt aber ſchon gezeigt worden, daß der Punkt D gegeben ſeye; alſo berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Kreis nach dem 1ſten Saz des 1ſten Buchs.

Kompo-

Kompoſition.

Es ſeye das gegebene Verhältniß gleich dem Verhältniß von EF zu FG, nun finde man zu EF, FG die dritte Proportional-Linie FH, und nehme auf der verlängerten Linie AB den Punkt D ſo, daß das Verhältniß von AD zu DB gleich werde dem Verhältniß von EF zu FH, finde zwiſchen AD, DB die mittlere Proportional-Linie DK, und beſchreibe aus dem Mittelpunkt D mit dem Halbmeſſer DK einen Kreis; ſo wird deſſen Umfang der geſuchte Ort ſeyn, d. i. wenn man aus den gegebenen Punkten A, B an irgend einen Punkt C des Umkreiſes die geraden Linien AC, BC zieht; ſo wird AC zu BC in dem gegebenen Verhältniß ſeyn, welches EF zu FG hat. Denn man ziehe DC; weil nun die 3 Linien AD, DK, DB proportional ſind; ſo iſt (2. Zuſ. 20, 6. E.) $AD^1 : DK^1 =$ (AD : DB = EF : FH =) $EF^2 : FG^2$. Alſo iſt (22, 6. E.) AD : DK = EF : FG. Weil aber AD : $\left\{\begin{matrix}DK\\DC\end{matrix}\right.$ = DC : DB; ſo ſind die Dreyeke ADC, CDB gleichwinklicht; alſo iſt AC : BC = (AD : DC, d. i. =) EF : FG. Von den Punkten K, L aber, in welchen der Umkreis der geraden Linie AB begegnet, wird eben dieſes auf folgende Art erwieſen: Weil AD : $\left\{\begin{matrix}DK\\DL\end{matrix}\right.$ = DK : DB; ſo iſt (19, 5. E.) der Reſt AK zu dem Reſt KB wie (AD zu DK, d. i. wie) EF zu FG: und auf ähnliche Art ſchließt man aus 12, 5. E., daß auch AL : LB = AD : DK = EF : FG. Man ſieht alſo, daß, wenn man ſo wohl AK zu KB, als AL zu LB in dem gegebenen Verhältniß von EF zu FG nimmt, daß dann KL der Durchmeſſer des Kreiſes ſeyn werde, welcher der geſuchte Ort iſt.

Diß ist derselbe Ort, dessen Verzeichnung Eutocius in seinen Kommentarien über die Vorrede des Apollonius zu dem 1sten Buch seiner Kegelschnitte lehrt, nur beweist er dort diese Verzeichnung durch allzu viele Umschweife, weswegen mit Recht Huygens im 5ten Lehnsaz seiner Dioptrik Schootens Beweis vorzieht. Ich wollte daher für jene Verzeichnung, die allerdings gut, und vielleicht vom Apollonius selbst ist, an die aber ein Stümper jenen langen Beweis anhängte, folgenden kürzern Beweis beifügen.

Der Saz, wie ihn Eutocius ausdrükt S. 11. der Kegelschnitte des Apollonius nach Halleys Ausgabe, heißt so:

Wenn in einer Ebene zwey Punkte gegeben sind nebst dem Verhältniß von zwey ungleichen geraden Linien; so kann auf dieser Ebene ein Kreis beschrieben werden, so, daß die von den gegebenen Punkten an den Umfang des Kreises gezogenen Linien ein Verhältniß unter einander haben, das gleich ist dem gegebenen Verhältniß.

Die gegebenen Punkte seyen A, B; das gegebene Verhältniß das Verhältniß von EF zu FG, EF seye die grössere Linie: und man solle die Aufgabe auflösen.

Man ziehe die Linie AB, verlängere sie auf der Seite von B, und mache EF: FG = FG: FH, und dann EH: AB = FH: BD, und auch EH: AB = FG: DK. Weil also EH: AB = HF: BD; so ist (12, 5. E.) EF: AD = (EH: AB, d. i. =) FG: DK = HF: BD; und verwechselt EF: FG = AD: DK: und auch FG: FH = KD: BD. Nun ist EF: FG = FG: FH; mithin (11, 5. E.) AD: DK = DK: BD. Aus dem Mittelpunkt D mit dem Halbmesser DK beschreibe man einen Kreis, und nehme auf dessen Umfang irgend einen Punkt C, und ziehe CA, CB, CD.

Weil

Weil nun AD: $\left\{\begin{matrix}DK\\DC\end{matrix}\right.$ = DC: DB, also die Seiten, die den den beyden Dreyeken ADC, CDB gemeinschaftlichen Winkel einschliessen, proportional sind; so sind (6, 6. E.) diese beyden Dreyeke ähnlich: also ist AC: CB = AD: DC = EF: FG.

Bey Eutocius ist noch ein Beweis beigefügt, worinn gezeigt wird, daß gerade Linien, die aus A, B an einen Punkt gezogen werden, der nicht auf dem Umfang des Kreises KC liegt, nicht eben das Verhältniß unter einander haben, wie EF zu FG. Und es würde wirklich nöthig seyn, diß zu erweisen, wenn nicht die Analyse vorausgeschikt worden wäre. Denn aus dieser weiß man, daß der Punkt, in dem die geraden Linien zusammen stossen, die das gegebene Verhältniß von EF zu FG unter einander haben, und aus A, B gezogen sind, den Umfang des Kreises KC berühren. Wollte man dann irgend einen andern Punkt nehmen, der nach der Voraussezung nicht auf diesem Kreis liegen soll; so wird völlig wie in der Analyse gezeigt, daß der nemliche Punkt auf dem Umfang dieses Kreises liege, und diß ist widersprechend. Eben dieses ist bey allen übrigen Oertern zu bemerken.

Eben dieses noch auf eine andere Art ohne Hülfe des Lehnsazes bewiesen.

Fig. 53. c.

Wenn man aus den gegebenen Punkten A, B an einen dritten Punkt C hin die ungleichen geraden Linien AC, BC zieht, welche ein gegebenes Verhältniß unter einander haben; so soll bewiesen werden, daß der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Kreis berühre.

Man ziehe aus C an die verlängerte Linie AB die gerade Linie CD so, daß der Winkel BCD gleich werde dem Winkel BAC; so sind folglich die Dreyeke ADC, DCB gleichwinklicht; also ist AC : CB = AD : DC = DC : DB. Auf AD nehme man ED = DC, und, weil AD, ED, BD proportional sind; so verhält sich AD zu DE wie der Rest AE zu dem Rest EB. Es ist aber nach der Voraussezung das Verhältniß von AC zu CB, d. i. von AD zu DC oder DE gegeben, also ist das Verhältniß von AE zu EB gegeben; und, weil AB gegeben ist; so ist folglich auch AE, mithin der Punkt E gegeben. Und, weil das Verhältniß von AD zu DE gegeben ist; so ist AD, DE oder DC und der Punkt D gegeben. Weil also aus einem gegebenen Punkt D die der Grösse nach gegebene gerade Linie DC gezogen ist; so berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Kreis (1, I.).

Kompositon.

Man nehme auf AB den Punkt E so, daß AE zu EB das gegebene Verhältniß habe, und mache AD zu DE wie AE zu EB; aus dem Mittelpunkt D mit dem Halbmesser DE beschreibe man einen Kreis; so wird dessen Umfang der gesuchte Ort seyn. Denn aus den Punkten A, B ziehe man an irgend einen Punkt C auf dem Umfang des Kreises die geraden Linien AC, BC, und durch die Punkte D, C, die gerade Linie DC. Weil nun AD : DE = AE : EB; so ist (19, 5. E.) AD : DE = DE : DB. Es ist aber DC = DE, also sind die Dreyeke ADC, CDB gleichwinklicht (6, 6. E.); folglich ist AC : CB = (AD : $\left\{\begin{matrix}DC\\DE\end{matrix}\right.$, d. i. =) AE : EB, d. i. in dem gegebenen Verhältniß.

1. Zu-

1. Zuſ. Weil AE : EB = AD : DE; ſo iſt, wenn an EF = EB nimmt, getheilt (dividendo) AF : FE = AE : ED = (19, 5. E.) $\left\{\begin{matrix}FE\\EB\end{matrix}\right.$: BD; und diß iſt Schootens Verzeichnung.

2. Zuſ. Aus der nemlichen Proportion AD : DE = AE : EB folgt umgekehrt (convertendo) AD : AE = (Zuſ. 19, 5. E.) AE : AF.

Anm. des Ueberſezers. In Bezug auf den Fall dieſes Sazes, wenn das gegebene Verhältniß nicht das Verhältniß der Gleichheit iſt, theilte mir Herr Prof. Kleiderer folgende Bemerkungen mit, die den Zuſammenhang des Sazes mit 3, 6. E. zeigen.

Fig. 53. b.

§. 1. Wenn man in einem Dreyek ABC, in welchem AC > BC, die gröſſere Seite AC über den Scheitel C hinaus verlängert; ſo begegnet die gerade Linie EL, welche den äuſſern Winkel BCF in 2 gleiche Theile theilt, der verlängerten Linie AB in einem Punkt L, ſo, daß AL : BL = AC : BC. Und umgekehrt, wenn man die nach der Seite des kleinern Schenkels BC hin verlängerte Grundlinie AB in dem Punkt L ſo ſchneidet, daß AL : BL = AC : BC; ſo theilt die an den Scheitel gezogene gerade Linie CL den äuſſern Winkel BCF in 2 gleiche Theile. Denn in beyden Fällen ſchneide man von dem gröſſern Schenkel CA das Stük CP = CB ab, und ziehe BP; ſo iſt CBP = CPB (5, 1. E.). Nun iſt

a) weil BC < AC (Vorausſ.), der Winkel A < CBA (18, 1. E.) folglich FCB = CBA + A (32, 1. E.) < 2 CBA, und LCB = $\frac{1}{2}$ FCB (Vorausſ.) < CBA, und LCB + LBC < CBA + LBC, folglich < 2 rechte Winkel (13, 1, E.). Mithin begegnen ſich die nach

den Winkeln LCB, LBC hin verlängerten Linien BL, CL in einem Punkt L (11. Grundſ. 1. E.). Nun iſt FCB = CPB + CBP (32, 1. E.) = 2 CPB = 2 CBP, folglich $\frac{1}{2}$ FCB = CPB = CBP, d. h. nach der Vorausſ. FCL = LCB = CPB = CBP; folglich ſind die Linien CL, BP gleichlauffend (27, 1. 28, 1. E.) und es iſt AL : BL = AC : CP (2, 6. E.) = AC : CB (11, 5. E.), weil nemlich AC : CP = AC : CB (7, 5. E.), indem CP = CB (Verzeich.).

b) Iſt aber AL : BL = AC : BC, und folglich weil CP = CB (Verz.) AL : BL = AC : CP (7, 5. 11, 5. E.); ſo ſind die Linien CL, BP gleichlauffend (2, 6. E.), und FCL = CPB, LCB = CBP (29, 1. E.), mithin FCL = LCB, weil CPB = CBP (5, 1. E.).

§. 2. Da die Linien CK, CL, wovon die eine den Winkel ACB des Dreyeks, die andere ſeinen Nebenwinkel FCB in 2 gleiche Theile theilt, einen rechten Winkel LCK einſchlieſſen, weil nemlich LCK = BCK + BCL = $\frac{1}{2}$ (ACB + BCF) = einem rechten Winkel (13, 1. E.); ſo geht der über dem Durchmeſſer KL beſchriebene Kreis durch den Scheitelpunkt C (1. Schol. 31, 3. E.). Zugleich ſind ſowohl die durch den Punkt K, und die Endpunkte A, B der Grundlinie begränzten Linien AK, BK, als auch die durch den Punkt L, und die Punkte A, B begränzte Linien AL, BL den anliegenden Seiten des Dreyeks AC, BC proportional (3, 6. E. und §. 1.).

§. 3. Umgekehrt, wenn ſowohl die Stüke AK, BK der Grundlinie, als die, auf der nach der Seite des kürzern Schenkels BC hin verlängerten Grundlinie, abgeſchnittenen Stüke AL, BL das Verhältniß der anliegenden Seiten AC, BC haben; ſo theilen die aus den Punkten K, L an den Scheitel C gezogenen Linien DC, LC den Winkel des Dreyeks ACB, und ſeinen Nebenwinkel FCB in 2 gleiche Theile (3, 6. E. und §. 1.);

folg-

folglich ſchlieſſen ſie (§. 2.) einen rechten Winkel ein, und der über dem Durchmeſſer KL beſchriebene Kreis geht durch den Scheitelpunkt C des Dreyeks.

§. 4. Wenn alſo auf einerley Grundlinie AB, die nichtgleichſchenklichten Dreyeke ACB, AMB ſtehen, bey welchen die gröſſern Schenkel AC, AM an einerley Punkt A der Grundlinie anliegen, folglich eben ſo die kleinere, und wenn die gröſſern Schenkel zu den kleinern beyderſeits einerley Verhältniß haben, daß nemlich AC: BC = AM: BM, und man theilt den Winkel ACB eines dieſer Dreyeke, und eben ſo ſeinen Nebenwinkel FCB, den die Verlängerung des gröſſern Schenkels mit dem kleinern macht, durch die Linien CK, CL, die der Grundlinie und ihrer Verlängerung in den Punkten K und L begegnen, in 2 gleiche Theile: ſo geht der über dem Durchmeſſer KL beſchriebene Kreis durch die Scheitelpunkte C und M der Dreyeke. Von dem erſten Dreyek ACB iſt diß §. 2. erwieſen worden, und von dem andern folgt es aus §. 3. Denn, da

ſo wohl AK: BK
als AL: BL } = AC: BC (Verz. und §. 2.), und

AC: BC = AM: BM (Vorausſ.); ſo iſt

ſo wohl AK: BK
als AL: BL } AM: BM (11, 5. E.); folglich theilen (§. 3.) die Linien KM, LM den Winkel AMB und ſeinen Nebenwinkel BMQ in 2 gleiche Theile. der Winkel KML iſt ein rechter, und der über dem Durchmeſſer KL beſchriebene Kreis geht durch M.

§. 5. Umgekehrt, wenn man in einem nichtgleichſchenklichten Dreyek ACB, den Scheitel-Winkel ACB und ſeinen Nebenwinkel FCB, den die Verlängerung des gröſſern Schenkels mit dem kleinern macht, durch die Linien CK, CL, die der Grundlinie, und ihrer Verlängerung in K, L begegnen, in 2 gleiche Theile theilt, und über dem Durchmeſſer KL einen Kreis beſchreibt,

den Winkeln LCB, LBC hin verlängerten Linien BL, CL in einem Punkt L (11. Grundſ. 1. E.). Nun iſt FCB = CPB + CBP (32, 1. E.) = 2 CPB = 2 CBP, folglich $\frac{1}{2}$ FCB = CPB = CBP, d. h. nach der Vorausſ. FCL = LCB = CPB = CBP; folglich ſind die Linien CL, BP gleichlauffend (27, 1. 28, 1. E.) und es iſt AL : BL = AC : CP (2, 6. E.) = AC : CB (11, 5. E.), weil nemlich AC : CP = AC : CB (7, 5. E.), indem CP = CB (Verzeich.).

b) Iſt aber AL : BL = AC : BC, und folglich weil CP = CB (Verz.) AL : BL = AC : CP (7, 5. 11, 5. E.); ſo ſind die Linien CL, BP gleichlauffend (2, 6. E.), und FCL = CPB, LCB = CBP (29, 1. E.), mithin FCL = LCB, weil CPB = CBP (5, 1. E.).

§. 2. Da die Linien CK, CL, wovon die eine den Winkel ACB des Dreyeks, die andere ſeinen Nebenwinkel FCB in 2 gleiche Theile theilt, einen rechten Winkel LCK einſchlieſſen, weil nemlich LCK = BCK + BCL = $\frac{1}{2}$ (ACB + BCF) = einem rechten Winkel (13, 1. E.); ſo geht der über dem Durchmeſſer KL beſchriebene Kreis durch den Scheitelpunkt C (1. Schol. 31, 3. E.). Zugleich ſind ſowohl die durch den Punkt K, und die Endpunkte A, B der Grundlinie begränzten Linien AK, BK, als auch die durch den Punkt L, und die Punkte A, B begränzte Linien AL, BL den anliegenden Seiten des Dreyeks AC, BC proportional (3, 6. E. und §. 1.).

§. 3. Umgekehrt, wenn ſowohl die Stüke AK, BK der Grundlinie, als die, auf der nach der Seite des kürzern Schenkels BC hin verlängerten Grundlinie, abgeſchnittenen Stüke AL, BL das Verhältniß der anliegenden Seiten AC, BC haben; ſo theilen die aus den Punkten K, L an den Scheitel C gezogenen Linien DC, LC den Winkel des Dreyeks ACB, und ſeinen Nebenwinkel FCB in 2 gleiche Theile (3, 6. E. und §. 1.);

folg-

folglich ſchlieſſen ſie (§. 2.) einen rechten Winkel ein, und der über dem Durchmeſſer KL beſchriebene Kreis geht durch den Scheitelpunkt C des Dreyeks.

§. 4. Wenn alſo auf einerley Grundlinie AB, die nichtgleichſchenklichten Dreyeke ACB, AMB ſtehen, bey welchen die gröſſern Schenkel AC, AM an einerley Punkt A der Grundlinie anliegen, folglich eben ſo die kleinere, und wenn die gröſſern Schenkel zu den kleinern beyderſeits einerley Verhältniß haben, daß nemlich AC: BC = AM: BM, und man theilt den Winkel ACB eines dieſer Dreyeke, und eben ſo ſeinen Nebenwinkel FCB, den die Verlängerung des gröſſern Schenkels mit dem kleinern macht, durch die Linien CK, CL, die der Grundlinie und ihrer Verlängerung in den Punkten K und L begegnen, in 2 gleiche Theile: ſo geht der über dem Durchmeſſer KL beſchriebene Kreis durch die Scheitelpunkte C und M der Dreyeke. Von dem erſten Dreyek ACB iſt diß §. 2. erwieſen worden, und von dem andern folgt es aus §. 3. Denn, da

ſo wohl AK: BK
als AL: BL } = AC: BC (Verz. und §. 2.), und

AC: BC = AM: BM (Vorausſ.); ſo iſt

ſo wohl AK: BK
als AL: BL } AM: BM (11, 5. E.); folglich theilen (§. 3.) die Linien KM, LM den Winkel AMB und ſeinen Nebenwinkel BMQ in 2 gleiche Theile. der Winkel KML iſt ein rechter, und der über dem Durchmeſſer KL beſchriebene Kreis geht durch M.

§. 5. Umgekehrt, wenn man in einem nichtgleichſchenklichten Dreyek ACB, den Scheitel-Winkel ACB und ſeinen Nebenwinkel FCB, den die Verlängerung des gröſſern Schenkels mit dem kleinern macht, durch die Linien CK, CL, die der Grundlinie, und ihrer Verlängerung in K, L begegnen, in 2 gleiche Theile theilt, und über dem Durchmeſſer KL einen Kreis beſchreibt,

schreibt, der (§. 2.) durch den Punkt C geht; so bilden die geraden Linien AM, BM, die man aus A und M an irgend einen Punkt M des Kreises zieht, mit der Grundlinie ein Dreyek AMB, worinn AM : BM = AC : BC.

Denn so ist

sowohl AK : BK } = AC : BC (3, 6. E. und §. 1.)
als AL : BL }

folglich AL : BL = AK : BK (11, 5. E.), mithin ist (14, 5. E.) BL > BK, weil AL > AK (Verzeichn.); folglich fällt der Mittelpunkt D des beschriebenen Kreises auf die Linie BL zwischen B und L. Ferner ist

AL + AK : BL + BK = AK : BK (12, 5. E.), oder, weil AL + AK = KL + 2AK = 2DK + 2AK = 2AD, und BL + BK = KL = 2DK; so ist

2AD : 2DK = AK : BK, mithin

AD : DK = AK : BK (15, 5. und 11, 5. E.)

und ferner AD : DK = { AD − AK : DK − BK } (19, 5. E.)
{ DK : BD }

oder AD : DM = DM : BD (7, 5 und 11, 5. E.), weil DK = DM (Verz.). Es sind mithin (6, 6. E.) die Dreyeke ADM, MDB ähnlich, und es ist AM : AD = BM : DM, und verwechselt

AM : BM = AD : DM (16, 6. E.) = AD : DK (7, 5. 11, 5. E.). Aber

AD : DK = AK : BK = AC : BC (11, 5. E.); folglich auch

AM : BM = AC : BC (11, 5. E.).

§. 6. Aus dem §. 5. Erwiesenen folgt zugleich, daß, wenn eine gegebene gerade Linie AB in irgend einem Punkt K in 2 ungleiche Theile getheilt, und dann auf der Seite des kleinern Stüks verlängert wird, bis AL : BL = AK : BK wird; und wenn dann über der Linie KL als Durchmesser ein Kreis beschrieben, und von irgend einem Punkt M desselben die geraden Linien MA, MB gezogen werden, daß, sage ich, diese Linien

den anliegenden Stüken AK, BK proportional seyn werden, d. h. daß seyn werde
AM : BM = AK : BK = AL : BL. Denn aus der Proportion AK : BK = AL : BL folgt nach §. 5.
AM : BM = AD : DM = AK : BK.

§. 7. Wenn man hingegen aus irgend einem Punkt N innerhalb oder ausserhalb des nach §. 5. oder 6. beschriebenen Kreises an die Punkte A, B gerade Linien AN, BN zieht; so ist nicht NA : NB = CA : CB = AK : BK. Denn die gerade Linie BN muß selbst, oder verlängert, dem Kreis, innerhalb dessen sie (Verzeichn.) liegt, in einem Punkt M begegnen; zieht man nun die geraden Linien AM, BM; so ist AM : BM = AC : BC = AK : BK (§. 5. 6.), und weil (Vorausf. §. 5. 6.) AC > BC, AK > BK; so ist AM > BM, und ABM > MAB (18, 1. E.). Zieht man nun durch den Punkt N eine Linie NO mit AM gleichlauffend, und begegnet NO der Linie AB oder ihrer Verlängerung in O; so ist (29, 1. und 4, 6. E.) NO : NB = AM : BM. Liegt nun der Punkt N ausserhalb des Kreises; so ist der Winkel NOA = MAB (29, 1. E.). Aber, wenn man NA gezogen denkt, so ist NAO > NBA oder MBA (16, 1. E.); folglich, da MBA > MAB, noch vielmehr NAO > MAB, und da NOA = MAB; so ist auch NAO > NOA; folglich NO > NA (19, 1. E.), und NO : NB > NA : NB (5, 8. E.). Folglich auch AM : BM, oder AC : BC, oder AK : BK > NA : NB (13, 5. E.).

Liegt aber der Punkt N innerhalb des Kreises; so ist NOA > NBA oder MBA (16, 1. E.), und MAB > NAB (7. Grundſ. 1. E.); folglich da MBA > MAB; so ist noch vielmehr NOA > MAB, und abermahls noch vielmehr NOA > NAB, mithin NA > NO (19, 1. E.), und NA : NB > NO : NB; folglich NA : NB > AM :

ſchreibt, der (§. 2.) durch den Punkt C geht; ſo bilden die geraden Linien AM, BM, die man aus A und M an irgend einen Punkt M des Kreiſes zieht, mit der Grundlinie ein Dreyek AMB, worinn AM : BM = AC : BC.

Denn ſo iſt

ſowohl AK : BK / als AL : BL } = AC : BC (3, 6. E. und §. 1.)

folglich AL : BL = AK : BK (11, 5. E.), mithin iſt (14, 5. E.) BL > BK, weil AL > AK (Verzeichn.); folglich fällt der Mittelpunkt D des beſchriebenen Kreiſes auf die Linie BL zwiſchen B und L. Ferner iſt

AL + AK : BL + BK = AK : BK (12, 5. E.), oder, weil AL + AK = KL + 2 AK = 2 DK + 2 AK = 2 AD, und BL + BK = KL = 2 DK; ſo iſt

2 AD : 2 DK = AK : BK, mithin

AD : DK = AK : BK (15, 5. und 11, 5. E.)

und ferner AD : DK = { AD − AK : DK − BK / DK : BD } (19, 5. E.)

oder AD : DM = DM : BD (7, 5 und 11, 5. E.), weil DK = DM (Verz.). Es ſind mithin (6, 6. E.) die Dreyeke ADM, MDB ähnlich, und es iſt AM : AD = BM : DM, und verwechſelt

AM : BM = AD : DM (16, 6. E.) = AD : DK (7, 5. 11, 5. E.). Aber

AD : DK = AK : BK = AC : BC (11, 5. E.); folglich auch AM : BM = AC : BC (11, 5. E.).

§. 6. Aus dem §. 5. Erwieſenen folgt zugleich, daß, wenn eine gegebene gerade Linie AB in irgend einem Punkt K in 2 ungleiche Theile getheilt, und dann auf der Seite des kleinern Stüks verlängert wird, bis AL : BL = AK : BK wird; und wenn dann über der Linie KL als Durchmeſſer ein Kreis beſchrieben, und von irgend einem Punkt M deſſelben die geraden Linien MA, MB gezogen werden, daß, ſage ich, dieſe Linien

den anliegenden Stüken AK, BK proportional seyn werden, d. h. daß seyn werde
AM : BM = AK : BK = AL : BL. Denn aus der Proportion AK : BK = AL : BL folgt nach §. 5.
AM : BM = AD : DM = AK : BK.

§. 7. Wenn man hingegen aus irgend einem Punkt N innerhalb oder ausserhalb des nach §. 5. oder 6. beschriebenen Kreises an die Punkte A, B gerade Linien AN, BN zieht; so ist nicht NA : NB = CA : CB = AK : BK. Denn die gerade Linie BN muß selbst, oder verlängert, dem Kreis, innerhalb dessen sie (Verzeichn.) liegt, in einem Punkt M begegnen; zieht man nun die geraden Linien AM, BM; so ist AM : BM = AC : BC = AK : BK (§. 5. 6.), und weil (Vorausf. §. 5. 6.) AC > BC, AK > BK; so ist AM > BM, und ABM > MAB (18, 1. E.). Zieht man nun durch den Punkt N eine Linie NO mit AM gleichlauffend, und begegnet NO der Linie AB oder ihrer Verlängerung in O; so ist (29, 1. und 4, 6. E.) NO : NB = AM : BM. Liegt nun der Punkt N ausserhalb des Kreises; so ist der Winkel NOA = MAB (29, 1. E.). Aber, wenn man NA gezogen denkt, so ist NAO > NBA oder MBA (16, 1. E.); folglich, da MBA > MAB, noch vielmehr NAO > MAB, und da NOA = MAB; so ist auch NAO > NOA; folglich NO > NA (19, 1. E.), und NO : NB > NA : NB (5, 8. E.). Folglich auch AM : BM, oder AC : BC, oder AK : BK > NA : NB (13, 5. E.).

Liegt aber der Punkt N innerhalb des Kreises; so ist NOA > NBA oder MBA (16, 1. E.), und MAB > NAB (7. Grundſ. 1. E.); folglich da MBA > MAB; so ist noch vielmehr NOA > MAB, und abermahls noch vielmehr NOA > NAB, mithin NA > NO (19, 1. E.), und NA : NB > NO : NB; folglich NA : NB > AM :

> AM : BM oder > AC : BC, oder > AK : BK (13, 5. E.).

§. 8. Wenn also ein nichtgleichschenklichtes Dreyek ABC vorgelegt wird; so ist der Ort, welchen sein Scheitel C, und die Scheitel aller übrigen, in der nemlichen Ebene, über der Grundlinie AB beschriebenen Dreyeke berühren, deren den Punkten A, B anliegende Schenkel sich verhalten, wie AC: BC, ein Kreis, der in der nemlichen Ebene über dem Durchmesser KL beschrieben wird, dessen Endpunkte K, L durch gerade Linien CK, CL bestimmt werden, die den Winkel ACB und seinen Nebenwinkel FCB (den die Verlängerung des grössern Schenkels mit dem kleinern macht) in zwey gleiche Theile theilen, und an die Grundlinie und ihre Verlängerung hin gezogen werden (§. 5. 7.).

§. 9. Oder auch: der vorhin genannte Ort ist ein Kreis, der über dem Durchmesser KL beschrieben wird, wo die Punkte K, L so bestimmt werden, daß K auf der Linie AB selbst so genommen wird, daß AK : BK = AC : BC, und eben so L auf der nach der Seite des kleinern Stüks BK hin gemachten Verlängerung so, daß AL : BL = AC : BC (§. 6. 7.).

Berechnung.

Der 1ste Fall ist für sich klar.

Fig. 53. b.

2. Fall. Es ist $AD : DB = AC^2 : BC^2$, folglich

$$\left.\begin{matrix} AD - DB \\ AB \end{matrix}\right\} : DB = AC^2 - BC^2 : BC^2, \text{ mithin}$$

$$DB = \frac{AB \cdot BC^2}{AC^2 - BC^2}, \text{ und } AD = \frac{AB \cdot AC^2}{AC^2 - BC^2},$$

folg-

folglich $DC^2 = AD \times DB = \frac{AB^2 . AC^2 . BC^2}{(AC^2 - BC^2)^2}$

also $DC = \frac{AB . AC . BC}{AC^2 - BC^2} = \frac{AB . AC . BC}{(AC+BC)(AC-BC)}$

Ferner $AK = AD - DC = \frac{AB . AC}{AC+BC}$

und $AL = AD + DC = \frac{AB . AC}{AC-BC}$

3. Satz.

Wenn eine gerade Linie der Lage nach, und auf derselben ein Punkt gegeben ist, aus dem eine endliche gerade Linie gezogen wird; wenn dann aus dem Endpunkt dieser gezogenen Linie ein Perpendikel auf die der Lage nach gegebene gerade Linie gefällt wird; und, wenn das Quadrat der zuerst gezogenen geraden Linie gleich ist dem Rechtek, das enthalten ist zwischen einer gegebenen geraden Linie, und dem Stük der geraden der Lage nach gegebenen Linie, welches zwischen dem gefällten Perpendikel, und dem gegebenen Punkt, oder zwischen dem gefällten Perpendikel, und einem andern gegebenen Punkt abgeschnitten ist: so berührt der Endpunkt der gezogenen Linie einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Oder noch allgemeiner.

Wenn aus einem gegebenen Punkt eine gerade Linie und aus deren Endpunkt an eine der Lage nach gegebene gerade Linie eine mit einer andern der Lage nach gegebenen gleichlauffende gerade Linie gezogen wird; und, wenn das Quadrat der zuerst gezogenen Linie gleich ist dem Rechtek, das enthalten ist zwischen einer gegebenen geraden Linie, und demjenigen Stük der ersten der Lage nach gegebenen geraden Linie, welches zwischen der

zweyten

zweyten gezogenen Linie und einem gegebenen Punkt abgeschnitten ist: so berührt der Endpunkt der zuerst gezogenen Linie einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

1. Fall. Wenn die der Lage nach gegebene gerade Linie, an welche aus dem Endpunkt der zuerst gezogenen Linie eine gerade Linie gezogen werden soll, durch den gegebenen Punkt geht, aus welchem die erste gerade Linie gezogen ist, und, wenn dieser gegebene Punkt zugleich auch der eine Endpunkt des Stüks ist, welches von der zweyten geraden Linie abgeschnitten wird.

Fig. 54. a.

Es seye auf der der Lage nach gegebenen geraden Linie AB der Punkt A gegeben, und aus A die Linie AC, und aus dem Endpunkt C dieser Linie an AB die Linie CD mit der der Lage nach gegebenen geraden Linie AF gleichlauffend gezogen; und es seye das Quadrat von AC gleich dem Rechtek EAD, das zwischen einer gegebenen Linie AE, und dem zwischen CD und dem Punkt A abgeschnittenen Stük AD enthalten ist: so berührt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Denn, man ziehe CE, und, weil das Quadrat über AC gleich ist dem Rchtk EAD; so ist EA: AC = AC: AD; folglich sind (6, 6. E.) die Dreyeke EAC, CAD ähnlich; nun ist der Winkel ADC gegeben, weil CD mit einer der Lage nach gegebenen geraden Linie gleichlauffend ist; also ist der Winkel ACE gegeben; und, weil die gerade Linie AE der Lage und Grösse nach, und überdiß auch der Punkt A gegeben ist; so ist auch der Punkt E gegeben (30. D.); also berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem 4ten Saz des ersten Buchs.

Kompo-

Kompoſition.

Es ſeye A der gegebene Punkt, und man nehme auf der der Lage nach gegebenen geraden Linie AB auf beyden Seiten von A, AE gleich der gegebenen geraden Linie, AF ſeye die gerade Linie, mit welcher die an AB zu ziehende Linien CD gleichlauffend ſeyn ſollen, und man beſchreibe auf derjenigen Seite von AB, auf welcher AF nicht liegt, über AE einen Kreis-Abſchnitt, der eines dem gegebenen Winkel EAF gleichen Winkels fähig ſeye (33, 3. E.), und eben ſo verfahre man bey der andern Linie AE; ſo werden dieſe Kreis-Abſchnitte der geſuchte Ort ſeyn, d. i. wenn man an irgend einen Punkt C derſelben aus A die gerade Linie AC, und aus dem Punkt C an AB die Linie CD mit AF gleichlauffend zieht; ſo wird das Quadrat über AC gleich ſeyn dem Rchtk EAD. Denn, weil der Winkel CDA gleich iſt dem Wechſelswinkel DAF, d. i. dem Winkel ACE; ſo ſind die Dreyeke DAC, CAE gleichwinklicht, mithin iſt EA: AC = AC: AD, alſo das Quadrat über AC gleich dem Rchtk EAD.

Fig. 54. b.

Zuſ. Wenn alſo aus einem Punkt C auf eine der Lage und Gröſſe nach gegebene gerade Linie AE ein Perpendikel CD gefällt wird, und das Quadrat über CD gleich iſt dem Rchtk ADE, das zwiſchen den Abſchnitten der Linie AE enthalten iſt; ſo berührt der Punkt C einen über AE beſchriebenen Halbkreis. Denn, man ſeze auf beyden Seiten das Quadrat über AD hinzu; ſo iſt die Summe der Quadrate über AD und über DC, d. i. das Quadrat über AC gleich dem Rchtk EAD. Folglich berührt der Punkt C nach dem gegenwärtigen Fall einen über dem Durchmeſſer AE beſchriebenen Kreis. Eben dieſes beweiſt Pappus im 2ten Lehnſaz

zum Iſten Buch von Apollonius Kegelſchnitten auf eine andere Art.

2. Fall. Wenn die der Lage nach gegebene gerade Linie, an welche aus dem Endpunkt der zuerſt gezogenen Linie eine gerade Linie gezogen werden ſoll, wie in dem erſten Fall, durch den gegebenen Punkt geht, aus welchem die erſte gerade Linie gezogen iſt; wenn aber von dieſem Punkt derjenige Punkt verſchieden iſt, an welchem das Stük liegt, welches von der geraden mit einer der Lage nach gegebenen gleichlauffenden Linie abgeſchnitten wird.

Fig. 54. c.

Es ſeyen auf der der Lage nach gegebenen geraden Linie AB die zwey Punkte A, E gegeben; aus dem Punkt A ſeye die Linie AC, und aus dem Endpunkt C dieſer Linie an AB die Linie CD mit einer der Lage nach gegebenen geraden Linie AL gleichlauffend gezogen; und es ſeye das Quadrat über AC gleich dem Rchtk, das zwiſchen einer der Gröſſe nach gegebenen Linie AB, und dem zwiſchen CD und dem Punkt E abgeſchnittenen Stük DE enthalten iſt: ſo berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

1. Es falle der Punkt D auf die nach A hin verlängerte Linie AE. Weil nun nach der Vorausſezung das Quadrat über AC gleich iſt dem Rchtk AB×DE, d. i. (1, 2. E.) gleich iſt der Summe der Rchtke BAD, und BAE; ſo iſt, wenn man das Rchtk CAF gleich macht dem Rchtk BAD, dieſe gleiche Rchtke CAF, BAD hinweg genommen, der Reſt, d. i. (3, 2. E.) das Rchtk ACF gleich dem Rchtk BAE. Nun iſt das Rchtk BAE gegeben, weil AB, AE gegeben ſind; alſo iſt auch das Rchtk ACF gegeben. Man ziehe BF, weil nun die Rchtke BAD, CAF gleich ſind; ſo iſt BA: AF = AC: AD;

D; mithin ſind (6, 6. E.) die Dreyeke BAF, CAD
eichwinklicht; alſo iſt der Winkel AFB gleich dem ge-
benen Winkel ADC; nun ſind die Punkte A, B gege-
n; alſo berührt der Punkt F einen der Lage nach gege-
nen über AB beſchriebenen Umkreis nach dem 2ten
Saz des Iſten Buchs. Man beſchreibe dieſen Kreis,
in Mittelpunkt ſeye G und man ziehe die Linie CG,
e dem Kreis in den Punkten H, K begegne. Es iſt
ſo GH, mithin das Quadrat über GH gegeben. Es
aber auch das Rchtk KCH gegeben, denn diß Rchtk
gleich (36, 3. E.) dem Rchtk ACF, und es iſt be-
ieſen worden, daß das Rchtk ACF gegeben ſeye. Mit-
n iſt die Summe des Quadrats von GH und des
chtks KCH gegeben, alſo iſt (6, 2. E.) das Quadrat
er GC, mithin die Linie GC gegeben; und, da der
unkt G gegeben iſt; ſo berührt der Punkt C einen der
ge nach gegebenen Umkreis nach dem 1ſten Saz des
ten Buchs.

2. Es ſeye AC, CD gezogen, wie geſagt wor-
n, und der Punkt D falle auf die gerade Linie AE
lbſt; weil nun nach der Vorausſezung $AC^2 = AB \times DE$;
iſt, das gemeinſchaftliche Rchtk BAD hinzugefügt,
$C^2 + BA \times AD = BA \times AE$, und dieſes Rchtk BAE
gegeben. Man verlängere CA bis an den Punkt F,
, daß das Rchtk CAF gleich ſeye dem Rchtk BAD;
iſt (3, 2. E.) $AC^2 + BA \times AD = AC \times CF$; alſo iſt
s Rchtk ACF gegeben. Man ziehe BF; ſo wird, wie
y n. 1. dieſes Falls bewieſen werden, daß der Winkel
FB gleich ſeye dem gegebenen Winkel ADC. Mit-
n berührt der Punkt F den bey n. 1. beſchriebenen
mkreis, deſſen Mittelpunkt G iſt, und es wird, wie
rt, bewieſen, daß der Punkt C den Umfang deſſelben
reiſes berühre, den der Punkt C berührt.

3. Es ſeye Ac, cd gezogen, wie geſagt worden,
d der Punkt d falle auf die nach E hin verlängerte Li-

nie AE, und man nehme Ab gleich AB auf der entgegen geſezten Seite des Punkts A. Weil nun nach der Vorausſezung, $Ac^2 = Ab \times dE$; ſo iſt, das Rchtk bAE beyderſeits hinzu gefügt $Ac^2 + bA \times AE = bA \times Ad$. Man verlängere Ac bis an den Punkt f, ſo, daß das Rchtk $cA \times Af$ gleich ſeye dem Rchtk $bA \times Ad$; weil alſo $Ac^2 + bA \times AE = cA \times Af$; ſo iſt, das gemeinſchaftliche Quadrat von Ac abgezogen, der Reſt, d. h. das Rchtk bAE gleich dem andern Reſt, d. i. dem Rchtk Acf, welches alſo gegeben iſt. Man ziehe bf; weil nun die Rchtke bAd, cAf gleich ſind; ſo ſind die Dreyeke bAd, cAf gleichwinklicht; alſo iſt der Winkel Afb gleich dem gegebenen Winkel Adc, und, weil die Punkte A, b gegeben ſind; ſo berührt der Punkt f einen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem 2ten Saz des Iſten Buchs. Man beſchreibe dieſen Kreis, ſein Mittelpunkt ſeye g, und man ziehe die Linie cg, die dem Kreis in den Punkten h, k begegne. Es iſt alſo das Quadrat über kg, d. h. die Summe des Rchtks kch und des Quadrats gc gegeben; es iſt aber das Rchtk kch gegeben, denn diß Rchtk iſt (35, 3. E.) gleich dem gegebenen Rchtk Acf; mithin iſt auch der Reſt nemlich das Quadrat über gc gegeben. Alſo iſt gc der Gröſſe nach gegeben; und, weil der Punkt g gegeben iſt; ſo berührt der Punkt c einen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem 1ſten Saz des Iſten Buchs.

Weil aber hier, bey n. 3. den Ort zu finden, erfodert wird, daß das Rchtk kch, welches gleich iſt dem gegebenen Rchtk Acf, oder bAE von dem Quadrat über kg weg genommen werde, und, weil diß nicht immer geſchehen kann; ſo wird hier bey n. 3. der Ort nicht immer verzeichnet werden können. Sollte es nemlich geſchehen, daß das Rchtk bAE gleich wäre dem Quadrat über kg, oder Ag dem Halbmeſſer des Kreiſes, deſſen über Ab beſchriebener Abſchnitt einen Winkel faßt,

der

der gleich ist dem gegebenen Winkel Adc; so wird der einzige Punkt g der Foderung Genüge thun. Wäre das Rchtk bAE grösser, als das Quadrat über Ag; so würde gar kein Ort gefunden werden können. Sollen also die Linien cd, welche mit der der Lage nach gegebenen Linie gleichlauffend sind, der nach E hin verlängerten Linie AE begegnen; so muß nothwendig das Rchtk bAE kleiner seyn, als das Quadrat über Ag. Diß vorausgesezt, ist Folgendes die

Komposition.

Es seye AB die gerade der Lage nach gegebene Linie, auf dieser Linie seyen die Punkte A, E gegeben, und man nehme auf der nach A hin verlängerten Linie AE das Stük AB gleich der der Grösse nach gegebenen geraden Linie, diesem mache man auf der entgegen gesezten Seite das Stük Ab gleich, und es seye AL die gerade Linie, mit welcher die an AB zu ziehende gerade Linien gleichlauffend seyn sollen. Man beschreibe einen Kreis, dessen über AB liegender Abschnitt einen Winkel fasse gleich dem Winkel BAL, der Mittelpunkt dieses Kreises seye G, sein Durchmesser AGM. Ueber AM beschreibe man ein Rchtk, so, daß die Summe dieses Rchtks, und eines über der Verlängerung von AM als Ergänzung des Rchtks beschriebenen Quadrats gleich seye dem gegebenen Rchtk BAE (29, 6. E.). Die hiedurch gefundene Verlängerung von AM seye MN, also das Rchtk ANM gleich dem Rchtk BAE. Aus dem Mittelpunkt G mit dem Halbmesser GN beschreibe man einen Kreis LCN. Und, wenn das Rchtk BAE kleiner ist als das Quadrat von AG; so verlängere man MA nach O, und nehme AO = AM. Ueber einem Stük AP der Linie AO beschreibe man ein Rchtk gleich dem Rchtk BAE, und bestimme den Punkt P so, daß die über dem

nie AE, und man nehme Ab gleich AB
gen geſezten Seite des Punkts A. Weil
Vorausſezung, $Ac^2 = Ab \times dE$; ſo i
bAE beyderſeits hinzu gefügt $Ac^2 + bA\times$
Man verlängere Ac bis an den Punkt
Rchtk $cA \times Af$ gleich ſeye dem Rchtk bA
$Ac^2 + bA \times AE = cA \times Af$; ſo iſt, d
liche Quadrat von Ac abgezogen, der
Rchtk bAE gleich dem andern Reſt,
Acf, welches alſo gegeben iſt. Man
nun die Rchtke bAd, cAf gleich ſind;
eke bAd, cAf gleichwinklicht; alſo iſt
gleich dem gegebenen Winkel Adc, und
A, b gegeben ſind; ſo berührt der Pu
ge nach gegebenen Umkreis nach dem
Buchs. Man beſchreibe dieſen Kreis,
ſeye g, und man ziehe die Linie cg,
den Punkten h, k begegne. Es iſt
über kg, d. h. die Summe des Rc
Quadrats gc gegeben; es iſt aber da
ben, denn diß Rchtk iſt (35, 3. E.)
nen Rchtk Acf; mithin iſt auch der
Quadrat über gc gegeben. Alſo iſt
gegeben; und, weil der Punkt g gege
der Punkt c einen der Lage nach gegeb
dem 1ſten Saz des Iſten Buchs.

Weil aber hier, bey n. 3. den
dert wird, daß das Rchtk kch, welc
gegebenen Rchtk Acf, oder bAE von
kg weg genommen werde, und, weil
geſchehen kann; ſo wird hier bey n.
immer verzeichnet werden können.
geſchehen, daß das Rchtk bAE gleich
drat über kg, oder Ag dem Halbmeſſer
ſen über Ab beſchriebener Abſchnitt eine

andern Stük PO der Linie AO beſchriebene Ergänzung des Rchtks ein Quadrat werde (28, 6. E.), d. h. man mache das Rchtk APO gleich dem Rchtk BAE. Die Linie AO theile man in dem Punkt g in zwey gleiche Theile, und beſchreibe aus dem Mittelpunkt g mit dem Halbmeſſer gP einen Kreis cP; ſo werden die Peripherien der Kreiſe cP und CN der geſuchte Ort ſeyn, d. i. wenn man aus dem Punkt A an irgend einen Punkt derſelben C eine gerade Linie AC, und aus dem Punkt C an AB eine mit AL gleichlauffende Linie CD zieht; ſo wird das Quadrat über AC gleich ſeyn dem Rchtk, das zwiſchen der gegebenen Linie AB, und dem zwiſchen CD und dem Punkt E abgeſchnittenen Stük DE enthalten iſt.

Nun muß zuerſt bewieſen werden, daß der Punkt E zwiſchen den geraden Linien QS, RT liege, welche die Kreiſe in den Punkten Q, R berühren, in welchen ſie die Linie Gg ſchneidet. Man denke ſich BM, bO gezogen; weil nun die Winkel AQS, ABM gleich ſind (denn beyde ſind rechte Winkel 18, und 31, 3. E.); ſo ſind die Dreyeke AQS, ABM gleichwinklicht; alſo iſt das Rchtk BAS gleich dem Rchtk MAQ oder AMN. Es iſt aber das Rchtk BAE oder ANM gröſſer als das Rchtk AMN, alſo das Rchtk BAE gröſſer als das Rchtk BAS, und AE > AS. Auf ähnliche Art wird bewieſen, daß das Rchtk BAT gleich ſeye dem Rchtk MAR oder AOP; es iſt aber das Rchtk BAE oder APO kleiner als das Rchtk AOP oder BAT. Mithin AE < AT. Alſo liegt der Punkt E zwiſchen S und T. Weil aber der diſſeits der Linie BA liegende Winkel BAL gleich iſt dem in dem jenſeitigen Kreis-Abſchnitt liegenden Winkel AMB; ſo berührt AL den Kreis ABM (umgek. 32, 3. E.); alſo ſind die Linien AL, QS, RT gleichlauffend. Alſo muß jede aus irgend einem Punkt des Kreiſes CN mit AL, d. i. mit QS gleichlauffend gezogene Linie der

Linie

Linie AE, oder der nach A hin verlängerten Linie AE begegnen, und jede aus irgend einem Punkt des Kreises PR mit AL, d. i. mit RT gleichlauffend gezogene Linie muß der nach T hin verlängerten Linie AT begegnen. Man nehme also auf dem Umkreis CN irgend einen Punkt C, und die aus diesem Punkt mit AL gleichlauffend gezogene Linie CD begegne

1. Der nach A hin verlängerten Linie AE, man ziehe die Linie AC, die dem Kreis BKM in F begegne, und durch die Punkte B, F ziehe man noch die gerade Linie BF. Nach der Verzeichnung ist also der Winkel AFB gleich dem Winkel BAL, d. i. dem Wechsels-Winkel ADC; also sind die Dreyeke AFB, ADC gleichwinklicht; folglich das Rchtk CAF gleich dem Rchtk BAD. Es ist aber, wenn man die gerade Linie CHGK zieht, das Rchtk ACF gleich (dem Rchtk KCH, d. i. gleich dem Rchtk ANM, d. i. nach der Verzeichnung gleich) dem Rchtk BAE. Also ist die Summe der Rchtke CAF und ACF, d. i. das Quadrat über AC gleich der Summe der Rchtke BAD, BAE, d. i. dem Rchtk AB×DE.

2. Es seye *AC*, *CD* gezogen, wie vorhin, aber *CD* begegne der Linie AE selbst; so wird, die übrigen Linien gezogen wie vorhin, bewiesen werden, daß das Rchtk *CAF* dem Rchtk *BAD*, und das Rchtk *ACF* dem Rchtk BAE gleich seye. Mithin ist der Ueberschuß des Rchtks *ACF* über das Rchtk *CAF*, d. i. das Quadrat über AC gleich dem Ueberschuß des Rchtks BAE über das Rchtk *BAD*, d. i. gleich dem Rchtk AB×*DE*.

3. Man ziehe an irgend einen Punkt c des Kreises PR die Linie Ac, und dann cd mit AL gleichlaufsend; so wird cd der nach T hin verlängerten Linie AT begegnen, weil nemlich RT den Kreis berührt; und man wird, die übrigen Linien wie vorhin gezogen, eben so beweisen können, daß das Rchtk bAd gleich seye dem

Rchtk cAf, d. i. der Summe des Quadrats über Ac und des Rchtks Acf. Es ist aber das Rchtk Acf gleich (dem Rchtk kch, d. i. dem Rchtk APO, d. i. nach der Verzeichnung) dem Rchtk bAE; also ist das Rchtk bAd gleich der Summe des Quadrats über Ac, und des Rchtks bAE; und, das gemeinschaftliche Rchtk bAE abgezogen, ist das Rchtk bA×dE gleich dem Quadrat über Ac.

Fig. 54. d.

3. Fall. Wenn die der Lage nach gegebene gerade Linie, an welche aus dem Endpunkt der zuerst gezogenen Linie eine gerade Linie gezogen werden soll, nicht durch den Punkt geht, aus welchem die erste Linie gezogen worden.

Es seye der Punkt A, die Lage der geraden Linie BE, und auf dieser der Punkt E gegeben; aus dem Punkt A seye die Linie AC, und aus dem Endpunkt C dieser Linie an BE die Linie CD mit einer der Lage nach gegebenen geraden Linie gleichlauffend gezogen; und es seye das Quadrat über AC gleich dem Rchtk, das zwischen einer der Grösse nach gegebenen Linie BE, und dem zwischen CD und dem Punkt E abgeschnittenen Stük DE enthalten ist; so berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Durch den Punkt A ziehe man eine gerade Linie mit BE gleichlauffend, diese begegne der Linie CD in dem Punkt F, und durch den Punkt E ziehe man an AF die Linie EG mit CD gleichlauffend. Weil nun BE der Lage nach gegeben ist; so ist (31. D.) AF der Lage nach gegeben, und, weil durch einen gegebenen Punkt E die Linie EG gleichlauffend mit CD, und CD mit einer der Lage nach gegebenen geraden Linie gleichlauffend gezogen ist; so ist EG der Lage nach gegeben, also ist

der

der Punkt G gegeben. Es iſt aber FG = DE; weil alſo aus einem gegebenen Punkt A eine Linie AC, und aus dem Endpunkt C dieſer Linie an die der Lage nach gegebene gerade Linie AG die gerade Linie CF mit einer der Lage nach gegebenen Linie gleichlauffend gezogen iſt; und, weil das Quadrat über AC gleich iſt dem Rechk, das zwiſchen der gegebenen Linie EB, und dem zwiſchen CF und dem gegebenen Punkt G abgeſchnittenen Stük FG enthalten iſt; ſo wird wie beym 1ſten oder 2ten vorhergehenden Fall bewieſen werden, daß der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis berühre.

Berechnung.

Fig. 54. a.

1. Fall. Es ſeye AG = Ag der Halbmeſſer des zu beſchreibenden Kreiſes; ſo iſt, wie beym 2ten Saz des Iſten Buchs, GAB das Komplement des Winkels ACE, d. h. des Winkels EAF, und es iſt

$$\left.\begin{matrix} AG \\ Ag \end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{2}\,AE.\ \text{coſec. } EAF.$$

Fig. 54. c.

2. Fall. Es iſt, wie beym erſten Fall, GAB = gAb = dem Komplement des Winkels BAL, und $AG = Ag = \frac{1}{2}\,AB.\ \text{coſec. } BAL$. Nun iſt (6, 2. E.) $GC^2 = GH^2 + KC \times CH = AG^2 + BA \times AE$, d. h. $GC^2 = \frac{1}{4}\,AB.^2\ \text{coſec. } \overline{BAL}^2 + BA \times AE$, mithin iſt

$$GC = \sqrt{\tfrac{1}{4}\,AB.^2\ \text{coſec. } \overline{BAL}^2 + BA \times AE}.$$

Und (5, 2. E.) iſt $gc^2 = gh^2 - kc \times ch = Ag^2 - BA \times AE$.

Mithin iſt $gc = \sqrt{\frac{1}{4}\,AB.^2\ \text{coſec. } \overline{BAL}^2 - BA \times AE}$.

Der 3te Fall wird eben ſo, wie bey der geometriſchen Analyſis, auch bey der Berechnung auf einen der vorhergehenden Fälle zurük gebracht.

3. Lehnſatz.

Fig. 55. a. b. c.

In dem Dreyek ABC liege der Punkt D auf der Seite AC, oder auf ihrer Verlängerung, und es verhalte ſich AE zu EB, wie das Rchtk ACD zu dem Quadrat über BC, und durch die Punkte B, D, und C, E ſeyen die geraden Linien BD, CE gezogen. Wenn nun entweder der Punkt E auf der nach B hin verlängerten Linie AB, und zugleich der Punkt D zwiſchen A und C liegt; oder, wenn der Punkt E zwiſchen A und B und zugleich der Punkt D auf der nach C hin verlängerten Linie AC liegt; ſo wird der Winkel BDC gleich ſeyn dem Winkel BCE. Wenn aber der Punkt E auf der nach A hin verlängerten Linie AB, und der Punkt D zwiſchen den Punkten A und C liegt; ſo wird der Winkel BDA, d. i. der Nebenwinkel von BDC gleich ſeyn dem Winkel BCE. Und umgekehrt, wenn die Winkel gleich ſind; ſo wird ſich das Rchtk ACD zu dem Quadrat über BC verhalten, wie AE zu EB.

Denn man ziehe durch den Punkt A eine gerade Linie mit CE gleichlauffend; dieſe begegne der Linie CB in dem Punkt F; weil ſich nun das Rchtk ACD zu dem Quadrat über BC verhält, wie (AE zu EB, d. i. wegen der Parallelen wie FC zu CB, d. i. wie) das Rchtk FCB zu dem Quadrat über BC; ſo iſt das Rchtk ACD gleich dem Rchtk FCB. Alſo liegen die Punkte A, D, B, F auf dem Umfang eines Kreiſes, und im erſten und 2ten Fall iſt der Winkel BDC gleich dem Winkel AFB, d. i. dem Winkel BCE. Aber im 3ten Fall iſt der Winkel ADB gleich dem Winkel AFB, d. i. dem Winkel BCE.

Und umgekehrt, wenn der Winkel BDC, oder im 3ten Fall der Winkel ADB gleich iſt dem Winkel BCE,

d. i.

d. i. dem Winkel AFB; ſo liegen die Punkte A, D, B, F in dem Umfang eines Kreiſes, mithin iſt das Rchtk ACD gleich dem Rchtk FCB. Und es verhält ſich das Rchtk FCB zu dem Quadrat über BC wie FC zu CB, d. i. wie AE zu EB.

4. Lehnſaz.

Fig. 56.

Dieſer Lehnſaz iſt bey Pappus der 121ſte Saz des 7ten Buchs, und ſein 3ter Lehnſaz fürs IIte Buch des Apollonius.

Wenn in einem Dreyek ABC der Ueberſchuß des Quadrats von AB über einen gegebenen Raum E zu dem Quadrat von AC das gegebene Verhältniß von BD zu DC hat; ſo iſt das Rchtk DBC gröſſer, als der Raum E.

Denn man nehme von dem Quadrat über AB ein Rchtk ABG gleich dem gegebenen Raum E hinweg; ſo iſt folglich das Verhältniß des Ueberreſts, d. h. des Rchtks BAG zu dem Quadrat über AC gegeben, nemlich gleich dem Verhältniß von BD zu DC. Man mache das Rchtk FAC gleich dem Rchtk BAG; ſo iſt folglich $FA \times AC : AC^2$, d. i. $FA : AC = BD : DC$. Alſo iſt AD mit BF gleichlauffend; folglich der Winkel F gleich dem Winkel CAD. Es iſt aber der Winkel F gleich dem Winkel AGC, weil die Punkte B, G, C, F auf dem Umfang eines Kreiſes liegen. Alſo iſt der Winkel AGC gleich dem Winkel CAD. Nun iſt der Winkel ADH gröſſer als der Winkel CAD (16, 1. E.), mithin iſt ADH gröſſer als AGC. Man ziehe GK ſo, daß der Winkel AGK gleich werde dem Winkel ADH; ſo liegen die Punkte A, G, K, D auf dem Umfang eines Kreiſes. Alſo wird das Rchtk DBC, welches gröſſer

iſt,

ist, als das Rchtk DBK, d. i. grösser als das Rchtk ABG, grösser seye, als der gegebene Raum E.

4. Saz.

Fig. 57.

Wenn aus zwey gegebenen Punkten A, B zwey gerade Linien AC, BC an einen dritten Punkt C hin gezogen werden, und der Ueberschuß des Quadrats der einen dieser Linien AC über einen gegebenen Raum zu dem Quadrat der andern BC ein gegebenes Verhältniß hat; so berührt der Durchschnitts-Punkt C dieser Linien eine der Lage nach gegebene gerade Linie, oder einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Fig. 57. a. b.

1. Fall. Wenn das gegebene Verhältniß das Verhältniß der Gleichheit ist. In diesem Fall wird der Punkt C eine der Lage nach gegebene gerade Linie berühren. Man nehme von dem Quadrat über AC den gegebenen Raum, nemlich das Rchtk CAD hinweg: so ist der Rest, d. i. das Rchtk ACD gleich dem Quadrat von BC. Also ist AC: BC = BC: CD, und der Winkel ABC gleich (6, 6. E.) dem Winkel BDC. Es seye das Rchtk BAE gleich dem gegebenen Raum CAD; so ist, weil AB gegeben ist, auch AE, mithin der Punkt E gegeben, und die Punkte B, C, D, E liegen auf dem Umfang eines Kreises. Also ist der Winkel BEC, oder sein Nebenwinkel gleich dem Winkel BDC (21, oder 22, 3. E.), d. i. gleich dem Winkel ABC. Folglich sind die Linien BC, EC gleich; und, weil die Punkte B, E gegeben sind; so berührt der Punkt C eine der Lage nach gegebene gerade Linie, die nemlich aus der Mitte von BE senkrecht auf BE gezogen wird nach dem 1sten Fall des 2ten Sazes unsers IIten Buchs.

Kompo-

Kompoſition.

Es ſeye der gegebene Raum gleich dem Rchtk BAE, und man theile BE in F in zwey gleiche Theile, und errichte aus F das Perpendikel FG; ſo wird FG der geſuchte Ort ſeyn, d. i. wenn man aus den Punkten A, B an irgend einen Punkt C auf der Linie FG die geraden Linien AC, BC zieht; ſo wird das Quadrat von AC um das gegebene Rchtk BAE gröſſer ſeyn, als das Quadrat von BC. Denn, weil das Quadrat von AC gröſſer iſt, als das Quadrat von AF; ſo iſt es noch vielmehr (6, 2. E.) gröſſer, als das Rchtk BAE. Wenn man alſo auf der Linie AC den Punkt D ſo beſtimmt, daß das Rchtk CAD gleich wird dem Rchtk BAE; ſo fällt der Punkt D zwiſchen A und C, und nun muß bewieſen werden, daß, das Rchtk CAD von dem Quadrat über AC hinweg genommen, der Reſt, d. i. das Rchtk ACD gleich ſeye dem Quadrat über BC. Man ziehe zu dieſer Abſicht die Linien BD, CE; weil nun die Rchtke BAE, CAD gleich ſind; ſo liegen die Punkte B, D, C, E auf dem Umfang eines Kreiſes; alſo iſt der Winkel BDC gleich (dem Winkel BEC, oder ſeinem Nebenwinkel, d. i. weil CB = CE, gleich) dem Winkel CBA; folglich ſind die Dreyeke ABC, BDC gleichwinklicht, mithin das Rchtk ACD gleich dem Quadrat über BC.

Der Ort iſt in dieſem Fall völlig einerley mit dem Ort im 1ſten Saz dieſes IIten Buchs. Ich fügte aber dieſe Auflöſung bey wegen ihrer Aehnlichkeit mit der Auflöſung des 2ten Falls. Uebrigens iſt es wirklich wahrſcheinlich, daß dieſer Fall erſt von jüngern Mathematikern von dem folgenden 2ten Fall getrennt, und als der erſte Ort des IIten Buchs geordnet worden ſeye, da hingegen bey den ältern derjenige Ort, welcher jezt der 2te iſt, der 1ſte war, wie man aus Pappus im 119ten Saz des 7ten Buchs ſieht; denn unmittelbar vor dieſem Saz

ſtehen

iſt, als das Rchtk DBK, d. i. gröſſer als das Rchtk ABG, gröſſer ſeye, als der gegebene Raum E.

4. Saz.

Fig. 57.

Wenn aus zwey gegebenen Punkten A, B zwey gerade Linien AC, BC an einen dritten Punkt C hin gezogen werden, und der Ueberſchuß des Quadrats der einen dieſer Linien AC über einen gegebenen Raum zu dem Quadrat der andern BC ein gegebenes Verhältniß hat; ſo berührt der Durchſchnitts-Punkt C dieſer Linien eine der Lage nach gegebene gerade Linie, oder einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Fig. 57. a. b.

1. Fall. Wenn das gegebene Verhältniß das Verhältniß der Gleichheit iſt. In dieſem Fall wird der Punkt C eine der Lage nach gegebene gerade Linie berühren. Man nehme von dem Quadrat über AC den gegebenen Raum, nemlich das Rchtk CAD hinweg: ſo iſt der Reſt, d. i. das Rchtk ACD gleich dem Quadrat von BC. Alſo iſt AC: BC = BC: CD, und der Winkel ABC gleich (6, 6. E.) dem Winkel BDC. Es ſeye das Rchtk BAE gleich dem gegebenen Raum CAD; ſo iſt, weil AB gegeben iſt, auch AE, mithin der Punkt E gegeben, und die Punkte B, C, D, E liegen auf dem Umfang eines Kreiſes. Alſo iſt der Winkel BEC, oder ſein Nebenwinkel gleich dem Winkel BDC (21, oder 22, 3. E.), d. i. gleich dem Winkel ABC. Folglich ſind die Linien BC, EC gleich; und, weil die Punkte B, E gegeben ſind; ſo berührt der Punkt C eine der Lage nach gegebene gerade Linie, die nemlich aus der Mitte von BE ſenkrecht auf BE gezogen wird nach dem 1ſten Fall des 2ten Sazes unſers IIten Buchs.

Kompo-

ſtehen die Worte: »Ebener Oerter IItes Buch. Lehnſaz zum 1ſten Ort des IIten Buchs.« Nun ſieht man aber leicht, daß dieſer 119te Saz ein Lehnſaz für den Ort ſeye, den Pappus in der Vorrede zu ſeinem 7ten Buch als den 2ten anführt. Der folgende 120ſte Saz hat die Ueberſchrift: »zum 2ten Ort,« und der darauf folgende 121ſte Saz iſt überſchrieben: »zu eben dem Ort, wenn das Verhältniß nicht das Verhältniß der Gleichheit iſt.« Es iſt aber der 120ſte Saz ein Lehnſaz für den Ort, der bey Pappus in ſeiner Vorrede zum 7ten Buch der 1ſte Ort des IIten Buchs heißt, und der andere, nemlich der 121ſte Saz kann blos zu dem Ort gebraucht werden, welcher in dieſer Vorrede als der 4te gezählt wird. Es iſt alſo ſichtbar, daß bey den Alten der 2te Ort aus den beyden zuſammen beſtanden habe, von denen jezt nach Pappus der eine als der 1ſte, der andere als der 4te gezählt wird. Ueberdiß konnte Apollonius, nachdem er den Ort der Durchſchnitts-Punkte von zwey geraden Linien betrachtet hatte, welche aus zwey gegebenen Punkten gezogen werden, und welche ſelbſt, folglich auch deren Quadrate ein gegebenes Verhältniß unter einander haben, nach dieſer Betrachtung konnte er ſehr ſchiklich den Ort des Durchſchnitts-Punkts von geraden Linien beifügen, welche aus zwey gegebenen Punkten gezogen werden, und bey welchen der Ueberſchuß des Quadrats der einen über einen gegebenen Raum zu dem Quadrat der andern ein gegebenes Verhältniß hat. Der bey Pappus vorkommende 4te Lehnſaz iſt ohne Zweiffel aus ſeiner rechten Stelle verrükt worden, denn es wird ſich in dem Verfolg unſers gegenwärtigen Sazes deutlich zeigen, daß der 5te und 6te Lehnſaz bey Pappus für eben dieſen unſern Ort anwendbar ſeyen, wie der 2te und 3te. Ferner ſcheint unſer jeziger 5ter Saz bey den Alten der 3te, dagegen der, welcher jezt der 3te iſt, der 4te geweſen zu ſeyn. Denn

von

von diesem leztern hängt der Ort, welcher jezt der 6te ist, d. i. bey den Alten der 5te, gänzlich ab.

Figg. 57. c. d. e. f. g. h.

2. Fall. Wenn das gegebene Verhältniß nicht das Verhältniß der Gleichheit ist. In diesem Fall wird der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis berühren. Denn es seye der gegebene Raum gleich dem Rchtk CAD; so ist das Verhältniß des Rests, nemlich des Rchtks ACD zu dem Quadrat über BC gegeben. Es seye auf der Linie AB, AE zu EB in diesem Verhältniß, und zwar seye der Punkt E auf der Verlängerung von AB. Weil nun AB der Lage und Grösse nach gegeben ist; so ist AE, mithin der Punkt E gegeben; man ziehe BD, CE; so ist nach dem 3ten Lehnsaz der Winkel BDC oder sein Nebenwinkel BDA gleich dem Winkel BCE. Das Rchtk CAD aber ist entweder gleich, oder nicht gleich dem Quadrat über AB. Es seye 1) (Fig. 57. c. d.) diesem Quadrat gleich; so berührt die Linie AB den um das Dreyek ECD beschriebenen Kreis (37, 3. E.); also ist der Winkel EBC gleich dem Winkel BDC, oder seinem Nebenwinkel BDA (32, 3. E.), d. i. in beyden Fällen gleich dem Winkel BCE; folglich ist EC gleich der der Grösse nach gegebenen geraden Linie EB; und, weil der Punkt E gegeben ist; so berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem 1sten Saz des 1sten Buchs. Es seye 2) (Fig. 57. e. f. g. h.) das Rchtk CAD grösser oder kleiner als das Quadrat über AB, und das Rchtk BAF seye gleich dem Rchtk CAD. Weil nun AB gegeben ist; so ist AF, mithin der Punkt F gegeben. Es liegen aber die Punkte B, F, D, C auf dem Umfang eines Kreises, weil besagte Rchtke gleich sind: wenn man also CF zieht, so ist der Winkel EFC gleich dem Winkel BDC oder dem

Winkel

Winkel BDA, d. i. in beyden Fällen gleich dem Winkel BCE. Es sind also die Dreyeke FEC, CEB gleichwinklicht; folglich ist das Quadrat über EC gleich dem Rchtk FEB. Das Rchtk FEB aber ist gegeben, mithin ist das Quadrat über EC, also EC selbst der Grösse nach gegeben; und, weil der Punkt E gegeben ist; so berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem 1sten Saz unsers Isten Buchs.

Kompositon.

Es seye das Rchtk BAF gleich dem gegebenen Raum, und das Verhältniß von AE zu EB gleich dem gegebenen Verhältniß. Ist nun diß das Verhältniß des Grössern zum Kleinern; so fällt der Punkt E auf die Verlängerung von AB nach der Seite von B hin: ists aber das Verhältniß des Kleinern zum Grössern; so fällt der Punkt E auf die Verlängerung von AB nach der Seite von A hin. Wenn nun 1) (Fig. 57. c. d.) der gegebene Raum gleich ist dem Quadrat über AB, d. i. wenn der Punkt F auf B fällt; so beschreibe man aus dem Mittelpunkt E mit dem Halbmesser EB einen Kreis; so wird dessen Umfang der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man aus den Punkten A, B an irgend einen Punkt C auf dem Umfang dieses Kreises die geraden Linien AC, BC zieht; so wird der Ueberschuß des Quadrats von AC über das gegebene Quadrat von AB zu dem Quadrat von BC das Verhältniß von AE zu EB haben. Denn man ziehe EC, weil nun AC grösser ist als AB (8, oder 7, 3. E.); so fällt, wenn man das Rchtk CAD gleich nimmt dem Quadrat über AB, der Punkt D zwischen A und C. Man ziehe BD; so berührt die gerade Linie AB den um das Dreyek BCD beschriebenen Kreis in dem Punkt B (37, 3. E.); also ist der Winkel BDC, oder sein Nebenwinkel BDA gleich dem Winkel EBC

(32,

(32, 3. E.), d. i. gleich dem gegebenen Winkel ECB. Folglich verhält ſich nach dem 3ten Lehnſaz das Rchtk ACD, d. i. der Ueberſchuß des Quadrats von AC über das gegebene Rchtk CAD zu dem Quadrat von BC wie AE zu BE.

Es ſeye nun 2) (Fig. 57. e. f. g. h.) das Rchtk BAF, oder der gegebene Raum gröſſer oder kleiner, als das Quadrat über AB. Nun wird erfodert, daß die Punkte B, D, C, F auf dem Umfang eines Kreiſes liegen, und zwar ſo, daß man (in dem Fall, wenn der Punkt E auf der nach B hin verlängerten Linie AB liegt, d. h. wenn das gegebene Verhältniß das Verhältniß des Gröſſern zum Kleinern iſt) daraus beweiſen könne, es ſeye der Winkel EFC gleich dem Winkel BDC, weil ſie nemlich entweder in dem nemlichen Kreis-Abſchnitt liegen, oder der eine von ihnen dem andern als einem äuſſern Winkel des Vierecks BDCF gegen über ſteht. Diß kann aber in dem eben angeführten Fall nicht geſchehen, auſſer, wenn der Punkt F zwiſchen die Punkte A und E fällt. Denn man ſeze, F falle über den Punkt E hinaus, z. B. in f (Fig. 57. f.); ſo wären die Winkel EfC, BDC innere gegen über ſtehende Winkel eines in einen Kreis beſchriebenen Vierecks; mithin könnte man nicht zeigen, daß ſie gleich ſeyen. Es muß alſo der Punkt F nothwendig zwiſchen A und E fallen, alſo das Rchtk BAF kleiner ſeyn, als das Rchtk BAE. Und diß iſt die Beſtimmung, die Pappus in dem vorhergehenden 4ten Lehnſaz auf eine andere Art bewieſen hat, für den Fall nemlich, wenn das gegebene Verhältniß das Verhältniß des Gröſſern zum Kleinern iſt. Denn im andern Fall hat der gegebene Raum keine Beſtimmung, er kann gröſſer oder kleiner ſeyn, als jeder gegebene Raum.

Es ſeye alſo in dem eben erwähnten Fall das gegebene Rchtk BAF kleiner, als das Rchtk BAE, und man

Winkel BDA, d. i. in beyden Fällen gleich dem Winkel BCE. Es sind also die Dreyeke FEC, CEB gleichwinklicht; folglich ist das Quadrat über EC gleich dem Rchtk FEB. Das Rchtk FEB aber ist gegeben, mithin ist das Quadrat über EC, also EC selbst der Grösse nach gegeben; und, weil der Punkt E gegeben ist; so berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem 1sten Saz unsers Isten Buchs.

Komposition.

Es seye das Rchtk BAF gleich dem gegebenen Raum, und das Verhältniß von AE zu EB gleich dem gegebenen Verhältniß. Ist nun diß das Verhältniß des Grössern zum Kleinern; so fällt der Punkt E auf die Verlängerung von AB nach der Seite von B hin: ists aber das Verhältniß des Kleinern zum Grössern; so fällt der Punkt E auf die Verlängerung von AB nach der Seite von A hin. Wenn nun 1) (Fig. 57. c. d.) der gegebene Raum gleich ist dem Quadrat über AB, d. i. wenn der Punkt F auf B fällt; so beschreibe man aus dem Mittelpunkt E mit dem Halbmesser EB einen Kreis; so wird dessen Umfang der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man aus den Punkten A, B an irgend einen Punkt C auf dem Umfang dieses Kreises die geraden Linien AC, BC zieht; so wird der Ueberschuß des Quadrats von AC über das gegebene Quadrat von AB zu dem Quadrat von BC das Verhältniß von AE zu EB haben. Denn man ziehe EC, weil nun AC grösser ist als AB (8, oder 7, 3. E.); so fällt, wenn man das Rchtk CAD gleich nimmt dem Quadrat über AB, der Punkt D zwischen A und C. Man ziehe BD; so berührt die gerade Linie AB den um das Dreyek BCD beschriebenen Kreis in dem Punkt B (37, 3. E.); also ist der Winkel BDC, oder sein Nebenwinkel BDA gleich dem Winkel EBC

(32,

32, 3. E.), d. i. gleich dem gegebenen Winkel ECB. olglich verhält ſich nach dem 3ten Lehnſaz das Rchtk CD, d. i. der Ueberſchuß des Quadrats von AC über as gegebene Rchtk CAD zu dem Quadrat von BC wie E zu BE.

Es ſeye nun 2) (Fig. 57. e. f. g. h.) das Rchtk AF, oder der gegebene Raum gröſſer oder kleiner, als as Quadrat über AB. Nun wird erfodert, daß die unkte B, D, C, F auf dem Umfang eines Kreiſes lie- en, und zwar ſo, daß man (in dem Fall, wenn der unkt E auf der nach B hin verlängerten Linie AB liegt, . h. wenn das gegebene Verhältniß das Verhältniß des röſſern zum Kleinern iſt) daraus beweiſen könne, es ye der Winkel EFC gleich dem Winkel BDC, weil ſie emlich entweder in dem nemlichen Kreis-Abſchnitt lie- en, oder der eine von ihnen dem andern als einem äuſ- rn Winkel des Viereks BDCF gegen über ſteht. Diß nn aber in dem eben angeführten Fall nicht geſchehen, uſſer, wenn der Punkt F zwiſchen die Punkte A und E ällt. Denn man ſeze, F falle über den Punkt E hin- us, z. B. in f (Fig. 57. f.); ſo wären die Winkel fC, BDC innere gegen über ſtehende Winkel eines in nen Kreis beſchriebenen Viereks; mithin könnte man icht zeigen, daß ſie gleich ſeyen. Es muß alſo der unkt F nothwendig zwiſchen A und E fallen, alſo das Rchtk BAF kleiner ſeyn, als das Rchtk BAE. Und iß iſt die Beſtimmung, die Pappus in dem vorherge- enden 4ten Lehnſaz auf eine andere Art bewieſen hat, ür den Fall nemlich, wenn das gegebene Verhältniß as Verhältniß des Gröſſern zum Kleinern iſt. Denn n andern Fall hat der gegebene Raum keine Beſtim- ung, er kann gröſſer oder kleiner ſeyn, als jeder gege- ene Raum.

Es ſeye alſo in dem eben erwähnten Fall das gege- ene Rchtk BAF kleiner, als das Rchtk BAE, und man

finde zwischen EB, EF die mittlere Proportionallinie EG, und beschreibe aus dem Mittelpunkt E mit dem Halbmesser EG einen Kreis; so wird dessen Umfang der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man aus den Punkten A, B an irgend einen Punkt C dieses Umfanges die geraden Linien AC, BC zieht; so wird der Ueberschuß des Quadrats von AC über das gegebene Rchtk BAF zu dem Quadrat über BC das gegebene Verhältniß von AE zu EB haben. Denn man ziehe EC, FC; weil nun nach der Verzeichnung das Rchtk BEF gleich ist dem Quadrat über EG, d. i. dem Quadrat über EC; so berührt die gerade Linie EC den um das Dreyek BCF beschriebenen Kreis (37, 3. E.); und, weil der Punkt A ausserhalb dieses Kreises auf eben der Seite der Berührungslinie EC liegt, auf welcher der Kreis ist; so muß die gerade Linie AC diesem Kreis noch einmahl zwischen den Punkten A und C begegnen (16, 3. E.). Es geschehe diß in D, und man ziehe die gerade Linie BD; so ist folglich das Rchtk CAD gleich dem Rchtk BAF; nimmt man diß Rchtk CAD von dem Quadrat über AC hinweg; so bleibt noch das Rchtk ACD übrig. Und, weil die Punkte B, C, D, F auf dem Umfang eines Kreises liegen; so ist der Winkel BDC, oder sein Nebenwinkel BDA gleich dem Winkel EFC, d. i. wegen der gleichwinklichten Dreyeke BEC, CEF (6, 6. E.) gleich dem Winkel BCE. Also verhält sich nach dem 3ten Lehnsaz das Rchtk ACD zu dem Quadrat über BC, wie AE zu EB. Es ist aber ACD der Ueberschuß des Quadrats von AC über den gegebenen Raum, nemlich über das Rchtk BAF.

Fig. 57. 1.

Nun ist noch übrig, eben dieses auch von den Punkten zu erweisen, in welchen der Ort der geraden Linie

AE

AB begegnet, d. i. wenn AE zu EB das gegebene Verhältniß, das Rchtk BAF der gegebene Raum, und EG die mittlere Proportional-Linie zwiſchen EB und EF iſt; ſo muß bewieſen werden, daß der Ueberſchuß des Quadrats von AG über das Rchtk BAF ſich zu dem Quadrat von BG verhalte, wie AE zu EB.

Man nehme GH = GB; weil nun FE, GE, BE proportional ſind; ſo iſt [in der 1ſten und 5ten Linie bey Fig. 57. i. nach 19, 5. E. und getheilt (dividendo); in der 3ten und 6ten Linie nach 19, 5. E. und verkehrt getheilt (dividendo inverſe); *) in der 2ten, 4ten, 7ten, 8ten Linie nach 12, 5. E. und zuſammen geſezt (componendo)] FH : BG = BG : BE. Alſo iſt das Quadrat über BG gleich dem Rchtk BE×FH; und, weil BG, GH gleich ſind; ſo iſt in der 1ſten, 2ten, 3ten und 4ten Linie das Quadrat über AG gleich (der Summe des Rchtks BAH, und des Quadrats über BG (6, 2. E.), d. i. gleich) der Summe der Rchtke BAF, BA×FH, und BE×FH, d. i. gleich) der Summe der Rchtke BAF, und AE×FH. Und in der 5ten, 6ten, 7ten, 8ten Linie iſt (weil das Quadrat von BG gleich iſt dem Rchtk BE×FH, d. i. (1, 2. E.) der Summe der Rchtke EA×FH, und AB×FH), wenn man in der 5ten Linie das Rchtk BAH auf beyden Seiten hinzu ſezt, und in der 6ten, 7ten, 8ten Linie daſſelbe von beyden Seiten hinweg nimmt, ebenfalls (6, 5, 2. E.) das Quadrat über AG gleich der Summe der Rchtke BAF und AE×FH. Es iſt alſo das Rchtk AE×FH der Ueberſchuß des Quadrats von AG über das Rchtk BAF; und dieſes Rchtk AE×FH verhält ſich zu dem Quadrat über BG, d. i. zu dem Rchtk BE×FH wie AE zu EB, welches zu erweiſen war.

*) d. i. wenn man ſchließt: wie ſich der Ueberſchuß des 2ten Glieds über das 1ſte zum 2ten Glied verhält, ſo verhält ſich der Ueberſchuß des 4ten über das 3te zum 4ten.

Pappus erweist das nemliche für die zwey Fälle der 1sten und 2ten Linie in dem 123sten und 124sten Saz seines 7ten Buchs, und diese beyden Säze wollen wir doch hier auch her sezen, theils, damit man nichts von dem vermisse, womit dieser trefliche Geometer diese unsere Bücher erläutert hat, theils um deutlich zu zeigen, wohin diese Lehnsäze eigentlich gehören, und für welchen Saz sie brauchbar seyen, welches wirklich die Mathematiker seit Pappus Zeiten nicht recht gewußt zu haben scheinen.

123ster Saz des 7ten Buchs von Pappus mathematischen Sammlungen 235. Bl. nach der Ausgabe vom Jahr 1588, welcher aber sein 4ter, nicht, wie bey Kommandin der 5te Lehnsaz seyn muß.

Fig. 57. k.

Wenn AB zu BC ein gegebenes Verhältniß hat, und der Raum CAD gegeben ist, und, wenn BE zwischen DB, BC die mittlere Proportionallinie ist; so soll bewiesen werden, daß der Ueberschuß des Quadrats von AE über das gegebene Rchtk CAD zu dem Quadrat über EC das gegebene Verhältniß von AB zu BC habe.

Man nehme FE zu EC in demselben Verhältniß, welches AB zu BC hat; so ist wegen dieses Verhältnisses, und getheilt AC: CB = FC: CE, folglich verhält sich auch die ganze Linie AF zu der ganzen Linie BE, wie AC zu CB, und verwechselt ist also AF: AC = BE: CB. Es ist aber BE: CB = DE: EC, weil nemlich BE die mittlere Proportionallinie ist. Es ist also AF: AC DE: EC; folglich das Rchtk AF×EC = AC×DE. Es ist aber der Ueberschuß des Rchtks AF×EC über das Rchtk AEC gleich dem Rchtk FEC, also ist auch der Ueberschuß des Rchtks AC×DE über das Rchtk AEC gleich dem Rchtk FEC. Nun ist der Ueberschuß des

Rchtks

Rchtks ACxDE über das Rchtk AEC gleich dem Ueberschuß des Quadrats von AE über das Rchtk CAD. *) Mithin ist das Quadrat über AE um das Rchtk FEC gröſſer, als das Rchtk CAD. Es verhält sich aber das Rchtk FEC zu dem Quadrat über EC wie FE zu EC, d. i. wie AB zu BC. Folglich hat der Ueberschuß des Quadrats von AE über das Rchtk CAD zu dem Quadrat über EC das Verhältniß von AB zu BC.

124ster Saz des 7ten Buchs von Pappus Sammlungen, d. i. sein 5ter, nicht, wie bey Kommandin, 6ter Lehnsaz.

Fig. 57. b.

Wenn AB zu BC ein gegebenes Verhältniß hat, und der Raum CAD gegeben ist, und wenn BE die mittlere Proportionallinie zwischen DB, BC ist; so hat der Ueberschuß des Quadrats von AE über das Rchtk CAD zu dem Quadrat über EC das gegebene Verhältniß von AB zu BC. Man nehme FE zu EC in demselben Verhältniß, welches AB zu BC hat; so ist, getheilt, FC: CE = AC: CB, mithin verhält sich auch der Rest FA zum Rest BE wie AC zu CB, und, verwechselt, ist FA: AC = BE: CB. Es ist aber BE: CB = DE: EC, weil BE die mittlere Proportionallinie zwischen DB und BC ist. Mithin ist FA: AC = DE: EC, also das Rchtk ACxDE gleich dem Rchtk FAxEC. Man seze noch beyderseits die beyden Rchtke AEC und CAD hinzu; so ist das Ganze, nemlich das Quadrat über AE gleich dem andern Ganzen, nemlich der Summe der Rchtke FEC und CAD. Es verhält sich aber das Rchtk FEC zu dem Quadrat über EC, wie AB zu BC. Folglich

*) Denn es ist die Summe der Rchtke ACxDE und CAD gleich (dem Rchtk CAE, d. i.) der Summe des Quadrats von AE, und des Rchtks AEC.

hat der Ueberschuß des Quadrats von AE über das Rechk CAD zu dem Quadrat von EC das Verhältniß von AB zu BC.

Berechnung.

Es seye der gegebene Raum $= \mathfrak{R}$; $AB = a$; das Verhältniß, welches der Ueberschuß des Quadrats von AC über den gegebenen Raum zu dem Quadrat von BC hat, $= \beta : 1$; so ist in dem

Fig. 57. a. b.

1sten Fall $\beta = 1$; $BA \times AE = \mathfrak{R}$, also $AE = \frac{\mathfrak{R}}{a}$,

$BE = \pm \left(a - \frac{\mathfrak{R}}{a}\right) = \pm \left(\frac{a^2 - \mathfrak{R}}{a}\right)$; $BF = \frac{1}{2} BE$

$= \frac{\pm (a^2 - \mathfrak{R})}{2a}$.

Fig. 57. c. d.

Für den 2ten Fall 1. ist $\mathfrak{R} = a^2$, und $AE : BE = \beta : 1$, folglich

$\pm (AE - BE)$ { [redacted]

$$EF = AE \mp AF = \pm \frac{\beta a}{\beta - 1} \mp \frac{\mathfrak{R}}{a}, \text{ mithin}$$

$$EG = \sqrt{EB \times EF} = \sqrt{\left(\pm \frac{\beta a}{\beta - 1} \mp \frac{\mathfrak{R}}{a}\right) \times \left(\pm \frac{a}{\beta - 1}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\beta a^2 - (\beta - 1)\mathfrak{R}}{\pm (\beta - 1) a}\right)\left(\frac{a}{\pm (\beta - 1)}\right)} = \frac{\sqrt{(\beta a^2 - (\beta - 1)\mathfrak{R})}}{\beta - 1}.$$

Fermat meynt,*) Pappus habe hier einen dem vorigen ähnlichen Saz ausgelaſſen, nemlich dieſen:

Wenn aus zwey Punkten zwey gerade Linien an einen dritten Punkt hin gezogen werden, und die Summe des Quadrats der einen und eines gegebenen Raums zu dem Quadrat der andern ein gegebenes Verhältniß hat: ſo berührt der Durchſchnitts-Punkt dieſer geraden Linien einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Allein Apollonius wußte ſehr wohl, daß dieſer Ort wirklich in dem vorhergehenden ſchon enthalten ſeye. Denn, wenn die Summe einer gewiſſen Gröſſe und einer gegebenen Gröſſe zu einer andern Gröſſe ein gegebenes Verhältniß hat, ſo hat auch umgekehrt der Ueberſchuß dieſer andern Gröſſe über eine gegebene Gröſſe zu der erſtern Gröſſe ein gegebenes Verhältniß (14. D.). Und deßwegen hat auch Euklid, deſſen Data viele Säze von ſolchen Gröſſen enthalten, deren Ueberſchuß über eine gegebene Gröſſe zu einer andern Gröſſe ein gegebenes Verhältniß hat, doch keinen, bey welchem ihre und einer gegebenen Gröſſe Summe zu einer andern ein gegebenes Verhältniß hat, weil nemlich dieſe leztern Säze ſchon in jenen erſtern enthalten ſind. Sonſt könnte man freilich auch dieſen Saz auf eine ähnliche Art wie den vorhergehenden, ohne Hülfe dieſes Lehnſazes beweiſen, wie Fermat am angeführten Ort gezeigt hat.

*) Fermatii varia Opera Mathem. p. 33.

Uebrigens giebt es noch einen dritten dieſen beyden ähnlichen Ort, der auch eine ähnliche Auflöſung hat, und von dieſem ſagt weder Fermat noch Schooten etwas. Inzwiſchen iſt er doch eben ſo nüzlich, als dieſe beyden, und kann auf keinen derſelben zurük gebracht werden. Es iſt nemlich folgender

Saz A.

Fig. 58. a. b. c.

Wenn aus zwey gegebenen Punkten A und B zwey gerade Linien AC, BC an einen dritten Punkt C hin gezogen werden, und wenn die Summe des Quadrats der einen AC und eines Raums, zu welchem das Quadrat der andern BC ein gegebenes Verhältniß hat, gegeben iſt: ſo berührt der Durchſchnitts-Punkt C dieſer beyden Linien einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Denn es ſeye der gegebene Raum gleich dem Rchtk CAD, d. i. gleich der Summe des Quadrats über AC, und des Rchtks ACD; ſo iſt nach der Vorausſezung das Verhältniß des Rchtks ACD zu dem Quadrat über BC gegeben. Man nehme auf der Linie AB den Punkt E ſo, daß AE zu EB dieſes Verhältniß habe; weil nun AB der Lage und Gröſſe nach gegeben iſt; ſo iſt AE und der Punkt E gegeben. Man ziehe BD, CE; ſo iſt nach dem 3ten Lehnſaz der Winkel BDC gleich dem Winkel BCE. Das Rchtk CAD aber iſt entweder gleich, oder nicht gleich dem Quadrat über AB. Es ſeye 1) dieſem (Fig. 58. a.) Quadrat gleich; ſo berührt die gerade Linie AB den um das Dreyek BDC beſchriebenen Kreis in dem Punkt B (37, 3. E.), alſo iſt der Winkel EBC gleich dem Winkel BDC (32, 3. E.), d. i. gleich dem Winkel BCE; folglich iſt EC = EB; nun iſt EB und der Punkt E gegeben; mithin berührt der Punkt C

einen

nen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem 1ſten
Saz unſers Iſten Buchs. Es ſeye 2) (Fig. 58. b. c.)
as Rchtk CAD gröſſer oder kleiner als das Quadrat über
B, und das Rchtk BAF ſeye gleich dem Rchtk CAD.
Weil nun BA gegeben iſt; ſo iſt auch AF, und der
unkt F gegeben. Und, weil die Rchtke BAF, CAD
leich ſind; ſo liegen die Punkte B, F, D, C auf dem
mfang eines Kreiſes. Man ziehe CF; ſo iſt der Win-
l EFC gleich dem Winkel BDC, d. i. gleich dem Win-
l BCE, mithin ſind die Dreyeke FEC, CEB gleich-
inklicht, alſo iſt das Quadrat über EC gleich dem
chtk FEB. Es iſt aber das Rchtk FEB gegeben,
ithin iſt auch das Quadrat über EC, folglich EC ſelbſt
r Gröſſe nach gegeben; und, weil der Punkt E gege-
n iſt, ſo berührt der Punkt C einen der Lage nach ge-
benen Umkreis nach dem 1ſten Saz des Iſten Buchs.

Kompoſition.

Es ſeye das Rchtk BAF gleich dem gegebenen
aum, und das Verhältniß von AE zu EB gleich dem
gebenen Verhältniß. Wenn nun 1) (Fig. 58. a.) der
gebene Raum gleich iſt dem Quadrat über AB, d. i.
enn der Punkt F auf B fällt, ſo beſchreibe man aus
m Mittelpunkt E mit dem Halbmeſſer EB einen Kreis;
wird deſſen Umfang der geſuchte Ort ſeyn, d. i. wenn
an aus den Punkten A und B an irgend einen Punkt
dieſes Kreiſes hin die gerade Linie AC, BC zieht; ſo
ird die Summe des Quadrats über AC und einer
röſſe, zu welcher das Quadrat über BC das gegebene
erhältniß von EB zu AE hat, gleich ſeyn dem Quadrat
er AB. Denn man ziehe EC, weil nun AC kleiner
als AB (7, oder 8, 3. E.); ſo fällt, wenn man das
chtk CAD gleich macht dem Quadrat über AB, der
unkt D auf die Verlängerung von AC nach der Seite

Uebrigens giebt es noch einen dritten dieſen beyden ähnlichen Ort, der auch eine ähnliche Auflöſung hat, und von dieſem ſagt weder Fermat noch Schooten etwas. Inzwiſchen iſt er doch eben ſo nüzlich, als dieſe beyden, und kann auf keinen derſelben zurük gebracht werden. Es iſt nemlich folgender

Saz A.

Fig. 58. a. b. c.

Wenn aus zwey gegebenen Punkten A und B zwey gerade Linien AC, BC an einen dritten Punkt C hin gezogen werden, und wenn die Summe des Quadrats der einen AC und eines Raums, zu welchem das Quadrat der andern BC ein gegebenes Verhältniß hat, gegeben iſt: ſo berührt der Durchſchnitts-Punkt C dieſer beyden Linien einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Denn es ſeye der gegebene Raum gleich dem Rchk CAD, d. i. gleich der Summe des Quadrats über AC, und des Rchks ACD; ſo iſt nach der Vorausſezung das Verhältniß des Rchks ACD zu dem Quadrat über BC gegeben. Man nehme auf der Linie AB den Punkt E ſo, daß AE zu EB dieſes Verhältniß habe; weil nun AB der Lage und Gröſſe nach gegeben iſt; ſo iſt AE und der Punkt E gegeben. Man ziehe BD, CE; ſo iſt nach dem 3ten Lehnſaz der Winkel BDC gleich dem Winkel BCE. Das Rchk CAD aber iſt entweder gleich, oder nicht gleich dem Quadrat über AB. Es ſeye 1) dieſem (Fig. 58. a.) Quadrat gleich; ſo berührt die gerade Linie AB den um das Dreyek BDC beſchriebenen Kreis in dem Punkt B (37, 3. E.), alſo iſt der Winkel EBC gleich dem Winkel BDC (32, 3. E.), d. i. gleich dem Winkel BCE; folglich iſt EC = EB; nun iſt EB und der Punkt E gegeben; mithin berührt der Punkt C

einen

en der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem 1ſten
az unſers Iſten Buchs. Es ſeye 2) (Fig. 58. b. c.)
s Rchtk CAD gröſſer oder kleiner als das Quadrat über
B, und das Rchtk BAF ſeye gleich dem Rchtk CAD.
Weil nun BA gegeben iſt; ſo iſt auch AF, und der
unkt F gegeben. Und, weil die Rchtke BAF, CAD
eich ſind; ſo liegen die Punkte B, F, D, C auf dem
nfang eines Kreiſes. Man ziehe CF; ſo iſt der Win-
l EFC gleich dem Winkel BDC, d. i. gleich dem Win-
l BCE, mithin ſind die Dreyeke FEC, CEB gleich-
inklicht, alſo iſt das Quadrat über EC gleich dem
chtk FEB. Es iſt aber das Rchtk FEB gegeben,
ithin iſt auch das Quadrat über EC, folglich EC ſelbſt
r Gröſſe nach gegeben; und, weil der Punkt E gege-
n iſt, ſo berührt der Punkt C einen der Lage nach ge-
benen Umkreis nach dem 1ſten Saz des Iſten Buchs.

Kompoſition.

Es ſeye das Rchtk BAF gleich dem gegebenen
um, und das Verhältniß von AE zu EB gleich dem
gebenen Verhältniß. Wenn nun 1) (Fig. 58. a.) der
gebene Raum gleich iſt dem Quadrat über AB, d. i.
nn der Punkt F auf B fällt, ſo beſchreibe man aus
n Mittelpunkt E mit dem Halbmeſſer EB einen Kreis;
wird deſſen Umfang der geſuchte Ort ſeyn, d. i. wenn
n aus den Punkten A und B an irgend einen Punkt
dieſes Kreiſes hin die gerade Linie AC, BC zieht; ſo
rd die Summe des Quadrats über AC und einer
röſſe, zu welcher das Quadrat über BC das gegebene
erhältniß von EB zu AE hat, gleich ſeyn dem Quadrat
er AB. Denn man ziehe EC, weil nun AC kleiner
als AB (7, oder 8, 3. E.); ſo fällt, wenn man das
htk CAD gleich macht dem Quadrat über AB, der
nkt D auf die Verlängerung von AC nach der Seite

von C hin. Man ziehe BD; so wird die gerade Linie AB den um das Dreyek DBC beschriebenen Kreis in dem Punkt B berühren (37, 3. E.); also ist der Winkel BDC gleich dem Winkel EBC (32, 3. E.), d. i. dem Winkel ECB. Folglich verhält sich nach dem 3ten Lehnsaz das Rchtk ACD zu dem Quadrat über BC wie AE zu BE. Und es ist die Summe des Quadrats über AC und des Rchtks ACD gleich dem Rchtk CAD, d. i. gleich dem Quadrat über AB. Es seye 2) (Fig. 58. b. c.) das Rchtk BAF grösser oder kleiner, als das Quadrat über AB. Nun wird (nach der Analyse) erfodert, daß die Punkte B, C, D, F auf dem Umfang eines Kreises liegen, und zwar so, daß man daraus beweisen könne, der Winkel EFC seye gleich dem Winkel BDC. Diß kann aber nicht geschehen, wenn nicht der Punkt F auf der Verlängerung von AE nach der Seite von E hin liegt; denn gesezt, dieser Punkt läge (Fig. 58. b.) zwischen A und E z. B. in f; so wären die Winkel EfC, BDC gegen über stehende Winkel eines in einem Kreis beschriebenen Viereks: man könnte folglich nicht beweisen, daß sie gleich seyen; mithin muß der Punkt F nothwendig auf die Verlängerung von AE nach der Seite von E hin fallen, also muß das gegebene Rchtk BAF grösser seyn, als das Rchtk BAE, welches auch noch auf eine andere Art vermittelst des folgenden Lehnsazes erwiesen werden kann.

5. Lehnsaz.

Fig. 58. d.

Wenn in einem Dreyek ABC die Summe des Quadrats über AC, und eines Raums, zu welchem das Quadrat über BC ein gegebenes Verhältniß hat, gegeben, z. B. gleich ist dem gegebenen Rchtk CAD; und wenn das gegebene Verhältniß (des Quadrats zu dem

dem Raum) gleich ist dem Verhältniß von EB zu AE, und der Punkt E zwischen den Punkten A und B liegt: so ist das Rchtk CAD grösser, als das Rchtk BAE.

Man trage aus dem Punkt A gegen B hin die Linie AF, so, daß das Rchtk BAF gleich seye dem Rchtk CAD. Und das Rchtk BCG mache man gleich dem Rchtk ACD. Weil nun die Summe des Quadrats über AC und des Rchtks ACD gleich ist dem gegebenen Raum CAD; so ist das Rchtk ACD, d. i. das Rchtk BCG der Raum, zu welchem das Quadrat über BC das gegebene Verhältniß von EB zu AE hat. Es verhält sich aber das Rchtk BCG zu dem Quadrat über BC, wie CG zu BC. Folglich ist GC: BC = AE: EB; man ziehe die Linien AG, CE, so sind mithin diese gleichlauffend; also der Winkel ECB gleich dem Winkel AGB, d. i. gleich dem Winkel ADB, denn die Punkte A, G, D, B liegen auf dem Umfang eines Kreises, weil die Rchtke ACD, GCB gleich sind. Und, weil die Rchtke CAD, BAF gleich sind; so liegen die Punkte B, F, C, D auf dem Umfang eines Kreises. Also ist der Winkel ACF gleich dem Winkel FBD; es ist aber der Winkel FBD gröſſer, als der Winkel CBD, d. i. gröſſer, als der Winkel GAD, d. i. gröſſer, als der Winkel ACE. Mithin ist der Winkel ACF gröſſer, als der Winkel ACE, also AF gröſſer als AE; folglich das Rchtk BAF oder CAD gröſſer als das Rchtk BAE.

Es seye also (Fig. 58. b. c.) der gegebene Raum, nemlich das Rechtek BAF gröſſer, als das Rechtek BAE, und man finde zwischen EB und EF die mittlere Proportional-Linie EG. Aus dem Mittelpunkt E mit dem Halbmesser EG beschreibe man einen Kreis; so wird dessen Umfang der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man aus den Punkten A und B an irgend einen Punkt C dieses Kreises die geraden Linien AC, BC zieht; so wird die Summe des Quadrats über AC und eines Raums, zu welchem das Quadrat über BC das gegebene Verhältniß

von

von C hin. Man ziehe BD; so wird die gerade Linie AB den um das Dreyek DBC beschriebenen Kreis in dem Punkt B berühren (37, 3. E.); also ist der Winkel BDC gleich dem Winkel EBC (32, 3. E.), d. i. dem Winkel ECB. Folglich verhält sich nach dem 3ten Lehnsaz das Rchtk ACD zu dem Quadrat über BC wie AE zu BE. Und es ist die Summe des Quadrats über AC und des Rchtks ACD gleich dem Rchtk CAD, d. i. gleich dem Quadrat über AB. Es seye 2) (Fig. 58. b. c.) das Rchtk BAF grösser oder kleiner, als das Quadrat über AB. Nun wird (nach der Analyse) erfodert, daß die Punkte B, C, D, F auf dem Umfang eines Kreises liegen, und zwar so, daß man daraus beweisen könne, der Winkel EFC seye gleich dem Winkel BDC. Diß kann aber nicht geschehen, wenn nicht der Punkt F auf der Verlängerung von AE nach der Seite von E hin liegt; denn gesezt, dieser Punkt läge (Fig. 58. b.) zwischen A und E z. B. in f; so wären die Winkel EfC, BDC gegen über stehende Winkel eines in einem Kreis beschriebenen Viereks: man könnte folglich nicht beweisen, daß sie gleich seyen; mithin muß der Punkt F nothwendig auf die Verlängerung von AE nach der Seite von E hin fallen, also muß das gegebene Rchtk BAF grösser seyn, als das Rchtk BAE, welches auch noch auf eine andere Art vermittelst des folgenden Lehnsazes erwiesen werden kann.

5. Lehnsaz.

Fig. 58. d.

Wenn in einem Dreyek ABC die Summe des Quadrats über AC, und eines Raums, zu welchem das Quadrat über BC ein gegebenes Verhältniß hat, gegeben, z. B. gleich ist dem gegebenen Rchtk CAD; und wenn das gegebene Verhältniß (des Quadrats zu

dem

n Raum) gleich iſt dem Verhältniß von EB zu AE,
d der Punkt E zwiſchen den Punkten A und B liegt:
iſt das Rchtk CAD gröſſer, als das Rchtk BAE.

Man trage aus dem Punkt A gegen B hin die Linie
F, ſo, daß das Rchtk BAF gleich ſeye dem Rchtk CAD,
nd das Rchtk BCG mache man gleich dem Rchtk ACD.
Weil nun die Summe des Quadrats über AC und des
chtks ACD gleich iſt dem gegebenen Raum CAD; ſo
das Rchtk ACD, d. i. das Rchtk BCG der Raum,
welchem das Quadrat über BC das gegebene Verhält-
ß von EB zu AE hat. Es verhält ſich aber das Rchtk
CG zu dem Quadrat über BC, wie CG zu BC. Folg-
h iſt GC: BC = AE: EB; man ziehe die Linien AG,
E, ſo ſind mithin dieſe gleichlauffend; alſo der Winkel
CB gleich dem Winkel AGB, d. i. gleich dem Winkel
DB, denn die Punkte A, G, D, B liegen auf dem Um-
ng eines Kreiſes, weil die Rchtke ACD, GCB gleich
d. Und, weil die Rchtke CAD, BAF gleich ſind; ſo
gen die Punkte B, F, C, D auf dem Umfang eines
reiſes. Alſo iſt der Winkel ACF gleich dem Winkel
BD; es iſt aber der Winkel FBD gröſſer, als der Winkel
BD, d. i. gröſſer, als der Winkel GAD, d. i. gröſſer,
s der Winkel ACE. Mithin iſt der Winkel ACF gröſ-
, als der Winkel ACE, alſo AF gröſſer als AE; folglich
s Rchtk BAF oder CAD gröſſer als das Rchtk BAE.

Es ſeye alſo (Fig. 58. b. c.) der gegebene Raum,
mlich das Rechtek BAF gröſſer, als das Rechtek BAE,
nd man finde zwiſchen EB und EF die mittlere Propor-
onal-Linie EG. Aus dem Mittelpunkt E mit dem
albmeſſer EG beſchreibe man einen Kreis; ſo wird
ffen Umfang der geſuchte Ort ſeye, d. i. wenn man
s den Punkten A und B an irgend einen Punkt C die-
s Kreiſes die geraden Linien AC, BC zieht; ſo wird die
Summe des Quadrats über AC und eines Raums, zu
elchem das Quadrat über BC das gegebene Verhältniß

von

von EB zu AE hat, gleich seyn dem gegebenen Rchtk BAF. Denn, man ziehe EC, FC; weil nun nach der Verzeichnung das Rchtk BEF gleich ist dem Quadrat über EG, d. i. dem Quadrat über EC; so berührt die gerade Linie EC den um das Dreyek BCF beschriebenen Kreis (37, 3. E.). Und, weil der Punkt A ausserhalb des Kreises, und zwar nicht auf derselben Seite der Berührungs-Linie EC liegt, auf welcher der Kreis ist; so muß AC nach C hin verlängert dem Kreis noch in einem Punkt begegnen. Sie begegne ihm in D, und man ziehe BD; so ist folglich das Rchtk CAD gleich dem Rchtk BAF. Es ist aber das Rchtek CAD gleich der Summe des Quadrats über AC, und des Rechteks ACD. Folglich muß jezt nur noch bewiesen werden, daß das Rchtk ACD sich zu dem Quadrat über BC verhalte, wie AE zu EB. Und diß ist wirklich so, denn weil die Punkte B, D, C, F auf dem Umfang eines Kreises liegen: so ist der Winkel BDC gleich dem Winkel (EFC, d. i. wegen der gleichwinklichten Dreyeke BEC, CEF gleich dem Winkel) BCE. Also verhält sich nach dem 3ten Lehnsaz das Rchtk ACD zu dem Quadrat über BC, wie AE zu EB.

Nun muß eben dieses auch noch von den Punkten erwiesen werden, in welchen der Ort der geraden Linie AB begegnet, d. i. wenn (Fig. 58. e.) AE zu EB das gegebene Verhältniß, das Rechtek BAF der gegebene Raum, und EG die mittlere Proportional-Linie zwischen EB und EF ist; so muß bewiesen werden, daß derjenige Raum, welcher mit dem Quadrat über AG zusammen genommen gleich ist dem Rechtek BAF, daß, sage ich, dieser Raum sich zu dem Quadrat über BG verhalte, wie AE zu EB. Man nehme GH = GB, weil nun die Linien EF, EG, EB proportional sind; so ist [in der 1sten Linie Fig. 58. e. nach 19, 5. E. und getheilt (dividendo), in der 2ten nach 19, 5. E. und

ver-

kehrt getheilt (dividendo inverſe), in der 3ten und
n nach 12, 5. E. und zuſammen geſezt (componen-
)] HF: BG = BG: EB. Alſo iſt das Quadrat über
i gleich dem Rechtek EB×HF. Und, weil BG
H; ſo iſt in den Fällen, in welchen der Punkt H
iſchen A und F fällt, das Rchtk BAF gleich (der
umme der Rechteke BAH und AB×HF, d. i. gleich
r Summe der Rechteke BAH, EB×HF und EA×HF;
i. gleich der Summe der Rechteke BAH, EA×HF,
d des Quadrats über BG; d. i. 6, 2. E.) der Sum-
e des Quadrats über AG und des Rechteks EA×HF.
n den Fällen aber, in welchen der Punkt H auf der
erlängerung von FA nach der Seite von A hin liegt,
das Rechtek AB×HF gleich (der Summe der Rechte-
e AE×HF, und EB×HF; d. i. gleich) der Summe
s Rechteks AE×HF, und des Quadrats über BG.
dan nehme das gemeinſchaftliche Rechtek BAH hin-
eg; ſo iſt der Reſt auf der einen Seite, nemlich das
echtek BAF gleich dem Reſt auf der andern Seite, d. i.
eich der Summe des Rechteks AE×HF und des Qua-
ats über AG (5, 2. E.). Alſo iſt das Rechtek
E×HF derjenige Raum, der mit dem Quadrat über
G zuſammen genommen gleich iſt dem gegebenen
echtek BAF. Es verhält ſich aber das Rechtek
E×HF zu dem Quadrat über BG, d. i. zu dem
echtek EB×HF wie AE zu EB.

Uebrigens iſt dieſer Ort in dem Fall, wenn das
gebene Verhältniß das Verhältniß der Gleichheit iſt,
nerley mit dem 1ſten Fall des nächſt folgenden Orts
n 5ten Saz.

Berechnung.

Fig. 58.

Es ſeye der gegebene Raum = R; AB = a, und
r Raum, welcher mit dem Quadrat über AC zuſam-
men

men genommen gleich iſt dem gegebenen Raum, verhalte ſich zu dem Quadrat über BC, wie $\beta : 1$; ſo iſt $BA \times AF = \mathfrak{R}$, alſo $AF = \frac{\mathfrak{R}}{a}$, und $AE : BE = \beta : 1$, folglich $\left.\begin{matrix} AE+BE \\ AB \\ a \end{matrix}\right\} : BE = \beta + 1 : 1$, mithin iſt

$$BE = \frac{a}{\beta+1}; \; AE = \frac{\beta a}{\beta+1}; \; EF = AF - AE$$

$$= \frac{\mathfrak{R}}{a} - \frac{\beta a}{\beta+1} = \frac{(\beta+1)\,\mathfrak{R} - \beta a^2}{(\beta+1)\,a}, \text{ folglich}$$

$$EG = \sqrt{EB \times EF} = \frac{\sqrt{(\beta+1)\,\mathfrak{R} - \beta a^2}}{\beta+1}.$$

Iſt, wie im Anfang der Kompoſition angenommen wird, $\mathfrak{R} = a^2$; ſo wird $EG = EB = \frac{a}{\beta+1}$; iſt $\beta = 1$; ſo wird $AE = BE = \frac{a}{2}$ und $EG = \frac{1}{2}\sqrt{2\mathfrak{R} - a^2}$.

6. Lehnſatz.

Diß iſt bey Pappus der 22ſte Satz des 7ten

Man fälle das Perpendikel AE; ſo iſt $BE^2 + EC^2 : 2BD^2 + 2DE^2$ (9, oder 10, 2. E.). Nun iſt $AE^2 + 2DE^2 = 2AD^2$, und $BE^2 + EC^2 + 2AE^2 : AB^2 + AC^2$ (47, 1. E.). Mithin iſt $AB^2 + AC^2 : 2AD^2 + 2DB^2 = 2AD^2 + 2DC^2$.

7. Lehrſatz.

Fig. 60. 2.

Bey Pappus der 125ſte Saz ſeines 7ten Buches, ob ſein 7ter Lehrſaz.

Wenn auf einer geraden Linie AB zwey Punkte C, D genommen werden, von welchen C zwiſchen den Punkten A, B liegt: ſo iſt die Summe des Quadrats über AD und eines Raums, welcher ſich zu dem Quadrat über DB verhält, wie AC zu CB, gleich der Summe des Quadrats über AC, eines Raums, welcher ſich zu dem Quadrat über CB verhält, wie AC zu CB, und noch eines Raums, welcher ſich zu dem Quadrat über AD verhält, wie AB zu BC.

Man nehme FD: DB = AC: CB; ſo iſt zuſammengeſezt FB: DB = AB: BC, mithin auch der Reſt F: dem Reſt CD = AB: BC, d. i. $AF \times CD : CD^2 = AB : BC$. Es iſt alſo das Rechtek FDB derjenige Raum, welcher ſich zu dem Quadrat über DB verhält, wie AC zu CB. Und, das Rechtek ACB iſt derjenige Raum, welcher ſich zu dem Quadrat über CB verhält, wie AC zu CB. Endlich das Rechtek $AF \times CD$ derjenige Raum, welcher ſich zu dem Quadrat über CD verhält, wie AB zu BC. Mithin iſt der Saz, der bewieſen werden ſolle, dieſer, die Summe des Quadrats über AD, und des Rechteks FDB ſeye gleich der Summe des Rechteks BAC und des Rechteks $AF \times CD$. Man nehme von beyden Seiten das Rechtek CAD hinweg; ſo iſt

alſo

also zu beweisen, daß der Rest, d. i. die Summe des Rechteks ADC und des Rechteks FDB gleich seye dem Rest auf der andern Seite, d. i. der Summe des Rechteks AC×DB und des Rechteks AF×CD. Man nehme auch noch das gemeinschaftliche Rechtek AF×CD hinweg; so muß also bewiesen werden, daß die Summe der Rechteke FDC und FDB, d. i. das Rechtek FD×CB gleich seye dem Rechtek AC×DB. Und diß ist nun wirklich so, weil die 4 Linien AC, CB, FD, DB unter sich proportional sind.

Diesen Beweis giebt Pappus selbst, und er dient für den Fall, wenn der Punkt D zwischen den Punkten C, B liegt; es kann aber D auch zwischen A, C, oder auf der Verlängerung von AB nach jeder Seite hin liegen. Diese vier Fälle nun würden, wenn man die Beweisart des Pappus bey dem ersten Fall auf alle anwenden wollte, vier verschiedene Beweise erfodern; man kann aber auf folgende Art für alle einerley Beweis brauchen.

Anderer und allgemeiner Beweis des vorhergehenden 7ten Lehnsazes.

Fig. 60. b. c. d. e.

Man beschreibe über AB einen Halbkreis, und errichte senkrecht auf AB die Linie CE, die dem Halbkreis in E begegne, man ziehe ferner die Linien AE, BE, und an BE ziehe man DF mit CE gleichlauffend, endlich ziehe man noch AF. Es ist also das Quadrat über DF derjenige Raum, der sich zum Quadrat über DB verhält wie (das Quadrat über EC zu dem Quadrat über CB, d. i. wie) AC zu CB. Und das Rechtek ACB ist derjenige Raum, der sich zum Quadrat über CB verhält, wie AC zu CB.

Endlich

Endlich iſt das Quadrat über EF derjenige Raum, r ſich zum Quadrat über DC verhält, wie (das Qua- at über EB zu dem Quadrat über CB, d. i. wie) AB BC. Mithin muß bewieſen werden, daß die Summe r Quadrate über AD, und DF gleich ſeye der Summe s Quadrats über AC, des Rechteks ACB und des uadrats über EF, d. i. der Summe der Quadrate er AE, und EF. Und, daß diß wirklich ſo ſeye, er- llet leicht daraus, weil das Quadrat über AF ſo wohl r Summe der Quadrate über AD, DF, als auch der Summe der Quadrate über AE, EF gleich iſt.

8. Lehnſaz.

Bey Pappus der 126ſte Saz ſeines 7ten Buchs, nd ſein 8ter Lehnſaz.

Fig. 61.

Wenn auf einer der Lage und Gröſſe nach gegebe- en geraden Linie AB ein Punkt C nach Belieben ge- ommen wird; ſo wird auf dieſer Linie AB ein Punkt egeben ſeyn, ſo, daß die Summe des Quadrats über C, und eines Raums, der zu dem Quadrat über BC in gegebenes Verhältniß hat, gleich iſt der Summe ei- es gegebenen Raums, und eines Raums, der zu dem Quadrat über der zwiſchen dem gegebenen Punkt und em Punkt C abgeſchnittenen geraden Linie ein gegebe- es Verhältniß hat.

Denn man nehme das Verhältniß von AD zu DB leich dem gegebenen Verhältniß; ſo iſt folglich das Verhältniß von AD zu DB, mithin der Punkt D gege- en. Weil alſo auf der geraden Linie AB zwey Punkte D, C genommen ſind, ſo iſt nach dem vorhergehenden ehnſaz die Summe des Quadrats über AC und eines

Raums, der zu dem Quadrat über CB das gegebene Verhältniß von AD zu DB hat, gleich der Summe des Quadrats über AD, eines Raums, der sich zum Quadrat über DB verhält, wie AD zu DB, und eines Raums, der zu dem Quadrat über DC das gegebene Verhältniß von AB zu BD hat, d. i. gleich der Summe des gegebenen Rechteks BAD, und eines Raums, der zu dem Quadrat über DC das Verhältniß von AB zu BD hat, welches gegeben ist.

9. Lehnsaz.

Fig. 62. a.

Wenn eine gerade Linie AB der Lage und Grösse nach gegeben ist; so wird ein Punkt gegeben seyn, der sie in 2 Stüke theilt, welche zu einer gegebenen geraden Linie gegebene Verhältnisse haben.

Es seye so, nemlich es seye C der Punkt, und CE die gerade Linie; so ist, nach der Vorausseszung das Verhältniß von AC zu CE, und auch das Verhältniß von CB zu CE gegeben, mithin ist (9. D.) das Verhältniß von AC zu CB, also (7. D.) das Verhältniß von AB zu AC gegeben. Nun ist AB der Lage und Grösse nach gegeben, mithin auch AC, und der Punkt C; und, weil das Verhältniß von AC zu CE gegeben ist, so ist auch CE gegeben.

Kompoſition.

Es seye das gegebene Verhältniß, welches AC zu CE haben soll, gleich dem Verhältniß von R zu T; und das gegebene Verhältniß, welches CB zu CE haben soll, gleich dem Verhältniß von S zu T. Man theile die gerade Linie AB in dem Punkt C so, daß sich AC zu CB ver-

hält, wie R zu S, und nehme CE so, daß sich CB CE verhält, wie S zu T; so ist folglich, gleichför- g, AC: CE = R: T.

Fig. 62. b. c.

Zus. Und völlig auf die nemliche Art kann auf r nach beyden Seiten verlängerten Linie AB ein Punkt funden werden, so, daß die zwischen ihm und den ndpunkten von AB abgeschnittenen Stüke die gegebe- n Verhältnisse von R zu T, und von S zu T haben. st das Verhältniß von R zu S, d. i. von AC zu CB s Verhältniß des Grössern zum Kleinern; so muß der nkt C auf der nach B hin verlängerten Linie AB; ist aber das Verhältniß des Kleinern zum Grössern; so ß der Punkt C auf der nach A hin verlängerten Linie genommen werden.

(Diese lezte Bemerkung Simsons lehrt zugleich, für diesen Fall, wenn der Punkt C auf der Verlän- ung von AB genommen werden soll, das Verhältniß R zu S nicht das Verhältniß der Gleichheit seyn f. Und wirklich, weil AC: CB = R: S genommen rden soll; so muß in diesem Fall entweder AC — CB r CB — CA, d. h. immer AB zu CB in dem Ver- ltniß seyn, wie R — S zu S. Nun findet aber zwi- en R — S und S kein Verhältniß statt, wenn R = S (4. Def. 5. E.), mithin auch nicht zwischen AB, d CB. Der Punkt C würde in eine unendliche ntfernung von B fallen, d. h. es giebt in diesem ll keinen solchen Punkt C. Diese Bemerkung in der Folge nicht unwichtig. Anmerkung des berf.)

10. Lehnſaz.

Fig. 63. a.

Wenn in einem Dreyek ABC aus dem Scheitel an die Grundlinie AB irgend eine gerade Linie DC gezogen wird, und wenn DE irgend eine gerade Linie iſt; ſo iſt die Summe eines Raums, der ſich zum Quadrat über AC verhält, wie BD zu DE, und eines Raums, der ſich zum Quadrat über BC verhält, wie AD zu DE gleich der Summe eines Raums, der ſich zum Quadrat über AD verhält, wie BD zu DE, und eines Raums, der ſich zum Quadrat über DB verhält, wie AD zu DE, und noch eines Raums, der ſich zum Quadrat über DC verhält, wie AB zu DE.

Man nehme FC: CA = BD: DE, und GC: CB = AD: DE, und ergänze die Prllgrmme DHFK, DLGM, und auf AB fälle man das Perpendikel CN. Es iſt alſo das Rechtek FCA derjenige Raum, der ſich zum Quadrat über AC verhält, wie (FC zu CA, d. i. wie) BD zu DE; und das Rechtek GCB iſt derjenige Raum, der ſich zum Quadrat über CB verhält wie (GC zu CB, d. i. wie) AD zu DE. Ferner iſt das Rechtek HDA derjenige Raum, der ſich zu dem Quadrat über AD verhält, wie (HD zu AD, d. i. wie FC zu CA, d. i. wie) BD zu DE; und das Rechtek LDB iſt derjenige Raum, der ſich zum Quadrat über DB verhält wie (LD zu DB, d. i. wie GC zu CB, d. i. wie) AD zu DE. Und, weil ſich das Rechtek KCD zu dem Quadrat über CD verhält wie (KC zu CD, d. i. wie CF zu CA, d. i. wie) BD: DE; und das Rechtek MCD ſich zu dem Quadrat über CD verhält, wie (MC zu CD, d. i. wie GC zu BC, d. i wie) AD zu DE; ſo verhält ſich (24, 5. E.) die Summe der Rechteke KCD und MCD zu dem Quadrat über CD, wie AB zu DE. Der Saz,

den wir zu beweiſen hätten, wäre alſo dieſer, daß die Summe der Rechteke FCA, GCB gleich ſeye der Summe der Rechteke HDA, LDB, KCD und MCD. Weil LD : DB = AD : DE; ſo iſt verwechſelt LD : DA = (DB : DE, d. i. = FC : CA =) DH : DA; mithin iſt LD = DH. Und, wegen der Parallelen iſt $FC \times CA : CA^2 = HD \times DA : DA^2 = KC \times CD : DC^2 = 2\,HD \times DN : 2\,AD \times DN$. Folglich iſt (12, 5. E.) $FC \times CA : AC^2 = (HD \times DA + KC \times CD + 2\,HD \times DN) : (AD^2 + DC^2 + 2\,AD \times DN)$. Es iſt aber (12, 2. E.) $AC^2 = AD^2 + DC^2 + 2\,AD \times DN$. Mithin iſt $FC \times CA = HD \times DA + KC \times CD + 2\,HD \times DN$. Und, da (13, 2. E.) $BC^2 + 2\,BD \times DN = BD^2 + DC^2$; ſo wird auf ähnliche Art, wie vorhin bewieſen, daß $GC \times CB + 2\,LD \times DN = LD \times DB + MC \times CD$. Mithin iſt $FC \times CA + GC \times CB + 2\,LD \times DN = HD \times DA + KC \times CD + LD \times DB + MC \times CD + 2\,HD \times DN$. Es iſt aber $2\,LD \times DN = 2\,HD \times DN$. Folglich bleibt, dieſe gleichen Rechteke von beyden Seiten hinweg genommen, $FC \times CA + GC \times CB = HD \times DA + LD \times DB + KC \times CD + MC \times CD$.

Wenn ſo wohl BD : DE, als AD : DE das Verhältniß der Gleichheit iſt; ſo iſt dieſer Lehnſaz einerley mit dem vorhergehenden 6ten Lehnſaz: iſt aber nur eines dieſer Verhältniſſe, z. B. BD : DE das Verhältniß der Gleichheit; ſo kann der Saz in dieſem Fall ſo ausgedrukt, und bewieſen werden:

Fig. 63. b.

Wenn aus dem Scheitel-Punkt C eines Dreyeks ABC an die Grundlinie eine gerade Linie CD gezogen wird; ſo wird die Summe des Quadrats über AC und eines Raums, der ſich zum Quadrat über BC verhält, wie AD zu DB, gleich ſeyn der Summe des Quadrats über AD, eines Raums, der ſich zum Quadrat über

DB verhält, wie AD zu DB, und noch eines Raums, der ſich zum Quadrat über DC verhält, wie AB zu BD, d. i. jene erſtere Summe wird gleich ſeyn der Summe des Rechteks BAD und eines Raums, der ſich zum Quadrat über DC verhält, wie AB zu BD. Denn, man fälle auf AB das Perpendikel CN, und nehme GC: CB = AD: DB, und ergänze das Prllgrm. DLGM; ſo iſt LD: DB = AD: DB, mithin AD = DL. Und das Rechtek GCB iſt derjenige Raum, der ſich zum Quadrat über BC verhält, wie (GC zu CB, d. i. wie) AD zu DB. Ferner iſt das Rechtek LDB oder ADB derjenige Raum, der ſich zum Quadrat über DB verhält, wie AD zu DB. Und, weil ſich das Rechtek MCD zu dem Quadrat über CD verhält, wie (MC zu CD, d. i. wie GC zu CB, d. i. wie) AD zu DB; ſo iſt zuſammen geſezt die Summe des Quadrats über CD und des Rechteks MCD zu dem Quadrat über CD in dem Verhältniß von AB zu BD. Mithin muß bewieſen werden, daß die Summe des Quadrats über AC und des Rechteks GCB gleich ſeye der Summe des Quadrats über AD, des Rechteks ADB, des Quadrats über CD, und des Rechteks MCD. Weil wegen der Parallelen $GC \times CB : CB^2 = 2\,LD \times DN : 2\,BD \times DN = \left\{\begin{matrix} LD \times DB \\ AD \times DB \end{matrix}\right. : DB^2 = MC \times CD : CD^2$; und, weil (13, 2. E.) $CB^2 + 2\,BD \times DN = BD^2 + DC^2$; ſo iſt (nach dem 2ten Lehnſ. unſers Iſten Buchs) $GC \times CB + 2\,LD \times DN = AD \times DB + MC \times CD$. Es iſt aber (12, 2. E.) $AC^2 = AD^2 + DC^2 + 2\,AD \times DN$. Mithin iſt, auf beyden Seiten gleiches hinzu geſezt, $AC^2 + GC \times CB + 2\,LD \times DN = AD^2 + DC^2 + 2\,AD \times DN + AD \times DB + MC \times CD$. Und, weil $2\,LD \times DN = 2\,AD \times DN$; ſo iſt, dieſe gleichen Rechteke von beyden Seiten hinweg genommen, der Reſt, d. i. $AC^2 + GC \times CB =$ dem Reſt auf der andern Seite, d. i.

$= AD^2$

$= AD^2 + AD \times DB + DC^2 + MC \times CD$, d. i.
$= BA \times AD + DC^2 + MC \times CD$.

Fig. 63. a.

Zuſ. Wenn alſo AB der Lage und Gröſſe nach gegeben iſt, und wenn auch das Verhältniß des Rechteks FCA zu dem Quadrat über AC, und des Rechteks GCB zu dem Quadrat über BC gegeben iſt; ſo iſt (9. Lehnſ.) der Punkt D und die gerade Linie DE gegeben, welche von der Beſchaffenheit ſind, daß das Verhältniß von AD zu DE gleich iſt dem gegebenen Verhältniß des Rechteks GCB zu dem Quadrat über BC; und das Verhältniß von BD zu DE gleich dem gegebenen Verhältniß des Rechteks FCA zu dem Quadrat über AC. Es ſind alſo die geraden Linien AD, DB gegeben, mithin auch ihre Quadrate, folglich auch die Rechteke HDA, LDB, welche zu dieſen Quadraten gegebene Verhältniſſe haben. Alſo iſt die Summe der Rechteke FCA, GCB, d. i. der Räume, welche zu den Quadraten über AC, BC gegebene Verhältniſſe haben, gleich der Summe eines gegebenen Raums (d. i. den beyden Rechteken HDA, LDB) und desjenigen Raums (d. i. der beyden Rechteke KCD, MCD), welcher zu dem Quadrat über DC das gegebene Verhältniß von AB zu DE hat.

5. Saz.

Fig. 64.

Wenn aus einer beliebigen Anzahl gegebener Punkte an einen Punkt hin gerade Linien gezogen werden, und die Summe der über dieſen geraden Linien beſchriebenen der Gattung nach gegebenen Figuren gleich iſt einem gegebenen Raum; ſo berührt ihr gemeinſchaft-

DB verhält, wie AD zu DB, und noch eines Raums, der ſich zum Quadrat über DC verhält, wie AB zu BD, d. i. jene erſtere Summe wird gleich ſeyn der Summe des Rechteks BAD und eines Raums, der ſich zum Quadrat über DC verhält, wie AB zu BD. Denn, man fälle auf AB das Perpendikel CN, und nehme GC: CB = AD: DB, und ergänze das Prllgrm. DLGM; ſo iſt LD: DB = AD: DB, mithin AD = DL. Und das Rechtek GCB iſt derjenige Raum, der ſich zum Quadrat über BC verhält, wie (GC zu CB, d. i. wie) AD zu DB. Ferner iſt das Rechtek LDB oder ADB derjenige Raum, der ſich zum Quadrat über DB verhält, wie AD zu DB. Und, weil ſich das Rechtek MCD zu dem Quadrat über CD verhält, wie (MC zu CD, d. i. wie GC zu CB, d. i. wie) AD zu DB; ſo iſt zuſammen geſezt die Summe des Quadrats über CD und des Rechteks MCD zu dem Quadrat über CD in dem Verhältniß von AB zu BD. Mithin muß bewieſen werden, daß die Summe des Quadrats über AC und des Rechteks GCB gleich ſeye der Summe des Quadrats über AD, des Rechteks ADB, des Quadrats über CD, und des Rechteks MCD. Weil wegen der Parallelen $GC \times CB : CB^2 = 2\,LD \times DN : 2\,BD \times DN = \left\{\begin{matrix} LD \times DB \\ AD \times DB \end{matrix}\right. : DB^2 = MC \times CD : CD^2$; und, weil (13, 2. E.) $CB^2 + 2\,BD \times DN = BD^2 + DC^2$; ſo iſt (nach dem 2ten Lehnſ. unſers Iſten Buchs) $GC \times CB + 2\,LD \times DN = AD \times DB + MC \times CD$. Es iſt aber (12, 2. E.) $AC^2 = AD^2 + DC^2 + 2\,AD \times DN$. Mithin iſt, auf beyden Seiten gleiches hinzu geſezt, $AC^2 + GC \times CB + 2\,LD \times DN = AD^2 + DC^2 + 2\,AD \times DN + AD \times DB + MC \times CD$. Und, weil $2\,LD \times DN = 2\,AD \times DN$; ſo iſt, dieſe gleichen Rechteke von beyden Seiten hinweg genommen, der Reſt, d. i. $AC^2 + GC \times CB =$ dem Reſt auf der andern Seite, d. i.

$= AD^2$

$= AD^2 + AD \times DB + DC^2 + MC \times CD$, d. i.
$= BA \times AD + DC^2 + MC \times CD$.

Fig. 63. a.

Zuſ. Wenn alſo AB der Lage und Gröſſe nach ge-
eben iſt, und wenn auch das Verhältniß des Rechteks
CA zu dem Quadrat über AC, und des Rechteks GCB
dem Quadrat über BC gegeben iſt; ſo iſt (9. Lehnſ.)
r Punkt D und die gerade Linie DE gegeben, welche
n der Beſchaffenheit ſind, daß das Verhältniß von
D zu DE gleich iſt dem gegebenen Verhältniß des
echteks GCB zu dem Quadrat über BC; und das Ver-
ältniß von BD zu DE gleich dem gegebenen Verhältniß
s Rechteks FCA zu dem Quadrat über AC. Es ſind
ſo die geraden Linien AD, DB gegeben, mithin auch
re Quadrate, folglich auch die Rechteke HDA, LDB,
elche zu dieſen Quadraten gegebene Verhältniſſe haben.
lſo iſt die Summe der Rechteke FCA, GCB, d. i. der
äume, welche zu den Quadraten über AC, BC gege-
ne Verhältniſſe haben, gleich der Summe eines gege-
nen Raums (d. i. den beyden Rechteken HDA, LDB)
nd desjenigen Raums (d. i. der beyden Rechteke KCD,
CD), welcher zu dem Quadrat über DC das gegebene
erhältniß von AB zu DE hat.

5. Satz.

Fig. 64.

Wenn aus einer beliebigen Anzahl gegebener
unkte an einen Punkt hin gerade Linien gezogen wer-
n, und die Summe der über dieſen geraden Linien be-
riebenen der Gattung nach gegebenen Figuren gleich
einem gegebenen Raum; ſo berührt ihr gemeinſchaft-

licher Durchschnitts-Punkt einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

I. Fall. Wenn zwey Punkte gegeben sind.

1. Es seyen die über den geraden Linien beschriebenen Figuren Quadrate.

Fig. 64. a. b.

Wenn aus zwey gegebenen Punkten A, B an einen Punkt C hin die geraden Linien AC, BC gezogen werden, und die Summe der über diesen Linien beschriebenen Quadrate gleich ist einem gegebenen Raum; so berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Denn man ziehe die Linie AB, und theile sie in D in zwey gleiche Theile; so ist folglich der Punkt D gegeben. Man ziehe DC; so ist (6. Lehns.) die Summe der Quadrate über AC und BC gleich der doppelten Summe der Quadrate über CD und DA; es ist aber die Summe der Quadrate über AC und BC gegeben, mithin ist die Summe der Quadrate über AD und DC gegeben; es ist aber AD, also auch das Quadrat über AD, folglich auch das Quadrat über DC, mithin DC selbst der Grösse nach gegeben; und, weil der Punkt D gegeben ist, so berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem 1sten Saz unsers 1sten Buchs.

Komposition.

Weil man das doppelte Quadrat über AD, d. i. das Rechtek BAD von dem gegebenen Raum weg nehmen muß; so muß der gegebene Raum grösser seyn, als das Rechtek BAD. Es seye also der gegebene Raum gleich der Summe des Rechteks BAD und des doppelten Quadrats über DE; und man beschreibe aus dem

Mit-

Mittelpunkt D mit dem Halbmeſſer DE einen Kreis: ſo wird deſſen Umfang der geſuchte Ort ſeyn, d. i. wenn man an irgend einen Punkt C deſſelben aus den Punkten A, B die geraden Linien AC, BC zieht; ſo wird die Summe der über dieſen Linien beſchriebenen Quadrate gleich ſeyn der doppelten Summe der Quadrate über AD und DE, welches, wenn man noch die Linie DC zieht, aus dem 6ten Lehnſaz erhellet. Von den Punkten E aber, in welchen der Ort der geraden Linie AB begegnet, erhellt es aus 9, oder 10, 2. E., denn die Summe der Quadrate über AE, EB iſt gleich der doppelten Summe der Quadrate über AD, DE.

2. Wenn die eine der über den geraden Linien beſchriebenen Figuren ein Quadrat iſt, die andere aber nicht.

Fig. 64. c.

Aus den gegebenen Punkten A, B ſeyen an einen Punkt C hin die geraden Linien AC, BC gezogen, und es ſeye die Summe des Quadrats über AC und einer der Gattung nach gegebenen über BC beſchriebenen Figur gleich einem gegebenen Raum: ſo berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis. Denn man ziehe AB, und die über BC beſchriebene Figur heiſſe b, weil nun dieſe der Gattung nach gegeben iſt; ſo iſt (53. D.) ihr Verhältniß zu dem Quadrat über BC gegeben. Man theile die Linie AB in dem Punkt D ſo, daß das Verhältniß von AD zu DB gleich ſeye dem Verhältniß der Figur b zu dem Quadrat über BC; ſo iſt nach dem lezten Fall des 10ten Lehnſazes die Summe des Quadrats über AC, und der Figur b gleich der Summe des Rechteks BAD, und eines Raums, der zum Quadrat über DC das Verhältniß von AB zu BD, d. i. ein gegebenes Verhältniß hat. Dieſer Raum heiſſe c. Nun

iſt nach der Vorausſezung die Summe des Quadrats über AC und der Figur b gegeben, mithin iſt die Summe des Rechteks BAD und der Figur c gegeben. Und, weil das Rechtek BAD gegeben iſt, ſo iſt die Figur c gegeben. Es iſt aber auch ihr Verhältniß zum Quadrat über DC gegeben, mithin iſt das Quadrat über DC, folglich DC ſelbſt der Gröſſe nach gegeben; und, weil der Punkt D gegeben iſt, ſo berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem 1ſten Saz unſers 1ſten Buchs.

Kompoſition.

Man nehme irgend eine gerade Linie EF, und beſchreibe über derſelben eine Figur G, welcher die über BC zu beſchreibende Figur ähnlich ſeyn ſoll; und es ſeye EF die mit der Seite BC ähnlich liegende (homologe) Seite dieſer Figur. Man ziehe ferner die Linie AB, und theile ſie in D ſo, daß das Verhältniß von AD zu DB gleich ſeye dem Verhältniß der Figur G zu dem Quadrat über EF. Ueber EF beſchreibe man das Quadrat H. Weil nun G : H = AD : DB, ſo iſt, zuſammen geſezt, G + H : H = AB : DB. Der gegebene Raum, dem die Summe des Quadrats über AC und der Figur über BC gleich ſeyn ſoll, ſeye M; ſo muß, wie man aus der Analyſe ſieht, M gröſſer ſeyn, als das Rechtek BAD. Es ſeye alſo M gleich der Summe des Rechteks BAD und des Raums N, und man finde (25, 6. E.) eine Figur c, die dem Raum N gleich, und der aus G und H zuſammen geſezten Figur ähnlich ſeye. Auf der geraden Linie DA ſchneide man aus dem Punkt D eine Linie DK ab gleich derjenigen Seite der Figur c, welche mit EF ähnlich liegend iſt, und aus dem Mittelpunkt D mit dem Halbmeſſer DK beſchreibe man einen Kreis; ſo wird deſſen Umfang der geſuchte Ort ſeyn, d. i.

wenn

wenn man an irgend einen Punkt C deſſelben die geraden Linien AC, BC zieht; ſo wird die Summe des Quadrats über AC und einer Figur b, welche der Figur G ähnlich über BC beſchrieben wird, gleich ſeyn dem gegebenen Raum M. Denn man ziehe DC, weil nun die über DK oder DC beſchriebene Figur ähnlich iſt der aus G und H zuſammengeſezten Figur, und weil DC, EF ähnlich liegende Seiten dieſer ähnlichen Figuren ſind; ſo iſt $c : DC^2 = (G+H : \begin{cases} H \\ EF^2 \end{cases}$, d. i. $=)$ AB : BD. Und, weil die Figuren b und G ähnlich ſind; ſo iſt $b : BC^2 = (G : EF^2 =)$ AD : BD. Alſo iſt nach dem lezten Fall des 10ten Lehnſ. die Summe des Quadrats über AC und der Figur b gleich der Summe des Rechteks BAD und der Figur c (oder N), d. i. gleich dem gegebenen Raum M.

Unſer gegenwärtiger Saz iſt in dieſem 2ten beſondern Fall des Iſten Haupt-Falls einerley mit dem Saz A dieſes IIten Buchs. Denn es iſt die Summe des Quadrats über AC und einer der Gattung nach gegebenen über BC beſchriebenen Figur, d. i. die Summe des Quadrats über AC und eines Raums, welcher zu dem Quadrat über BC ein gegebenes Verhältniß hat, gegeben. Er kommt aber hier zum zweitenmahl vor, weil er ein beſonderer Fall dieſes 5ten Sazes iſt, und mit den übrigen Fällen einen ähnlichen Beweis hat.

3. Wenn keine der Figuren ein Quadrat iſt.

Fig. 64. d.

Es ſeyen aus den zwey gegebenen Punkten A, B an einen Punkt C hin die geraden Linien AC, BC gezogen, und die Summe der über dieſen Linien beſchriebenen der Gattung nach gegebenen Figuren ſeye gleich einem

Kompoſition.

Ueber einerley geraden Linie GH ſeyen zwey Figuren K, L beſchrieben, und K ſeye diejenige, welcher die über AC zu beſchreibende Figur ähnlich ſeyn ſoll, L diejenige, welcher die über BC zu beſchreibende Figur ähnlich ſeyn ſoll; in beyden Figuren K, L aber ſeye die Seite GH mit den Seiten AC, BC der ähnlichen Figuren ähnlich liegend. Und, nach dem 9ten Lehnſ. theile man AB in D, und finde die Linie DE, ſo, daß BD zu DE das Verhältniß der Figur K zu dem Quadrat über GH, und AD zu DE das Verhältniß der Figur L zu dem Quadrat über derſelben Linie GH habe; ſo wird (24, 5. E.) die aus K und L zuſammen geſezte Figur ſich zu dem Quadrat über GH verhalten, wie AB zu DE. Ferner ſeye über AD eine der Figur K ähnliche Figur d, und über BD eine der Figur L ähnliche Figur e beſchrieben. Und der gegebene Raum, dem die Summe der Figuren über AC, BC gleich ſeyn ſoll, ſeye M; ſo muß, wie man aus der Analyſe weiß, M gröſſer ſeyn, als die Summe von d und e. Es ſeye alſo M gleich der Summe von d, e, und einem Raum N; und man finde (25, 6. E.) eine Figur f, die dem Raum N gleich, und der aus K, L zuſammen geſezten Figur ähnlich ſeye, DO ſeye gleich derjenigen Seite der Figur f, die mit GH ähnlich liegend iſt; und man beſchreibe aus dem Mittelpunkt D mit dem Halbmeſſer DO einen Kreis: ſo wird deſſen Umfang der geſuchte Ort ſeyn, d. i. wenn man an irgend einen Punkt C deſſelben die geraden Linien AC, BC zieht; ſo wird die Summe einer über AC beſchriebenen Figur a, welche der Figur K ähnlich iſt, und einer über BC beſchriebenen Figur b, welche der Figur L ähnlich iſt, gleich ſeyn dem gegebenen Raum M. Denn man ziehe DC; weil nun die über DO oder DC beſchriebene Figur f ähnlich iſt der aus K

und

und L zuſammen geſezten Figur; ſo verhält ſich f zu dem Quadrat über DC, wie (die Summe von K und L zu dem Quadrat über GH, d. i. wie) AB zu DE; mithin iſt nach dem 10ten Lehnſ. die Summe der Figuren a und b gleich der Summe der Figuren d, e, und f, d. i. gleich der Summe der Figuren d, e, und N, d. i. nach der Verzeichnung gleich dem gegebenen Raum M.

Wenn die Figuren a, b ähnlich ſind, d. i. wenn ſich a zu dem Quadrat über AC verhält, wie b zu dem Quadrat über BC; ſo kann man den Ort auf den Fall zurük bringen, in welchem die der Gattung nach gegebenen Figuren Quadrate ſind. Denn es hat (12, 5. E.) die Summe der Figuren a und b zu der Summe der Quadrate über AC, BC, das Verhältniß von a zu dem Quadrat über AC, d. i. ein gegebenes Verhältniß; und nach der Vorausſezung iſt die Summe von a und b gleich einem gegebenen Raum, mithin iſt die Summe der Quadrate über AC und BC gegeben. Alſo berührt der Punkt C nach nro. 1. dieſes Iſten Falls einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Und man findet den Raum, dem die Summe der Quadrate über AC, BC gleich iſt, wenn man einen Raum N nimmt, der ſich zu dem gegebenen Raum M verhält, wie das Quadrat über AC zu der Figur a; denn ſo iſt, wie man leicht ſieht, der Raum N gleich der Summe der Quadrate über AC, BC.

II. Fall. Wenn 3 Punkte gegeben ſind.

1. Wenn die über den geraden Linien beſchriebenen Figuren Quadrate ſind.

Fig. 64. e.

Es ſeyen aus den drey gegebenen Punkten A, B, C an einen Punkt D hin die geraden Linien AD, BD, CD gezogen, und die Summe aller über dieſen Linien beſchrie-

)riebenen Quadrate ſeye gleich einem gegebenen Raum: berührt der Punkt D einen der Lage nach gegebenen nkreis.

Man ziehe die Linie DE, welche AB in 2 gleiche heile theilt; ſo iſt nach dem 6ten Lehnſ. die Summe r Quadrate über AD, BD gleich dem Rechtek BAE d dem doppelt genommenen Quadrat über ED; alſo die Summe der 3 Quadrate über AD, BD, CD gleich r Summe des Rechteks BAE, des doppelt genomme- n Quadrats über ED, und des Quadrats über CD, i. wenn man die Linie EC zieht, und auf dieſelbe das erpendikel DF fällt, die Summe jener 3 Quadrate iſt eich der Summe des Rechteks BAE, des Quadrats er CF, des doppelt genommenen Quadrats über FE, d des 3fach genommenen Quadrats über DF. Und, eil das Verhältniß des doppelt genommenen Quadrats er FE zu dem Quadrat über FE gegeben iſt; ſo iſt ach dem 8ten Lehnſ. auf der Linie EC ein Punkt (nemlich r Punkt, der ſie in G ſo theilt, daß CG doppelt ſo oß iſt, als GE) gegeben, ſo, daß die Summe des uadrats über CF und des doppelt genommenen Qua- ats über FE gleich iſt der Summe eines gegebenen aums, nemlich des Rechteks ECG, und eines aums, der ſich zum Quadrat über GF verhält, wie E zu EG, d. i. ſo, daß jene erſtere Summe gleich iſt r Summe des Rechteks ECG und des 3fach genom- enen Quadrats über GF. Man nehme alſo CG dop- elt ſo groß als GE; ſo iſt die Summe der 3 Quadrate ber AD, BD, CD gleich der Summe der gegebenen echteke BAE, ECG, und (der 3fach genommenen Sum- e der Quadrate über GF und FD, d. i.) des 3fach ge- ommenen Quadrats über GD. Alſo iſt die Summe r Rechteke BAE, ECG und des 3fach genommenen uadrats über GD gegeben; und, weil die Rechteke AE, ECG gegeben ſind; ſo iſt das 3fach genommene

Qua-

und L zuſammen geſezten Figur; ſo verhält ſich f zu dem Quadrat über DC, wie (die Summe von K und L zu dem Quadrat über GH, d. i. wie) AB zu DE; mithin iſt nach dem 1cten Lehnſ. die Summe der Figuren a und b gleich der Summe der Figuren d, e, und f, d. i. gleich der Summe der Figuren d, e, und N, d. i. nach der Verzeichnung gleich dem gegebenen Raum M.

Wenn die Figuren a, b ähnlich ſind, d. i. wenn ſich a zu dem Quadrat über AC verhält, wie b zu dem Quadrat über BC; ſo kann man den Ort auf den Fall zurük bringen, in welchem die der Gattung nach gegebenen Figuren Quadrate ſind. Denn es hat (12, 5. E.) die Summe der Figuren a und b zu der Summe der Quadrate über AC, BC, das Verhältniß von a zu dem Quadrat über AC, d. i. ein gegebenes Verhältniß; und nach der Vorausſezung iſt die Summe von a und b gleich einem gegebenen Raum, mithin iſt die Summe der Quadrate über AC und BC gegeben. Alſo berühret der Punkt C nach nro. 1. dieſes Iſten Falls einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Und man findet den Raum, dem die Summe der Quadrate über AC, BC gleich iſt, wenn man einen Raum N nimmt, der ſich zu dem gegebenen Raum M verhält, wie das Quadrat über AC zu der Figur a; denn ſo iſt, wie man leicht ſieht, der Raum N gleich der Summe der Quadrate über AC, BC.

II. Fall. Wenn 3 Punkte gegeben ſind.

1. Wenn die über den geraden Linien beſchriebenen Figuren Quadrate ſind.

Fig. 64. e.

Es ſeyen aus den drey gegebenen Punkten A, B, C an einen Punkt D hin die geraden Linien AD, BD, CD gezogen, und die Summe aller über dieſen Linien beſchrie-

ſchriebenen Quadrate ſeye gleich einem gegebenen Raum: ſo berührt der Punkt D einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Man ziehe die Linie DE, welche AB in 2 gleiche Theile theilt; ſo iſt nach dem 6ten Lehnſ. die Summe der Quadrate über AD, BD gleich dem Rechtek BAE und dem doppelt genommenen Quadrat über ED; alſo iſt die Summe der 3 Quadrate über AD, BD, CD gleich der Summe des Rechteks BAE, des doppelt genommenen Quadrats über ED, und des Quadrats über CD, d. i. wenn man die Linie EC zieht, und auf dieſelbe das Perpendikel DF fällt, die Summe jener 3 Quadrate iſt gleich der Summe des Rechteks BAE, des Quadrats über CF, des doppelt genommenen Quadrats über FE, und des 3fach genommenen Quadrats über DF. Und, weil das Verhältniß des doppelt genommenen Quadrats über FE zu dem Quadrat über FE gegeben iſt; ſo iſt nach dem 8ten Lehnſ. auf der Linie EC ein Punkt (nemlich der Punkt, der ſie in G ſo theilt, daß CG doppelt ſo groß iſt, als GE) gegeben, ſo, daß die Summe des Quadrats über CF und des doppelt genommenen Quadrats über FE gleich iſt der Summe eines gegebenen Raums, nemlich des Rechteks ECG, und eines Raums, der ſich zum Quadrat über GF verhält, wie CE zu EG, d. i. ſo, daß jene erſtere Summe gleich iſt der Summe des Rechteks ECG und des 3fach genommenen Quadrats über GF. Man nehme alſo CG doppelt ſo groß als GE; ſo iſt die Summe der 3 Quadrate über AD, BD, CD gleich der Summe der gegebenen Rechteke BAE, ECG, und (der 3fach genommenen Summe der Quadrate über GF und FD, d. i.) des 3fach genommenen Quadrats über GD. Alſo iſt die Summe der Rechteke BAE, ECG und des 3fach genommenen Quadrats über GD gegeben; und, weil die Rechteke BAE, ECG gegeben ſind; ſo iſt das 3fach genommene

Qua-

Quadrat über GD, mithin das Quadrat über GD selbst, folglich die gerade Linie GD gegeben, und, weil der Punkt G gegeben ist; so berührt der Punkt D einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Komposition.

Man verbinde zwey der gegebenen Punkte, welche man will, durch die gerade Linie AB, theile diese in E in zwey gleiche Theile, ziehe EC, und theile diese in G so, daß CG doppelt so groß seye, als GE. Und, weil die Rechteke BAE, ECG von dem gegebenen Raum weggenommen werden müssen; so muß dieser Raum grösser seyn, als die Summe dieser beyden Rechteke. Es seye also der gegebene Raum gleich der Summe der Rechteke BAE, ECG und des 3fach genommenen Quadrats über GH, und man beschreibe aus dem Mittelpunkt G mit dem Halbmesser GH einen Kreis: so wird dessen Umfang der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man aus den 3 gegebenen Punkten A, B, C an irgend einen Punkt D desselben die geraden Linien AD, BD, CD zieht; so wird die Summe der 3 über diesen Linien beschriebenen Quadrate gleich seyn dem gegebenen Raum, d. i. der Summe der Rechteke BAE, ECG und des 3fach genommenen Quadrats über GH. Denn man ziehe ED, DG und fälle auf EH das Perpendikel DF. Weil nun AB in E in zwey gleiche Theile getheilt ist; so ist nach dem 6ten Lehns. die Summe der Quadrate über BD, AD gleich der Summe des Rechteks BAE und des doppelt genommenen Quadrats über ED, d. i. gleich dem Rechtek BAE und der doppelt genommenen Summe der Quadrate über FE, FD; man seze das Quadrat über CD, oder die Summe der Quadrate über CF, FD hinzu; so ist die Summe der 3 Quadrate über CD, BD, AD gleich der Summe des Rechteks BAE, des Quadrats über

CF,

CF, des doppelt genommenen Quadrats über FE, und des 3fach genommenen Quadrats über FD. Nun ist nach dem 7ten Lehns. (weil nemlich CG doppelt so groß ist als GE) die Summe des Quadrats über CF und des doppelt genommenen Quadrats über FE gleich der Summe des Rechteks ECG und des 3fach genommenen Quadrats über GF. Also ist die Summe der 3 Quadrate über CD, BD, AD gleich der Summe der Rechteke BAE, ECG und (der 3fach genommenen Summe der Quadrate über GF, FD, d. i.) des 3fach genommenen Quadrats über GD oder GH, d. i. nach der Verzeichnung gleich dem gegebenen Raum.

2. Wenn zwey der Figuren Quadrate sind, die dritte aber nicht.

Fig. 64. f.

Aus den 3 gegebenen Punkten A, B, C seyen die Linien AD, BD, CD gezogen, und es seye die Summe des über AD beschriebenen Quadrats, einer über BD beschriebenen der Gattung nach gegebenen Figur, und des über CD beschriebenen Quadrats gleich einem gegebenen Raum: so berührt der Punkt D einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Man ziehe AB, und die Figur über BD heisse b; weil nun diese der Gattung nach gegeben ist; so ist (53. D.) ihr Verhältniß zu dem Quadrat über BD gegeben. Man theile AB in E so, daß AE zu EB sich verhalte, wie die Figur b zu dem Quadrat über BD, und ziehe ED. Also ist nach dem lezten Fall des 10ten Lehns. die Summe des Quadrats über AD und der Figur b gleich der Summe des Rechteks BAE und einer Figur, die zum Quadrat über ED das Verhältniß von AB zu BE, mithin ein gegebenes Verhältniß hat. Diese Figur seye c, und man seze noch auf beyden Seiten das Quadrat

über CD hinzu; so ist die Summe des Quadrats über AD, der Figur b, und des Quadrats über CD gleich der Summe des Rechteks BAE, der Figur c, und des Quadrats über CD. Man ziehe EC, und theile sie in F, so, daß sich CF zu FE verhalte, wie die Figur c zu dem Quadrat über ED, d. i. wie AB zu BE, und ziehe FD. Es ist also wieder nach dem lezten Fall des 10ten Lehns. die Summe des Quadrats über CD und der Figur c gleich der Summe des Rechteks ECF, und einer Figur d, die sich zum Quadrat über FD verhält, wie CE zu EF. Mithin ist die Summe des Quadrats über AD, der Figur b, und des Quadrats über CD gleich der Summe der Rechteke BAE, ECF und der Figur d. Nun ist die erste dieser Summen gegeben, mithin auch die zweyte. Es sind aber die Rechteke BAE, ECF gegeben, folglich auch die Figur d. Und, weil die Figur d zu dem Quadrat über FD das Verhältniß von CE zu EF, d. i. ein gegebenes Verhältniß hat; so ist das Quadrat über FD, mithin FD selbst gegeben, und, da der Punkt F gegeben ist; so berührt der Punkt D einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Kompositon.

Ueber irgend einer geraden Linie GH beschreibe man eine Figur K, welcher die über BD zu beschreibende Figur ähnlich seyn soll, und es seye GH die mit der Seite BD der ähnlichen Figur ähnlich liegende Seite; man ziehe ferner die gerade Linie AB, und theile sie in E, so, daß AE sich zu EB verhalte, wie K zu dem Quadrat über GH. Weiter ziehe man die gerade Linie EC, und theile sie in F so, daß sich CF zu FE verhalte wie AB zu BE. Der Raum, dem die Summe des Quadrats über AD, der über BD beschriebenen der Figur K ähnlichen Figur, und des Quadrats über CD gleich seyn

solle,

ſolle, ſeye M; ſo muß, wie man aus der Analyſe weiß, M gröſſer ſeyn, als die Summe der Rechteke BAE, ECF. Es ſeye alſo M gleich der Summe der Rechteke BAE, ECF, und der Figur d, und es verhalte ſich das Quadrat einer aus dem Punkt F abgeſchnittenen Linie FO zu der Figur d wie EF zu CE; und aus dem Mittelpunkt F mit dem Halbmeſſer FO beſchreibe man einen Kreis; ſo wird deſſen Umfang der geſuchte Ort ſeyn, d. i. wenn man an irgend einen Punkt D deſſelben die geraden Linien AD, BD, CD zieht, und über BD eine der Figur K ähnliche Figur b beſchreibt; ſo wird die Summe des Quadrats über AD, der Figur b, und des Quadrats über CD gleich ſeyn dem gegebenen Raum M. Denn man ziehe ED und FD; und es ſeye c eine Figur, die ſich zum Quadrat über ED verhält, wie CF zu FE, d. i. wie AB zu BE. Weil nun aus dem Scheitelpunkt D des Dreyeks CED die gerade Linie DF an die Grundlinie gezogen iſt, und die Figur d ſich zu dem Quadrat über FO oder FD verhält, wie CE zu EF; ſo iſt nach dem lezten Fall des 10ten Lehnſ. die Summe des Quadrats über CD und der Figur c, gleich der Summe des Rechteks ECF und der Figur d. Und, weil die Figuren b und K ähnlich ſind; ſo verhält ſich b zu dem Quadrat über BD wie (K zu dem Quadrat über GH, d. i. wie) AE zu EB. Es verhält ſich aber c zu dem Quadrat über ED, wie AB zu BE, weil alſo aus dem Scheitelpunkt D des Dreyeks ABD die Linie DE an die Grundlinie gezogen iſt; ſo iſt die Summe des Quadrats über AD und der Figur b gleich der Summe des Rechteks BAE und der Figur c; und, wenn man noch das gemeinſchaftliche Quadrat über CD hinzu ſezt; ſo iſt die Summe des Quadrats über AD, der Figur b, und des Quadrats über CD gleich der Summe des Rechteks BAE, der Figur c, und des Quadrats über CD, d. i. nach dem vorhergehenden gleich der Summe der Recht-

eke BAE, ECF und der Figur d, d. i. gleich dem gegebenen Raum.

Fig. 64. g.

3. Aus den 3 gegebenen Punkten A, B, C seyen die Linien AD, BD, CD gezogen, und es seye die Summe einer der Gattung nach gegebenen Figur über AD, einer der Gattung nach gegebenen Figur über BD und des Quadrats über CD gleich einem gegebenen Raum: so berührt der Punkt D einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Man ziehe AB, und die Figur über AD heisse a, die Figur über BD, b. Es ist also (53. D.) das Verhältniß von a zu dem Quadrat über AD, und das Verhältniß von b zu dem Quadrat über BD gegeben. Es kann folglich nach dem 9ten Lehns. auf der geraden Linie AB der Punkt E und die gerade Linie EF gefunden werden, so, daß sich BE zu EF verhält, wie a zu dem Quadrat über AD, und, AE zu EF, wie b zu dem Quadrat über BD. Es geschehe diß, und man ziehe ED; und die Figur c seye derjenige Raum, der sich zum Quadrat über AE verhält, wie BE zu EF, die Figur d derjenige Raum, der sich zum Quadrat über BE verhält, wie AE zu EF, endlich seye die Figur e derjenige Raum, der sich zum Quadrat über ED verhält, wie AB zu EF. Es ist also nach dem 10ten Lehns. die Summe der Figuren a, b, gleich der Summe der Figuren c, d, e. Mithin ist die Summe der Figuren a, b und des Quadrats über CD gleich der Summe der Figuren c, d, e und des Quadrats über CD. Man ziehe EC, und theile sie in dem Punkt G so, daß sich CG zu GE verhalte wie (AB zu EF, d. i. wie) die Figur e zu dem Quadrat über ED, man ziehe GD; und es seye die Figur f derjenige Raum, der sich zum Quadrat

drat über GD verhält, wie CE zu EG. Mithin ist nach dem lezten Fall des 10ten Lehns. die Summe des Quadrats über CD, und der Figur e gleich der Summe des Rechteks ECG und der Figur f. Es ist aber bewiesen worden, daß die Summe der Figuren a, b und des Quadrats über CD gleich seye der Summe der Figuren c, d, e und des Quadrats über CD; mithin ist die Summe der Figuren a, b und des Quadrats über CD gleich der Summe der Figuren c, d, des Rechteks ECG, und der Figur f. Nun ist, nach der Vorausseʒung jene erste Summe gleich einem gegebenen Raum, mithin auch die leztere. Und, weil die Figuren c, d, und das Rechtek ECG gegeben sind; so ist folglich die Figur f gegeben. Es hat aber f zu dem Quadrat über GD ein gegebenes Verhältniß, nemlich das Verhältniß von CE zu EG; mithin ist dieses Quadrat, also GD selbst der Grösse nach gegeben. Und, weil der Punkt G gegeben ist, so berührt der Punkt D einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Komposition.

Es seye H die Figur, welcher die über AD zu beschreibende Figur ähnlich seyn soll, und KL seye ihre mit AD ähnlich liegende Seite; M seye die Figur, welcher die über BD zu beschreibende Figur ähnlich werden soll, und NO seye ihre mit BD ähnlich liegende Seite. AB werde in dem Punkt E so getheilt, und die Linie EF so bestimmt, daß sich die Figur H zu dem Quadrat über KL verhalte, wie BE zu EF, und, daß sich die Figur M zu dem Quadrat über NO verhalte, wie AE zu EF. Man ziehe EC, und theile sie in dem Punkt G so, daß sich CG zu GE verhalte, wie AB zu EF. P seye der gegebene Raum, dem die Summe der Figuren über AD, BD und des Quadrats über CD gleich seyn soll. c

seye eine Figur, die sich zu dem Quadrat über AE verhält, wie BE zu EF, und d eine Figur, die sich zu dem Quadrat über BE verhält, wie AE zu EF; so muß mithin der Raum P grösser seyn, als die Summe der Figuren c, d, und des Rechteks ECG; es seye also P gleich der Summe der Figuren c. d, des Rechteks ECG, und der Figur f; man nehme wie CE zu EG, so f zu dem Quadrat einer von G aus abgeschnittenen Linie GQ, und aus dem Mittelpunkt G mit dem Halbmesser GQ beschreibe man einen Kreis; so wird dessen Umfang der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man an irgend einen Punkt D desselben die geraden Linien AD, BD, CD zieht, so wird die Summe der über AD beschriebenen der Figur H ähnlichen Figur a, und der über BD beschriebenen, der Figur M ähnlichen Figur b, und des Quadrats über CD gleich seyn dem gegebenen Raum P. Denn man ziehe ED, GD, und es seye e eine Figur, die sich zu dem Quadrat über ED verhält, wie CG zu GE, d. i. wie AB zu EF. Und, weil aus dem Scheitelpunkt des Dreyeks CED die Linie DG an die Grundlinie gezogen ist, und f sich zu dem Quadrat über GQ oder GD verhält, wie CE zu EG; so ist nach dem lezten Fall des 10ten Lehns. die Summe des Quadrats über CD und der Figur e gleich der Summe des Rechteks ECG und der Figur f. Und, weil aus dem Scheitelpunkt D des Dreyeks ABD die Linie DE an die Grundlinie gezogen ist, und a sich zum Quadrat über AD verhält, wie BE zu EF; b zum Quadrat über BD wie AE zu EF; c zum Quadrat über AE wie BE zu EF; d zum Quadrat über BE, wie AE zu EF; und e zum Quadrat über ED, wie AB zu EF; so ist nach dem 10ten Lehns. die Summe von a, b gleich der Summe von c, d, e. Mithin ist die Summe der Figuren a, b, und des Quadrats über CD gleich der Summe der Figuren c, d, e, und des Quadrats über CD, d. i. nach dem

vor-

vorhergehenden, gleich der Summe der Figuren c, d, des Rechteks ECG, und der Figur f; d. i. nach der Verzeichnung gleich dem gegebenen Raum P.

Fig. 64. h.

4. Es seyen aus den 3 gegebenen Punkten A, B, C an einen Punkt D hin die geraden Linien AD, BD, CD gezogen, und es seye die Summe der über denselben beschriebenen der Gattung nach gegebenen Figuren gleich einem gegebenen Raum: so berührt der Punkt D einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Es seye a die über AD, b die über BD, und c die über CD beschriebene Figur, und, weil die Figuren a, b zu den Quadraten über AD, BD gegebene Verhältnisse haben; so kann man nach dem 9ten Lehns. auf der geraden Linie AB einen Punkt E und eine gerade Linie EF so finden, daß sich BE zu EF wie a zu dem Quadrat über AD, und AE zu EF wie b zu dem Quadrat über BD verhalte. Es geschehe diß; so ist nach dem Zus. des 10ten Lehns. die Summe der Figuren a, b gleich der Summe eines gegebenen Raums (er heisse T) und eines Raums, der sich zum Quadrat über DE verhält, wie AB zu EF. Dieser Raum seye die Figur d, so ist folglich die Summe der Figuren a, b, c gleich der Summe des Raums T, und der Figuren d, c. Es sind aber die Verhältnisse gegeben, welche die Figuren d, c zu den Quadraten über ED, CD haben; man finde also wieder nach dem 9ten Lehns. auf der geraden Linie CE den Punkt G, und die gerade Linie GH so, daß sich GE zu GH wie die Figur c zu dem Quadrat über CD, und CG zu GH wie die Figur d zu dem Quadrat über DE, d. i. wie AB zu EF verhalte; so ist nach dem Zus. des 10ten Lehns. die Summe der Figuren c, d gleich der Summe eines gegebenen Raums (er heisse V), und eines

Raums, der zu dem Quadrat über der ebenfalls noch gezogenen Linie GD das gegebene Verhältniß von CE zu GH hat. Dieser Raum seye die Figur e; so ist folglich die Summe der Figuren a, b, c (d. i. die Summe des Raums T und der Figuren c, d) gleich der Summe der Räume T, V, und der Figur e; mithin ist, weil jene erste Summe gegeben ist, auch die lezte gegeben. Und, weil die Räume T, V gegeben sind; so ist die Figur e gegeben, und weil diese zu dem Quadrat über GD ein gegebenes Verhältniß hat; so ist das Quadrat über GD, mithin GD selbst der Grösse nach gegeben. Da nun der Punkt G gegeben ist; so berührt der Punkt D einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Komposition.

Es seyen K, N, Q diejenigen Figuren, welchen die über AD, BD, CD zu beschreibenden ähnlich seyn sollen, und LM, OP, RS seyen ihre mit AB, BD, CD ähnlich liegenden Seiten. Man ziehe die Linie AB, und finde den Punkt E, und die Linie EF so, daß sich BE zu EF wie K zu dem Quadrat über LM, und AE zu EF, wie N zu dem Quadrat über OP verhalte. Ferner ziehe man CE, und finde den Punkt G, und die Linie GH, so, daß sich EG zu GH wie Q zu dem Quadrat über RS, und CG zu GH wie AB zu EF verhalte. Die Summe desjenigen Raums, der sich zum Quadrat über AE verhält, wie BE zu EF, und desjenigen, der sich zum Quadrat über EB verhält, wie AE zu EF, seye gleich dem Raum T. Und die Summe desjenigen Raums, der sich zum Quadrat über CG verhält, wie EG zu GH, und desjenigen, der sich zum Quadrat über GE verhält, wie CG zu GH seye gleich dem Raum V. Und X seye der gegebene Raum, welchem die Summe der über AD, BD, CD zu beschreibenden Figuren gleich seyn soll; so muß dieser folg-

ch gröſſer ſeyn, als die Summe der Räume T, V.
ye alſo X gleich der Summe der Räume T, V, Y,
GZ ſeye eine gerade Linie, zu deren Quadrat ſich der
m Y verhält, wie CE zu GH; und man beſchreibe
dem Mittelpunkt G mit dem Halbmeſſer GZ einen
s; ſo wird deſſen Umfang der geſuchte Ort ſeyn,
wenn man an irgend einen Punkt D deſſelben die
den Linien AD, BD, CD zieht, und über dieſen Li-
den Figuren K, N, Q ähnliche Figuren a, b, c ſo
reibt, daß ihre Seiten AD, BD, CD mit den Sei-
M, OP, RS ähnlich liegend ſind; ſo wird die Sum-
er Figuren a, b, c gleich ſeyn dem gegebenen Raum
Denn man ziehe ED, GD; weil nun die Figuren
ähnlich ſind; ſo verhält ſich a zu dem Quadrat über
wie (K zu dem Quadrat über LM, d. i. nach der
eichnung, wie) BE zu EF, und aus ähnlichem
nde verhält ſich b zu dem Quadrat über BD, wie
zu EF. Nun ſeye d derjenige Raum, der ſich zum
drat über ED verhält, wie AB zu EF; ſo iſt nach
10ten Lehnſ. die Summe der Figuren a, b gleich der
me von T, d. Eben ſo hat, weil die Figuren c,
nlich ſind, c zu dem Quadrat über CD daſſelbe Ver-
iß, welches (Q zu dem Quadrat über RS, d. i.)
zu GH hat; es verhält ſich aber d zu dem Quadrat
ED wie (AB zu EF, d. i. wie) CG zu GH. Mit-
iſt nach dem 10ten Lehnſ. die Summe der Figuren
gleich der Summe des Raums V, und (eines
ms, der ſich zu dem Quadrat über GD oder GZ
ält, wie CE zu GH, d. i.) des Raums Y, und
rſeits den Raum T hinzu geſezt iſt die Summe
c, d, T gleich der Summe von T, V, Y. Es
er die Summe von a, b gleich der Summe von
d; mithin iſt die Summe von a, b, c gleich der
me von T, V, Y, d. i. gleich dem gegebenen
n X.

III. Fall. Wenn 4 Punkte gegeben ſind.

Fig. 64. i.

Aus den 4 gegebenen Punkten A, B, C, D werden an einen Punkt E hin die geraden Linien AE, BE, CE, DE gezogen, und es ſeye die Summe der über allen beſchriebenen Quadrate gleich einem gegebenen Raum: ſo berührt der Punkt E einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Denn man ziehe AB, und theile AB durch die Linie EF in F in zwey gleiche Theile; ferner ziehe man FC und theile FC durch die Linie EG in den Punkt G ſo, daß CG doppelt ſo groß ſeye als GF; ſo iſt, wie bey dem Fall von 3 geraden Linien bewieſen worden, die Summe der Quadrate über AE, BE, CE gleich der Summe der Rechteke BAF, FCG, und des 3fach genommenen Quadrats über GE; folglich iſt, wenn man noch die Linie GD zieht, und auf dieſelbe das Perpendikel EH fällt, die Summe der Quadrate über AE, BE, CE, DE gleich der Summe der Rechteke BAF, FCG, des Quadrats über DH, des 3fach genommenen Quadrats über GH, und des 4fach genommenen Quadrats über HE. Weil alſo das Verhältniß des 3fach genommenen Quadrats über GH zu dem Quadrat über GH gegeben iſt; ſo iſt, wenn man DG in dem Punkt K ſo theilt, daß DK 3mahl ſo groß iſt, als GK, nach dem 7ten Lehnſ. die Summe des Quadrats über DH und des 3fach genommenen Quadrats über GH gleich der Summe des gegebenen Rechteks GDK und eines Raums, der ſich zu dem Quadrat über KH verhält wie DG zu GK, d. i. gleich der Summe des Rechteks GDK und des 4fach genommenen Quadrats über KH. Folglich iſt die Summe der 4 Quadrate über AE, BE, CE, DE gleich der Summe der gegebenen Rechteke BAF, FCG, GDK und

(der

er 4fach genommenen Summe der Quadrate über KH, E, d. i.) dem 4fach genommenen Quadrat über KE. ach der Vorausſezung aber iſt die Summe jener vier uadrate gegeben; alſo iſt auch die Summe der 3 Recht- : und des 4fach genommenen Quadrats über KE gege- n. Es ſind aber die 3 Rechteke gegeben, folglich iſt ch das 4fach genommene Quadrat über KE, mithin s Quadrat über KE, alſo KE ſelbſt der Gröſſe nach geben. Und, weil der Punkt K gegeben iſt; ſo be- hrt der Punkt E einen der Lage nach gegebenen nkreis.

Kompoſition.

Man verbinde zwey der gegebenen Punkte, welche an will, durch die gerade Linie AB, theile AB in dem unkt F in zwey gleiche Theile, und ziehe an irgend nen der übrigen Punkte die gerade Linie FC, dieſe eile man in dem Punkt G ſo, daß CG doppelt ſo groß e, als GF, nun ziehe man noch an den 4ten Punkt die gerade Linie GD, und theile dieſe in dem Punkt ſo, daß DK 3mahl ſo groß ſeye als KG. Nun muß, e man aus der Analyſe weiß, der gegebene Raum öſſer ſeyn, als die Summe der Rechteke BAF, FCG, DK; es ſeye alſo dieſer Raum gleich der Summe die- 3 Rechteke und dem 4fach genommenen Quadrat er KL, und man beſchreibe aus dem Mittelpunkt K it dem Halbmeſſer KL einen Kreis: ſo wird deſſen nfang der geſuchte Ort ſeyn, d. i. wenn man aus den Punten A, B, C, D an irgend einen Punkt E deſſelben : geraden Linien AE, BE, CE, DE zieht; ſo iſt die umme der über dieſen Linien beſchriebenen Quadrate ich dem gegebenen Raum, d. i. gleich der Summe r Rechteke BAF, FCG, GDK und des 4fach genom- nen Quadrats über KL. Denn man ziehe EF, EG, EK,

III. Fall. Wenn 4 Punkte gegeben ſind.

Fig. 64. i.

Aus den 4 gegebenen Punkten A, B, C, D werden an einen Punkt E hin die geraden Linien AE, BE, CE, DE gezogen, und es ſeye die Summe der über allen beſchriebenen Quadrate gleich einem gegebenen Raum: ſo berührt der Punkt E einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Denn man ziehe AB, und theile AB durch die Linie EF in F in zwey gleiche Theile; ferner ziehe man FC und theile FC durch die Linie EG in den Punkt G ſo, daß CG doppelt ſo groß ſeye als GF; ſo iſt, wie bey dem Fall von 3 geraden Linien bewieſen worden, die Summe der Quadrate über AE, BE, CE gleich der Summe der Rechteke BAF, FCG, und des 3fach genommenen Quadrats über GE; folglich iſt, wenn man noch die Linie GD zieht, und auf dieſelbe das Perpendikel EH fällt, die Summe der Quadrate über AE, BE, CE, DE gleich der Summe der Rechteke BAF, FCG, des Quadrats über DH, des 3fach genommenen Quadrats über GH, und des 4fach genommenen Quadrats über HE. Weil alſo das Verhältniß des 3fach genommenen Quadrats über GH zu dem Quadrat über GH gegeben iſt; ſo iſt, wenn man DG in dem Punkt K ſo theilt, daß DK 3mahl ſo groß iſt, als GK, nach dem 7ten Lehnſ. die Summe des Quadrats über DH und des 3fach genommenen Quadrats über GH gleich der Summe des gegebenen Rechteks GDK und eines Raums, der ſich zu dem Quadrat über KH verhält wie DG zu GK, d. i. gleich der Summe des Rechteks GDK und des 4fach genommenen Quadrats über KH. Folglich iſt die Summe der 4 Quadrate über AE, BE, CE, DE gleich der Summe der gegebenen Rechteke BAF, FCG, GDK und

(der

der 4fach genommenen Summe der Quadrate über KH, HE, d. i.) dem 4fach genommenen Quadrat über KE. Nach der Vorausſezung aber iſt die Summe jener vier Quadrate gegeben; alſo iſt auch die Summe der 3 Rechteke und des 4fach genommenen Quadrats über KE gegeben. Es ſind aber die 3 Rechteke gegeben, folglich iſt auch das 4fach genommene Quadrat über KE, mithin das Quadrat über KE, alſo KE ſelbſt der Gröſſe nach gegeben. Und, weil der Punkt K gegeben iſt; ſo berührt der Punkt E einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Kompoſition.

Man verbinde zwey der gegebenen Punkte, welche man will, durch die gerade Linie AB, theile AB in dem Punkt F in zwey gleiche Theile, und ziehe an irgend einen der übrigen Punkte die gerade Linie FC, dieſe theile man in dem Punkt G ſo, daß CG doppelt ſo groß ſeye, als GF, nun ziehe man noch an den 4ten Punkt D die gerade Linie GD, und theile dieſe in dem Punkt K ſo, daß DK 3mahl ſo groß ſeye als KG. Nun muß, wie man aus der Analyſe weiß, der gegebene Raum gröſſer ſeyn, als die Summe der Rechteke BAF, FCG, GDK; es ſeye alſo dieſer Raum gleich der Summe dieſer 3 Rechteke und dem 4fach genommenen Quadrat über KL, und man beſchreibe aus dem Mittelpunkt K mit dem Halbmeſſer KL einen Kreis: ſo wird deſſen Umfang der geſuchte Ort ſeyn, d. i. wenn man aus den Punkten A, B, C, D an irgend einen Punkt E deſſelben die geraden Linien AE, BE, CE, DE zieht; ſo iſt die Summe der über dieſen Linien beſchriebenen Quadrate gleich dem gegebenen Raum, d. i. gleich der Summe der Rechteke BAF, FCG, GDK und des 4fach genommenen Quadrats über KL. Denn man ziehe EF, EG, EK,

EK, und auf GD fälle man das Perpendikel EH; weil nun AB in F in zwey gleiche Theile getheilt iſt, und CG doppelt ſo groß iſt, als GF; ſo iſt wie bey der Kompoſition für den Fall von 3 Punkten gezeigt worden, die Summe der 3 Quadrate CE, BE, AE gleich der Summe der Rechteke BAF, FCG, und des 3fach genommenen Quadrats über GE, d. i. gleich der Summe der Rechteke BAF, FCG und der 3fach genommenen Summe der Quadrate über HG, HE. Man ſeze beyderſeits das Quadrat über DE, oder die Summe der Quadrate über DH, HE hinzu; ſo iſt die Summe der 4 Quadrate über DE, CE, BE, AE gleich der Summe der Rechteke BAF, FCG, des Quadrats über DH, des 3fach genommenen Quadrats über HG, und des 4fach genommenen Quadrats über HE; nun iſt nach dem 7ten Lehnſ. (weil nemlich DK 3mahl ſo groß genommen worden, als KG) die Summe des Quadrats über DH und des 3fach genommenen Quadrats über HG gleich der Summe des Rechteks GDK und des 4fach genommenen Quadrats über HK. Folglich iſt die Summe der 4 Quadrate über DE, CE, BE, AE gleich der Summe der Rechteke BAF, FCG, GDK und (der 4fach genommenen Summe der Quadrate über HK, HE, d. i.) dem 4fach genommenen Quadrat über KE, oder KL, d. i. nach der Verzeichnung dem gegebenen Raum.

Und ſo werden nothwendig, wenn die Anzahl der Punkte zunimmt, Analyſe und Kompoſition weitläuftiger, wenn man ſie nemlich ohne Rükſicht auf die vorhergehenden einfacheren Fälle machen wollte. Es iſt alſo, wie gegen das Ende des 29ſten Sazes bemerkt worden, nüzlich, bey ſolchen Säzen, wo die Anzahl der gegebenen Dinge ohne Ende zunehmen kann, einen Weg zu zeigen, wie der für eine gewiſſe Anzahl gegebener Punkte verlangte Ort auf einen Ort zurük gebracht werden kann, bey dem die Anzahl der gegebenen Punkte

um Eins geringer iſt, als jene erſte Anzahl, und zwar diß bey der Analyſe, damit dann die Kompoſition zu einer um Eins gröſſern Anzahl fortſchreiten kann, wie beym folgenden Fall geſchieht.

Fig. 64. k.

Es ſeyen aus den 4 gegebenen Punkten A, B, C, D an einen Punkt E hin die geraden Linien AE, BE, CE, DE gezogen, und die Summe der über ihnen beſchriebenen der Gattung nach gegebenen Figuren ſeye gleich einem gegebenen Raum: ſo berührt der Punkt E einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Die Figur über AE heiſſe a, die über BE heiſſe b, die über CE c, die über DE d; ſo ſind folglich die Verhältniſſe dieſer Figuren zu den Quadraten über den Linien gegeben, über welchen ſie beſchrieben ſind (53. D.). Man ziehe AB, und finde nach dem 9ten Lehnſ. den Punkt F und die Linie FG ſo, daß ſich BF zu FG wie a zu dem Quadrat über AE, und AF zu FG wie b zu dem Quadrat über BE verhalte; ſo iſt nach dem Zuſ. des 10ten Lehnſ. die Summe der Figuren a, b gleich der Summe eines gegebenen Raums, der H heiſſe, und einer Figur, die zu dem Quadrat über FE ein gegebenes Verhältniß nemlich das Verhältniß von AB zu FG hat. Dieſe Figur heiſſe e. Nun iſt nach der Vorausſezung die Summe der Figuren a, b, c, d gleich einem gegebenen Raum, mithin iſt die Summe des Raums H und der Figuren e, c, d gleich eben dieſem gegebenen Raum. Es iſt aber der Raum H gegeben; alſo iſt die Summe der Figuren e, c, d gegeben. Weil alſo aus 3 gegebenen Punkten F, C, D an einen Punkt E die geraden Linien FE, CE, DE gezogen ſind, und die Summe der über dieſen Linien beſchriebenen der Gattung nach gegebenen Figuren gegeben iſt; ſo berührt der

Punkt

Punkt E einen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem vorhergehenden II. Fall.

Kompoſition.

Es ſeye das Verhältniß der Figur a zu dem Quadrat über AE gleich dem Verhältniß der geraden Linie R zu T, und das Verhältniß der Figur b zu dem Quadrat über BE gleich dem Verhältniß von S zu T. Und nach dem 9ten Lehnſ. finde man auf der geraden Linie AB den Punkt F, und die Linie FG ſo, daß ſich BF zu FG wie R zu T, und AF zu FG wie S zu T verhalte. Und es ſeye die Summe desjenigen Raums, welcher ſich zu dem Quadrat über AF verhält, wie BF zu FG, und desjenigen Raums, welcher ſich zum Quadrat über BF verhält, wie AF zu FG gleich dem Raum H; und K ſeye der gegebene Raum, dem die Summe der 4 über AE, BE, CE, DE zu beſchreibenden Figuren a, b, c, d gleich ſeyn ſoll; ſo muß folglich K gröſſer ſeyn, als H.

Es ſeye alſo K gleich den beyden Räumen H und L, und man beſchreibe nach dem vorhergehenden IIten Fall einen Kreis, ſo, daß, wenn man an irgend einen Punkt E deſſelben aus den gegebenen Punkten F, C, D die geraden Linien FE, CE, DE zieht, die Summe der Figuren e, c, d (von welchen die Figur e, welche über FE beſchrieben werden ſoll, zu dem Quadrat über FE das gegebene Verhältniß von AB zu FG hat) gleich ſeye dem Raum L; ſo wird der Umfang dieſes Kreiſes der geſuchte Ort ſeyn, d. i. wenn man noch die Linien AE, BE zieht, und über denſelben Figuren a, b beſchreibt, welche zu den Quadraten über AE, BE die gegebenen Verhältniſſe von R zu T, und von S zu T haben; ſo wird die Summe der Figuren a, b, c, d gleich ſeyn dem gegebenen Raum K. Denn weil aus dem Scheitelpunkt E

des

des Dreyeks ABE die Linie EF an die Grundlinie gezogen iſt, und ſich a zu dem Quadrat über AE wie R zu T, d. i. wie BF zu FG; und b zu dem Quadrat über BE wie S zu T, d. i. wie AF zu FG verhält; und weil die Summe einer Figur, die ſich zu dem Quadrat über AF verhält wie BF zu FG, und einer Figur, die ſich zu dem Quadrat über BF verhält, wie AF zu FG gleich iſt dem Raum H; endlich weil die über FE beſchriebene Figur e ſich zu dem Quadrat über FE verhält, wie AB zu FG; ſo iſt nach dem 10ten Lehnſ. die Summe von a und b gleich der Summe von H und e, nach der Verzeichnung aber iſt die Summe von e, d, c gleich dem Raum L. Mithin iſt die Summe des Raums H und der Figuren e, c, d, d. i. die Summe der Figuren a, b, c, d gleich der Summe der Räume H und L, d. i. dem gegebenen Raum K.

Völlig auf ähnliche Art wird Analyſe und Kompoſition, wenn 5 Punkte gegeben ſind, auf die von 4 Punkten, und, wenn 6 Punkte gegeben ſind, auf die von 5 Punkten, und ſo beſtändig, wie viel auch Punkte gegeben ſeyn mögen, auf Analyſe und Kompoſition einer um Eins geringern Anzahl gegebener Punkte zurük gebracht.

Fermat ſagt, Apollonius habe den Fall nicht bemerkt, wenn die der Gattung nach gegebenen Figuren keine Quadrate ſind. Er wurde zu dieſem Irrthum dadurch verleitet, weil er unter dem Wort *ſpecies* überall **Quadrate** verſtund, da doch *ſpecies* oder τὸ εἶδος jede **geradlinichte Figur** bedeutet, wie z. B. im 31ſten Saz des 6ten Buchs der Elem. Bey Pappus aber heißt in dieſem und in dem folgenden Saz, wie auch in dem lezten Saz unſers Iſten Buchs τὸ εἶδος eben das, was bey Euklid Saz 56. 57. 59. der Data τὸ εἶδος εἴδει δεδομένον, wofür Pappus nach ſeiner kurzen Art ſich auszudrüken, nur ſchlechtweg τὸ εἶδος ſezt.

Dieſen

Dieſen berühmten Ort zählt Fermat in einem Brief an Robervall S. 151 ſeiner Var. Op. Math. mit Recht unter die ſchönſten Säze der Geometrie. Da ich verſchiedene Auflöſungen deſſelben verſuchte, kam ich auf den vorhergehenden 7ten Lehnſaz, und fand, daß ſich dieſer Ort leicht daraus werde herleiten laſſen. Nachgehends fand ich denſelben Lehnſaz bey Pappus, welches mich ungemein freute, weil ich jezt gewiß wußte, daß gerade die eigene Auflöſung des Apollonius von dieſem Ort vermittelſt dieſes Lehnſazes wieder hergeſtellt ſeye. Aus dieſer Auflöſung ſieht man zugleich leicht, daß der Mittelpunkt desjenigen Kreiſes, welcher der geſuchte Ort iſt, immer, ſo viel auch Punkte gegeben ſeyn mögen, auch der Schwerpunkt aller dieſer Punkte, d. i. gleicher an dieſen Punkten aufgehängter Gewichte ſeye: eine Eigenſchaft, welche Fermat nur in dem Fall, wenn 3 Punkte gegeben ſind, bemerkt, und die er in dem angeführten Brief ſehr bewundernswerth (ſatis miram) nennt. Zugleich iſt in dieſer Auflöſung auch der Beweis des 12ten Sazes von Huygens Horologium Oſcillatorium enthalten. Der Saz ſelbſt iſt nemlich dieſer: „Wenn in einer Ebene eine beliebige „Anzahl Punkte gegeben iſt, und aus ihrem Schwer„punkt ein Kreis beſchrieben wird, und, wenn dann „an irgend einen Punkt auf dem Umfang dieſes Kreiſes „aus allen gegebenen Punkten gerade Linien gezogen „werden; ſo iſt die Summe der über allen dieſen Linien „beſchriebenen Quadrate immer dem nemlichen Flächen„raum gleich.“

Fig. 64. i.

Es ſeyen z. B. die 4 Punkte A, B, C, D gegeben, man ziehe AB, und theile ſie in F in zwey gleiche Theile, ziehe FC und theile ſie in dem Punkt G, ſo, daß

daß CG doppelt so groß ist, als GF, ziehe GD, und theile sie in dem Punkt K so, daß DK 3mahl so groß ist, als GK; so ist K der Schwerpunkt der Punkte A, B, C, D, wie aus der Erklärung des Schwerpunkts erhellet. Nun beschreibe man aus dem Punkt K mit einem beliebigen Halbmesser den Kreis LE, und ziehe an irgend einen Punkt E desselben die geraden Linien AE, BE, CE, DE; so ist, wie in der vorhergehenden Komposition gezeigt worden, die Summe der über allen diesen Linien beschriebenen Quadrate immer gleich der Summe der Rechteke BAF, FCG, GDK, und des über dem Halbmesser KE beschriebenen Quadrats so vielmahl genommen, als viel Punkte gegeben sind, d. i. also in diesem Fall des 4fachen Quadrats über KE. Huygens beweist diß durch eine ziemlich weitläuffige algebraische Rechnung in dem angeführten Ort. Es brauchen aber Fermat und Huygens bey ihren Auflösungen 2 gerade Linien, die einander unter rechten Winkeln schneiden, deren Lage nicht von den gegebenen Punkten abhängt, sondern die nach Belieben gezogen werden, und diß scheint die Ursache zu seyn, warum sie nicht auf die Auflösung des Apollonius verfielen. Am Ende dieses Sazes sezt Huygens hinzu: „Wenn man sezt, die gegebenen „Punkte haben verschiedene, aber unter einander kommen„surable Gewichte, wie wenn z. B. das Gewicht des „Punkts A 2, des Punkts B 3, des Punkts C 4, des „Punkts D 7 wäre, und wenn man wieder ihren gemein„schaftlichen Schwerpunkt findet, aus demselben einen „Kreis beschreibt, und an den Umfang dieses Kreises „aus den gegebenen Punkten gerade Linien zieht, und „auf jeder von diesen eben das vielfache ihres Quadrats „nimmt, welches das Gewicht ihres Punkts ausdrükt; „wenn man also in unserm Beyspiel das Quadrat von „AE 2mahl, das von BE 3mahl, das von CE 4mahl, „und das von DE 7mahl nimmt; so wird wieder die

„Summe aller dieſer vielfachen gleich ſeyn einem gegebe„nen Raum, und zwar immer dem nemlichen, an was „für einen Punkt des Umkreiſes man auch die geraden „Linien zieht. Denn es erhellet diß aus dem vorherge„henden Beweis, wenn wir uns die Punkte ſelbſt nach „der Anzahl des jedem beygelegten Gewichts vervielfacht „denken, nemlich, wie wenn in A zwey Punkte, in B 3, „in C 4, in D 7, und zwar lauter gleich ſchwere Punkte „vereinigt wären.“

Allein dieſe Bedingung, daß die Gewichte unter einander kommenſurabel ſeyn ſollen, iſt nicht nöthig; denn wenn die Gewichte zu irgend einem Gewicht gegebene Verhältniſſe haben, und man Räume nimmt, welche eben dieſe gegebenen Verhältniſſe zu den Quadraten der Linien haben, die aus den gegebenen Punkten an irgend einen Punkt auf dem Umfang des beſchriebenen Kreiſes gezogen werden; ſo iſt die Summe aller dieſer Räume gleich einem gegebenen Raum, wie aus dem folgenden 3ten Zuſaz erhellen wird.

Fig. 64. I.

1. Zuſ. Wenn in einer Ebene eine beliebige Anzahl von Punkten gegeben iſt, und von dieſen Punkten, und ihrem Schwerpunkt aus gerade Linien an irgend einen Punkt hin gezogen werden; ſo iſt die Summe der über dieſen Linien beſchriebenen Quadrate gleich einem gegebenen Raum (nemlich der Summe der Quadrate über den geraden Linien, die aus den gegebenen Punkten an ihren Schwerpunkt gezogen werden) und noch dem Quadrat über der aus dem Schwerpunkt an den nemlichen Punkt gezogenen Linie ſo vielmahl genommen, als viel Punkte gegeben ſind.

Denn es ſeyen z. B. 4 Punkte A, B, C, D gegeben, man ziehe AB und theile ſie in E in zwey gleiche

Theile;

Theile; so ist E der Schwerpunkt der Punkte A, B. Man ziehe EC, und theile sie in dem Punkt F so, daß CF doppelt so groß wird, als FE; so ist F der Schwerpunkt der 3 Punkte A, B, C. Eben so ziehe man FD und theile sie in dem Punkt G so, daß DG 3mahl so groß wird als GF; so ist G der Schwerpunkt der 4 Punkte A, B, C, D; und so weiter, wenn mehrere Punkte gegeben sind. Nun ziehe man AG, BG, CG, DG; so wird, wie in diesem 5ten Saz bewiesen werden, daß die Summe der Quadrate über AG, BG, CG gleich seye (dem 2fach genommenen Quadrat über AE, dem 2fach genommenen Quadrat über EF, dem Quadrat über CF, und dem 3fach genommenen Quadrat über FG, d. i.) der Summe der Rechteke BAE, ECF, und des 3fach genommenen Quadrats über FG. Also ist die Summe der Quadrate über AG, BG, CG, DG gleich der Summe der Rechteke BAE, ECF, und des 3fach genommenen Quadrats über FG und des Quadrats über DG; d. i. (weil das 3fach genommene Quadrat über FG gleich ist dem Rechtek FGD) die Summe jener 4 Quadrate ist gleich der Summe der Rechteke BAE, ECF, FDG. Nun ziehe man aus den gegebenen Punkten an irgend einen Punkt H die geraden Linien AH, BH, CH, DH und noch die gerade Linie GH; so ist nach diesem Saz die Summe der Quadrate über AH, BH, CH, DH gleich der Summe der Rechteke BAE, ECF, FDG, und des 4mahl genommenen Quadrats über GH, d. i. gleich der Summe der Quadrate über AG, BG, CG, DG und des mahl genommenen Quadrats über GH. Und eben so, wenn mehrere Punkte gegeben sind.

2. Zus. Wenn in einem Kreise irgend eine gleichseitige Figur beschrieben, und aus den Winkelpunkten der Figur, und dem Mittelpunkt des Kreises an irgend einen Punkt hin gerade Linien gezogen werden; so ist

die Summe der Quadrate über den Linien, die aus den Mittelpunkten der Figur gezogen sind, gleich der so vielmahl genommenen Summe der beyden Quadrate, wovon das eine über der aus dem Mittelpunkt gezogenen Linie, das andere über dem Halbmesser des Kreises beschrieben ist, als viele Seiten die in den Kreis beschriebene Figur hat.

Fig. 64. m.

3. Zus. Wenn in einer Ebene eine beliebige Anzahl von Punkten gegeben ist, die verschiedene Gewichte haben; wenn aber ihre Gewichte zu irgend einem Gewicht gegebene Verhältnisse haben, und man von ihnen und ihrem Schwerpunkt aus gerade Linien an irgend einen Punkt hin zieht; so ist die Summe derjenigen Räume, welche zu den Quadraten über den Linien, die aus den gegebenen Punkten gezogen sind, nemlich je ein Raum zu einem Quadrat, diese gegebenen Verhältnisse haben, gleich der Summe eines gegebenen Raums, und eines Raums, welcher sich zu dem Quadrat über der aus dem Schwerpunkt gezogenen Linie verhält, wie die Summe aller Gewichte zu jenem einzigen Gewicht. Und der gegebene Raum ist gleich der Summe derjenigen Räume, welche zu den Quadraten über den Linien, die aus den gegebenen Punkten an den Schwerpunkt gezogen werden, immer je ein Raum zu einem Quadrat besagte gegebene Verhältnisse haben.

Es seyen die gegebenen Punkte A, B, C u. s. w. und ihre Gewichte heissen P, A; P, B; P, C; und P, Q seye dasjenige Gewicht, zu welchem sie gegebene Verhältnisse haben. Man ziehe AB, und finde nach dem 9ten Lehns. den Punkt E und die Linie EF so, daß sich BE zu EF verhalte, wie P, A zu P, Q; und EF zu AE wie P, Q zu P, B: so verhält sich gleichförmig BE zu AE wie P, A

zu

zu P, B. Alſo iſt E der Schwerpunkt von P, A und P, B. Eben ſo ziehe man EC, und finde den Punkt G, und die gerade Linie GH ſo, daß ſich das Gewicht in E, d. i. P, A + P, B zu dem Gewicht P, Q verhalte, wie CG zu GH; und daß P, Q ſich zu P, C verhalte, wie GH zu GE: ſo verhält ſich gleichförmig P, A + P, B zu P, C wie CG zu GE. Mithin iſt G der Schwerpunkt von P, A; P, B; P, C; und eben ſo muß man dann weiter ſchlieſſen, wenn mehrere Punkte gegeben ſind. Aus den gegebenen Punkten ziehe man an irgend einen beliebigen Punkt D die geraden Linien AD, BD, CD, und aus dem Schwerpunkt die gerade Linie GD; und es ſeyen a, b, c diejenigen Räume, die ſich zu den Quadraten AD, BD, CD nemlich je ein Raum zu einem Quadrat verhalten, wie die Gewichte P, A; P, B; P, C zu dem Gewicht P, Q. Es muß alſo bewieſen werden, daß die Summe der Figuren a, b, c gleich ſeye der Summe eines gegebenen Raums, und desjenigen Raums, der ſich zu dem Quadrat über GD verhält, wie die Summe von P, A; P, B; P, C zu P, Q. Weil nun nach der Verzeichnung ſich die Summe von P, A und P, B zu P, Q verhält, wie CG zu GH; und auch P, C ſich zu P, Q verhält wie EG zu GH; ſo verhält ſich (24, 5. E.) die Summe von P, A; P, B; P, C zu P, Q wie CE zu GH. Es verhält ſich aber a zu dem Quadrat über AD wie (P, A zu P, Q, d. i. wie) BE zu EF; und b verhält ſich zu dem Quadrat über BD wie (P, B zu P, Q, d. i. wie) AE zu EF; und aus ähnlichem Grund verhält ſich c zu dem Quadrat über CD wie EG zu GH. Und, nach der Verzeichnung verhält ſich CG zu GH wie (die Summe von P, A und P, B zu P, Q, d. i. wie) AB zu EF. Alſo iſt nach dem, was bey nr. 4. des IIten Falls unſers Sazes bewieſen worden, die Summe von a, b, c gleich der Summe eines gegebenen Raums, und eines Raums e, der ſich zu dem

Quadrat über GD verhält, wie CE zu GH, d. i. nach dem vorhergehenden, wie die Summe von P, A; P, B; P, C zu P, Q.

Es ist aber in der angeführten Stelle gezeigt worden, daß dieser gegebene Raum, (dem nemlich mit dem Raum e zusammen genommen die Summe von a, b, c gleich ist) gleich seye den beyden Räumen T, V, oder der Summe eines Raums, der sich zu dem Quadrat über AE verhält, wie BE zu EF, und eines andern, der sich zu dem Quadrat über BE verhält, wie AE zu EF, und eines dritten, der sich zu dem Quadrat über CG verhält, wie EG zu GH, und eines vierten, der sich zu dem Quadrat über EG verhält, wie CG zu GH. Man ziehe also die Linien AG, BG, CG; so muß bewiesen werden, daß die Summe dieser Räume gleich seye der Summe derjenigen Räume, die sich zu den Quadraten über AG, BG, CG verhalten, wie P, A; P, B; P, C zu P, Q. Es ist nach dem 10ten Lehns. die Summe eines Raums, der sich zu dem Quadrat über AG verhält, wie (BE zu EF, d. i. wie) P, A zu P, Q und eines andern, der sich zu dem Quadrat über BG verhält, wie (AE zu EF, d. i. wie) P, B zu P, Q gleich der Summe eines Raums, der sich zu dem Quadrat über AE verhält, wie BE zu EF, und eines andern, der sich zu dem Quadrat über EB verhält, wie AE zu EF, und noch eines andern, der sich zu dem Quadrat über EG verhält, wie (AB zu EF, d. i. wie) CG zu GH. Zu diesen gleichen Summen seze man noch beyderseits den Raum hinzu, der sich zu dem Quadrat über CG verhält, wie (EG zu GH, d. i. wie) P, C zu P, Q; so ist die Summe der Räume, welche sich zu den Quadraten über AG, BG, CG verhalten, wie P, A; P, B; P, C zu P, Q gleich der Summe eines Raums, der sich zum Quadrat über AE wie BE zu EF, und eines andern, der sich zu dem Quadrat über BE wie AE zu EF, und eines

dritten,

dritten, der ſich zu dem Quadrat über EG wie CG zu GH, und endlich eines vierten, der ſich zu dem Quadrat über CG wie EG zu GH verhält; und diß ſollte eben bewieſen werden.

Hieraus folgt ebenfalls ein neuer dem 2ten Zuſ. ähnlicher Zuſaz.

Berechnung.

Fig. 64. a. b.

Iſter Fall. 1) Es ſeye der gegebene Raum $= \mathfrak{R}$; $AB = a$; ſo iſt $2DE^2 + 2AD^2 = \mathfrak{R}$, d. i. $DE^2 = \frac{\mathfrak{R}}{2} - AD^2 = \frac{2\mathfrak{R} - a^2}{4}$, mithin $DE = \frac{1}{2}\sqrt{2\mathfrak{R} - a^2}$, und $AD = DB = \frac{a}{2}$.

Fig. 64. c.

2) Das übrige bleibe, wie vorhin, und es ſeye das Verhältniß der Figur über BC zu dem Quadrat über $BC = \beta : 1$; ſo iſt $AD : BD = \beta : 1$, mithin $AB : BD = \beta + 1 : 1$, alſo $BD = \frac{a}{\beta+1}$, $AD = \frac{\beta a}{\beta+1}$, $BA \times AD = \frac{\beta a^2}{\beta+1}$, folglich iſt der Raum, der in der Kompoſition N heißt, $= \mathfrak{R} - \frac{\beta a^2}{\beta+1}$. Nun iſt $N : DK^2 = \beta + 1 : 1$, folglich $DK^2 = \frac{(\beta+1)\mathfrak{R} - \beta a^2}{(\beta+1)^2}$, mithin $DK = \frac{\sqrt{(\beta+1)\mathfrak{R} - \beta a^2}}{\beta+1}$. Es erhellet hieraus

die auch von Simson bemerkte Identität dieses Falls mit dem Saz A.

Fig. 64. d.

2) Das übrige bleibe, wie bey nr. 2. und das Verhältniß der Figur über AC zu dem Quadrat über AC seye $= \alpha : 1$; so ist

$$BD : DE = \alpha : 1$$
$$DE : AD = 1 : \beta$$

mithin $BD : AD = \alpha : \beta$, und $AB : AD = \alpha+\beta : \beta$, und $AB : BD = \alpha+\beta : \alpha$, und $AB : DE = \alpha+\beta : 1$, mithin $AD = \frac{\beta a}{\alpha+\beta}$, $BD = \frac{\alpha a}{\alpha+\beta}$, $DE = \frac{a}{\alpha+\beta}$, folglich die in der Komposition angenommene Figur d, welche sich zu dem Quadrat über AD verhält, wie $\alpha : 1 = \frac{\alpha\beta^2 a^2}{(\alpha+\beta)^2}$, und eben so die in der Komposition angenommene Figur $e = \frac{\beta\alpha^2 a^2}{(\alpha+\beta)^2}$, also $d+e = \frac{(\alpha+\beta)\alpha\beta a^2}{(\alpha+\beta)^2} = \frac{\alpha\beta a^2}{\alpha+\beta}$, mithin der Raum $N = \mathfrak{R} - \frac{\alpha\beta a^2}{\alpha+\beta} = \frac{(\alpha+\beta)\mathfrak{R} - \alpha\beta a^2}{\alpha+\beta}$. Nun ist aber $N : DO^2 = \alpha+\beta : 1$, also

$$DO^2 = \frac{(\alpha+\beta)\mathfrak{R} - \alpha\beta a^2}{(\alpha+\beta)^2}, \text{ mithin}$$

$$DO = \frac{\sqrt{(\alpha+\beta)\mathfrak{R} - \alpha\beta a^2}}{\alpha+\beta}.$$

IIter Fall. Man könnte eben so, wie in der Komposition, und wie es bey dem vorigen Isten Fall geschehen ist, die einfacheren Fälle, wenn alle, oder doch einige

e der der Gattung nach gegebenen Figuren Quadrate
), zuerſt betrachten, und alsdann zu den ſchwereren
llen fortſchreiten, in welchen keine oder doch nicht alle
der Gattung nach gegebenen Figuren Quadrate ſind.
irze halber werde ich aber gleich den allgemeinſten un-
den beſondern Fällen, welche zu dem IIten Haupt-
l gehören, vornehmen, und aus der Rechnung für
ſen alsdann die für die übrigen beſondern Fälle herlei-
t. Es ſeye alſo

Fig. 64. h.

: den IIten Fall 4. der gegebene Raum = R, AB
: a, BC = b, und der Winkel ABC = B; ferner
s Verhältniß der Figur über AD zu dem Quadrat
er AD = α : 1; das Verhältniß der Figur über BD
dem Quadrat über BD = β : 1; und endlich das
erhältniß der Figur über CD zu dem Quadrat über
D = γ : 1; ſo iſt

BE : EF = α : 1
EF : AE = 1 : β

ithin BE : AE = α : β und AB : AE = α+β : β.
glich iſt $AE = \frac{\beta AB}{\alpha+\beta} = \frac{\beta a}{\alpha+\beta}$, $BE = \frac{\alpha a}{\alpha+\beta}$,
d der Raum, welcher ſich zu dem Quadrat über AE
rhält, wie BE zu EF iſt $= \frac{\alpha\beta^2 a^2}{(\alpha+\beta)^2}$; eben ſo iſt der
laum, welcher ſich zu dem Quadrat über BE verhält,
ie AE zu EF, $= \frac{\beta\alpha^2 a^2}{(\alpha+\beta)^2}$, mithin iſt der Raum T,
elcher der Summe dieſer beyden Räume gleich iſt,
$= \frac{\alpha\beta a^2}{\alpha+\beta}$. Ferner hat man in dem Dreyek BCE, in
elchem die Seiten BC, BE nebſt dem eingeſchloſſenen

Winkel bekannt sind: tang. BCE $=$ $\frac{BE \text{ sin. } B}{BC - BE \text{ cosin. } B}$

$= \frac{\alpha a \text{ sin. } B}{(\alpha+\beta) b - \alpha a \text{ cosin. } B}$

und $CE = \sqrt{(BC^2 + BE^2 - 2\, BC.BE. \text{cosin. } B)}$

$= \sqrt{\left(b^2 + \frac{\alpha^2 a^2}{(\alpha+\beta)^2} - \frac{2\alpha a b. \text{cosin. } B}{\alpha+\beta}\right)}$

$= \frac{\sqrt{(\alpha+\beta)^2 b^2 + \alpha^2 a^2 - 2\alpha(\alpha+\beta) a b \text{ cosin. } B}}{\alpha+\beta}$

Ferner, weil EG: GH $= \gamma : 1$
und GH: CG $= 1 : \alpha+\beta$
so ist EG: CG $= \gamma : \alpha+\beta$
und CE: CG $= \alpha+\beta+\gamma : \alpha+\beta$

mithin $CG = \frac{(\alpha+\beta) CE}{\alpha+\beta+\gamma}$

$= \frac{\sqrt{(\alpha+\beta)^2 b^2 + \alpha^2 a^2 - 2\alpha(\alpha+\beta) a b \text{ cosin. } B}}{\alpha+\beta+\gamma}$

oder $CG^2 = \frac{(\alpha+\beta)^2 b^2 + \alpha^2 a^2 - 2\alpha(\alpha+\beta) a b \text{ cosin. } B}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}$

und der Raum, der sich zu CG^2 verhält, wie EG zu GH oder wie $\gamma : 1$ ist

$= \frac{\gamma[(\alpha+\beta)^2 b^2 + \alpha^2 a^2 - 2\alpha(\alpha+\beta) a b \text{ cosin. } B]}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}$

Eben so ist:

$EG^2 = \frac{\gamma^2[(\alpha+\beta)^2 b^2 + \alpha^2 a^2 - 2\alpha(\alpha+\beta) a b \text{ cosin. } B]}{(\alpha+\beta)^2 \times (\alpha+\beta+\gamma)^2}$

und der Raum, welcher sich zu dem Quadrat über EG verhält, wie CG zu GH, d. h. wie $(\alpha+\beta) : 1$ ist

$= \gamma^2$

$$= \frac{\gamma^2[(\alpha+\beta)^2 b^2 + \alpha^2 a^2 - 2\alpha(\alpha+\beta) a b \text{ cosin. } B]}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+\gamma)^2};$$

gleich ist die Summe der beyden aufgenommenen Räu-
e, oder der Raum V

$$= \frac{\gamma[(\alpha+\beta)^2 b^2 + \alpha^2 a^2 - 2\alpha(\alpha+\beta) a b \text{ cosin. } B]}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+\gamma)}.$$

Weil nun $\mathfrak{R} = T+V+Y$, oder $Y = \mathfrak{R} - (T+V)$;

ist $Y = \mathfrak{R} - \frac{\alpha\beta a^2}{\alpha+\beta}$

$$- \frac{\gamma[(\alpha+\beta)^2 b^2 + \alpha^2 a^2 - 2\alpha(\alpha+\beta) a b \text{ cosin. } B]}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+\gamma)}$$

$$= \mathfrak{R} - \frac{[\alpha\beta a^2(\alpha+\beta) + \gamma(\alpha\beta a^2 + \alpha^2 a^2)]}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+\gamma)}$$

$$- \frac{\gamma[(\alpha+\beta)^2 b^2 - 2\alpha(\alpha+\beta) a b \text{ cosin. } B]}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+\gamma)}$$

$$= [(\alpha+\beta+\gamma)\mathfrak{R} - \alpha(\beta+\gamma) a^2 - (\alpha+\beta)\gamma b^2 + 2\alpha a b \text{ cosin. } B] : (\alpha+\beta+\gamma)$$

Nun verhält sich das Quadrat von GZ zu Y, wie GH
: CE, d. h. wie $1 : (\alpha+\beta+\gamma)$, folglich ist

$$GZ = \sqrt{[(\alpha+\beta+\gamma)\mathfrak{R} - \alpha(\beta+\gamma) a^2 - (\alpha+\beta)\gamma b^2 + 2\alpha a b \text{ cosin. } B] : (\alpha+\beta+\gamma)}.$$

Ist nun, wie bey dem IIten Fall $3\ \gamma = 1$; so
leibt der Werth von tang. BCE der vorhin gefundene,
ingegen wird alsdann

$$CG = \frac{\sqrt{(\alpha+\beta)^2 b^2 + \alpha^2 a^2 - 2\alpha(\alpha+\beta) a b \text{ cosin. } B}}{\alpha+\beta+1}$$

nd GZ, welche Linie bey dem IIten Fall 3 (Fig. 64. g.)
GQ hieß, wird

$$= \sqrt{}$$

Winkel bekannt sind: tang. $BCE = \frac{BE \sin. B}{BC - BE \cos. B}$

$= \frac{\alpha a \sin. B}{(\alpha+\beta) b - \alpha a \cos. B}$

und $CE = \sqrt{(BC^2 + BE^2 - 2 BC. BE. \cos. B)}$

$= \sqrt{\left(b^2 + \frac{\alpha^2 a^2}{(\alpha+\beta)^2} - \frac{2\alpha a b. \cos. B}{\alpha+\beta}\right)}$

$= \frac{\sqrt{(\alpha+\beta)^2 b^2 + \alpha^2 a^2 - 2\alpha(\alpha+\beta) a b \cos. B}}{\alpha+\beta}$

Ferner, weil $EG : GH = \gamma : 1$
und $GH : CG = 1 : \alpha+\beta$
so ist $EG : CG = \gamma : \alpha+\beta$
und $CE : CG = \alpha+\beta+\gamma : \alpha+\beta$

mithin $CG = \frac{(\alpha+\beta) CE}{\alpha+\beta+\gamma}$

$= \frac{\sqrt{(\alpha+\beta)^2 b^2 + \alpha^2 a^2 - 2\alpha(\alpha+\beta) a b \cos. B}}{\alpha+\beta+\gamma}$

oder $CG^2 = \frac{(\alpha+\beta)^2 b^2 + \alpha^2 a^2 - 2\alpha(\alpha+\beta) a b \cos. B}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}$

und der Raum, der sich zu CG^2 verhält, wie EG zu GH oder wie $\gamma : 1$ ist

$= \frac{\gamma[(\alpha+\beta)^2 b^2 + \alpha^2 a^2 - 2\alpha(\alpha+\beta) a b \cos. B]}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}$

Eben so ist

$EG^2 = \frac{\gamma^2[(\alpha+\beta)^2 b^2 + \alpha^2 a^2 - 2\alpha(\alpha+\beta) a b \cos. B]}{(\alpha+\beta)^2 \times (\alpha+\beta+\gamma)^2}$

und der Raum, welcher sich zu dem Quadrat über EG verhält, wie CG zu GH, d. h. wie $(\alpha+\beta) : 1$ ist

$= \gamma^2$

$$= \frac{\gamma^2[(\alpha+\beta)^2 b^2 + \alpha^2 a^2 - 2\alpha(\alpha+\beta) a b \text{ cosin. } B]}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+\gamma)^2};$$

folglich ist die Summe der beyden erstgenannten Räume, oder der Raum V

$$= \frac{\gamma[(\alpha+\beta)^2 b^2 + \alpha^2 a^2 - 2\alpha(\alpha+\beta) a b \text{ cosin. } B]}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+\gamma)}.$$

Weil nun $\mathfrak{R} = T+V+Y$, oder $Y = \mathfrak{R} - (T+V)$;

so ist $Y = \mathfrak{R} - \frac{\alpha\beta a^2}{\alpha+\beta}$

$$- \frac{\gamma[(\alpha+\beta)^2 b^2 + \alpha^2 a^2 - 2\alpha(\alpha+\beta) a b \text{ cosin. } B]}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+\gamma)}$$

$$= \mathfrak{R} - \frac{[\alpha\beta a^2(\alpha+\beta) + \gamma(\alpha\beta a^2 + \alpha^2 a^2)]}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+\gamma)}$$

$$- \frac{\gamma[(\alpha+\beta)^2 b^2 - 2\alpha(\alpha+\beta) a b \text{ cosin. } B]}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+\gamma)}$$

$$= [(\alpha+\beta+\gamma)\mathfrak{R} - \alpha(\beta+\gamma) a^2 - (\alpha+\beta)\gamma b^2 + 2\alpha a b \text{ cosin. } B] : (\alpha+\beta+\gamma)$$

Nun verhält sich das Quadrat von GZ zu Y, wie GH zu CE, d. h. wie $1 : (\alpha+\beta+\gamma)$, folglich ist

$$GZ = \sqrt{[(\alpha+\beta+\gamma)\mathfrak{R} - \alpha(\beta+\gamma) a^2 - (\alpha+\beta)\gamma b^2 + 2\alpha a b \text{ cosin. } B] : (\alpha+\beta+\gamma)}.$$

Ist nun, wie bey dem IIten Fall $3\gamma = 1$; so bleibt der Werth von tang. BCE der vorhin gefundene, hingegen wird alsdann

$$CG = \frac{\sqrt{(\alpha+\beta)^2 b^2 + \alpha^2 a^2 - 2\alpha(\alpha+\beta) a b \text{ cosin. } B}}{\alpha+\beta+1}$$

und GZ, welche Linie bey dem IIten Fall 3 (Fig. 64. g.) GQ hieß, wird

$$= \sqrt{}$$

$$= \sqrt{[(\alpha+\beta+1)\,\mathfrak{R} - \alpha(\beta+1)a^2 - (\alpha+\beta)b^2 + 2\alpha\,a\,b\,\text{cosin. B}]} : (\alpha+\beta+1).$$

Ist, wie beym IIten Fall 2, $\beta = \gamma = 1$; so wird

$$\text{tang. BCE} = \frac{\alpha\,a\,\text{sin. B}}{(\alpha+1)\,b - \alpha\,a\,\text{cosin. B}},$$

$$\text{CG} = \frac{\sqrt{(\alpha+1)^2 b^2 + \alpha^2 a^2 - 2\alpha(\alpha+1)\,a\,b\,\text{cosin. B}}}{\alpha+2}$$

und GZ, welche Linie für diesen Fall (Fig. 64. f.) FO hieß, wird

$$= \frac{\sqrt{[(\alpha+2)\,\mathfrak{R} - 2\alpha a^2 - (\alpha+1)b^2 + 2\alpha\,a\,b\,\text{cosin. B}]}}{\alpha+2}$$

Ist endlich, wie beym IIten Fall 1, $\alpha = \beta = \gamma = 1$; so wird

$$\text{tang. BCE} = \frac{a\,\text{sin. B}}{2\,b - a\,\text{cosin. B}},$$

$$\text{CG} = \frac{\sqrt{4b^2 + a^2 - 4\,a\,b\,\text{cosin. B}}}{3}, \text{ und GZ, welche Linie aber für diesen Fall (Fig. 64. e.) GH hieß, ist}$$

$$= \frac{\sqrt{(3\,\mathfrak{R} - 2a^2 - 2b^2 + 2a\,b\,\text{cosin. B})}}{3}$$

Eben so kann man nun bey fortgesezter Rechnung, wie viel auch Punkte gegeben seyn mögen, durch ähnliche Formeln den Halbmesser des zu beschreibenden Kreises, und die Lage seines Mittelpunkts bestimmen. Fährt man noch etwas weiter zu rechnen fort, so erhält man bald ein allgemeines Gesez, unter welchem alle hierzu nothwendige Formeln stehen. Sind nemlich aus einer beliebigen Anzahl Punkte A, B, C, D, E, F u. s. w. an einen Punkt Z hin gerade Linien AZ, BZ, CZ, DZ, EZ, FZ u. s. w. gezogen, und sind die über ihnen be-

ſchriebene der Gattung nach gegebene Figuren von der Beſchaffenheit, daß die

Figur über AZ zu dem Quadrat über AZ wie $\alpha : 1$
— — BZ — — — — BZ — $\beta : 1$
— — CZ — — — — CZ — $\gamma : 1$
— — DZ — — — — DZ — $\delta : 1$
— — EZ — — — — EZ — $\varepsilon : 1$

u. ſ. w. ſich verhält, und heißt der gegebene Raum, welchem die Summe dieſer Figuren gleich iſt, $= R$, und die Linien $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DE = d$, $EF = e$ u. ſ. w. und die Winkel $ABC = B$, $BCD = C$, $CDE = D$, $DEF = E$ u. ſ. w. und denken wir uns den Mittelpunkt des zu beſchreibenden Kreiſes in einem Punkt G; ſo kommt alles darauf an, allgemein theils die Gröſſe des Halbmeſſers GZ, theils die Lage des Mittelpunkts G, folglich zu dieſer lezten Abſicht, wenn 2 Punkte gegeben ſind, die Linie BG; wenn 3 Punkte gegeben ſind, die Linie CG; wenn 4 gegeben ſind, die Linie DG; wenn 5 gegeben ſind, die Linie EG u. ſ. w. und zugleich, wenn 3 Punkte gegeben ſind, den Winkel BCG, wenn 4 Punkte gegeben ſind, den Winkel CDG; wenn 5 Punkte gegeben ſind, den Winkel DEG; wenn 6 Punkte gegeben ſind, den Winkel EFG u. ſ. w. zu beſtimmen. Nimmt man nun die Rechnung wirklich vor; ſo erhält man zur Beſtimmung dieſes Winkels, wenn 3 Punkte gegeben ſind, wie wir geſehen haben:

$$\text{tang. BCG} = \frac{\alpha a \text{ ſin. B}}{(\alpha+\beta) b - \alpha a \text{ coſin. B}}.$$

Eben ſo, wenn 4 Punkte gegeben ſind,

$$\text{tang. CDG} = \frac{(\alpha+\beta) b \text{ ſin. C} - \alpha a \text{ ſin. (B+C)}}{(\alpha+\beta+\gamma) c - (\alpha+\beta) b \text{ coſin. C} - \alpha a \text{ coſin. (B+C)}}$$

Eben ſo, wenn 5 Punkte gegeben ſind,

tang.

tang. DEG = [(α+β+γ)c sin. D − (α+β)b sin. (C+D)
+ αa sin. (B+C+D)] : [(α+β+γ+δ)ϑ
− (α+β+γ)c cosin. D + (α+β)b cosin. (C+D)
− αa cosin. (B+C+D)]

Eben so, wenn 6 Punkte gegeben sind; so ist

tang. EFG = [(α+β+γ+δ)b sin. E − (α+β+γ)c sin. (D+E)
+ (α+β)b sin. (C+D+E) − αa sin. (B+C+D+E)]
: [(α+β+γ+δ+ε)e − (α+β+γ+δ)b cosin. E
+ (α+β+γ)c cosin. (D+E) − (α+β)b cosin. (C+D+E)
+ αa cosin. (B+C+D+E)].

Das Gesez, wodurch die Tangente bestimmt wird, fällt sogleich in die Augen, nur muß es noch allgemein erwiesen werden. Ehe wir aber sehen, wie diß geschehen kann, wollen wir nur erst die übrigen nothwendigen Formeln zusammen stellen. So hatten wir, wenn 2 Punkte gegeben sind, gefunden, daß BG (was oben beym Isten Fall 3. BD hieß) seye $= \frac{\alpha a}{\alpha+\beta} = \frac{\sqrt{\alpha^2 a^2}}{\alpha+\beta}$.

Eben so hatten wir, wenn 3 Punkte gegeben sind,

$$CG = \frac{\sqrt{(\alpha+\beta)^2 b^2 + \alpha^2 a^2 - 2\alpha(\alpha+\beta)\, a\, b \cos in. B}}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Eben so findet man, wenn 4 Punkte gegeben sind,

DG = √[(α+β+γ)²c² + (α+β)²b² + α²a²
− 2(α+β)αabcosinB − 2(α+β+γ)(α+β)bccosin.C
+ 2(α+β+γ)αac cosin. (B+C)] : (α+β+γ+δ).

Eben so, wenn 5 Punkte gegeben sind,

EG

$$EG = \sqrt{[(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2 b^2 + (\alpha+\beta+\gamma)^2 c^2 + (\alpha+\beta)^2 b^2 + \alpha^2 a^2}$$
$$- 2(\alpha+\beta)\alpha ab\,\text{cosin.}B - 2(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta)bc\,\text{cosin.}C$$
$$- 2(\alpha+\beta+\gamma+\delta)(\alpha+\beta+\gamma)cd\,\text{cosin.}D$$
$$+ 2(\alpha+\beta+\gamma)\alpha ac\,\text{cosin.}(B+C)$$
$$+ 2(\alpha+\beta+\gamma+\delta)(\alpha+\beta)bd\,\text{cosin.}(C+D)$$
$$- 2(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\alpha ad\,\text{cosin.}(B+C+D)]$$
$$: (\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)$$

wo ſich ebenfalls das Geſez leicht überſehen läßt, beſonders, wenn man den Zähler in Claſſen eintheilt, und zu der 1ſten Claſſe alle diejenigen Glieder rechnet, welche keinen cosinus enthalten; zu der 2ten alle diejenigen, welche den cosinus eines der gegebenen Winkel; zu der 3ten alle diejenigen, welche den cosinus von der Summe von 2 der gegebenen Winkel enthalten u. ſ. w. wobey bemerkt werden kann, daß jede Claſſe in allen ihren Gliedern einerley Zeichen behält, die Claſſen ſelbſt aber mit den Zeichen + und — abwechſeln, wie auch daß die ezte Klaſſe immer 1 Glied, die vorlezte 2, und ſo immer die vorhergehende ein Glied weiter hat, als die nachfolgende; die erſte Claſſe hat, wenn e Punkte gegeben ſind, immer e — 1 Glieder, folglich ſind auch immer e — 1 Claſſen vorhanden, und die Anzahl aller Glieder iſt $= \frac{e(e-1)}{2}$.

Zur Beſtimmung des Halbmeſſers GZ endlich fanden wir, wenn 2 Punkte gegeben ſind, (in welchem Fall oben der Halbmeſſer DO hieß):

$$GZ = \frac{\sqrt{(\alpha+\beta)\mathfrak{R} - \alpha\beta a^2}}{\alpha+\beta}.$$

Eben ſo, wenn 3 Punkte gegeben ſind,

$$GZ = \sqrt{[(\alpha+\beta+\gamma)\mathfrak{R} - \alpha(\beta+\gamma)a^2 - (\alpha+\beta)\gamma b^2}$$
$$+ 2\alpha ab\,\text{cosin.}B] : (\alpha+\beta+\gamma).$$

Eben

Eben ſo findet man nun, wenn 4 Punkte gegeben ſind,

$$GZ = \sqrt{[(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\mathfrak{R} - \alpha(\beta+\gamma+\delta)a^2 - (\alpha+\beta)(\gamma+\delta)b^2 - (\alpha+\beta+\gamma)\delta c^2 + 2\alpha(\gamma+\delta)ab\cos.B + 2(\alpha+\beta)\delta bc\cos.C - 2\alpha\delta ac\cos.(B+C)] : (\alpha+\beta+\gamma+\delta)}$$

Eben ſo, wenn 5 Punkte gegeben ſind,

$$GZ = \sqrt{[(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)\mathfrak{R} - \alpha(\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)a^2 - (\alpha+\beta)(\gamma+\delta+\varepsilon)b^2 - (\alpha+\beta+\gamma)(\delta+\varepsilon)c^2 - (\alpha+\beta+\gamma+\delta)\varepsilon d^2 + 2\alpha(\gamma+\delta+\varepsilon)abcos.B + 2(\alpha+\beta)(\delta+\varepsilon)bc\cos.C + 2(\alpha+\beta+\gamma)\varepsilon cd\cos.D - 2\alpha(\delta+\varepsilon)ac\cos.(B+C) - 2(\alpha+\beta)ebd\cos.(C+D) + 2\alpha\varepsilon ad\cos.(B+C+D)] : (\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon).}$$

Man ſieht, daß von den Zeichen der Claſſen die oben gemachte Anmerkung gleichfalls gilt. Auch die Anzahl der Claſſen und der Glieder iſt blos darum immer um 1 gröſſer, als nach der vorhergehenden Beſtimmung, weil hier immer das 1ſte Glied, das ein Produkt iſt des gegebenen Raums durch die Summe ſo vieler Werthe α, β, γ, u. ſ. w. als Punkte gegeben ſind, hinzu kommt, und auch eine eigene Claſſe ausmacht. Hienach hat man alſo, wenn e Punkte gegeben ſind, immer auch e Claſſen, in der 1ſten 1 Glied, in der 2ten e — 1 Glieder, in der 3ten e — 2 Glieder u. ſ. w. endlich in der lezten wieder 1 Glied, zuſammen alſo $\frac{e(e-1)}{2} + 1$ Glieder.

Daß nun die Geſeze, welchen dieſe Formeln folgen, allgemein wahr ſeyen, wird erwieſen ſeyn, wenn gezeigt werden kann, daraus daß ſie für e gegebene Punkte

Punkte gelten, folge zugleich, daß ſie auch für e+1 gegebene Punkte gelten. Um nun den Anfang mit der lezten Formel zu machen, welche den Halbmeſſer des zu beſchreibenden Kreiſes ausdrükt; ſo wollen wir erweiſen, daß, wenn bey e Punkten das beobachtete Geſez (das wohl nicht nöthig ſeyn wird, hier erſt ſeinen einzelnen Theilen nach wörtlich auszudruken, da es in der Formel ſelbſt ſchon deutlich genug liegt, und auch durch das folgende erläutert werden wird) Statt finde, d. h. wenn bey e gegebenen Punkten

$$
\begin{aligned}
GZ = \sqrt{}\,[&(\alpha+\beta+\gamma\ldots+\varrho)\,\mathfrak{R}\\
&-\alpha(\beta+\gamma+\delta\ldots+\varrho)a^2-(\alpha+\beta)(\gamma+\delta\ldots+\varrho)b^2\\
&-(\alpha+\beta+\gamma)(\delta\ldots+\varrho)c^2\ldots.-(\alpha+\beta\ldots+\pi)\varrho p^2\\
&+2\alpha(\gamma+\delta\ldots+\varrho)\,ab\cos\mathrm{in}B+2(\alpha+\beta)(\delta+\varepsilon\ldots+\varrho)bc\cos\mathrm{in}.C\\
&+2(\alpha+\beta+\gamma)(\varepsilon\ldots+\varrho)\,cd\cos\mathrm{in}.D\ldots\ldots\\
&+2(\alpha+\beta+\gamma\ldots+o)\varrho\,op\cos\mathrm{in}.P\\
&-2\alpha(\delta+\varepsilon\ldots+\varrho)\,ac\cos\mathrm{in}.(B+C)\\
&\quad-2(\alpha+\beta)(\varepsilon\ldots+\varrho)\,bd\cos\mathrm{in}.(C+D)\\
&-2(\alpha+\beta+\gamma)(\zeta\ldots+\varrho)\,ce\cos\mathrm{in}.(D+E)\ldots\ldots\\
&-2(\alpha+\beta\ldots+\nu)\varrho\,np\cos\mathrm{in}.(O+P)\\
&+2\alpha(\varepsilon+\zeta\ldots+\varrho)\,ad\cos\mathrm{in}.(B+C+D)\\
&+2(\alpha+\beta)(\zeta\ldots+\varrho)\,be\cos\mathrm{in}.(C+D+E)\\
&\ldots+2(\alpha+\beta\ldots+\mu)\varrho\,mp\cos\mathrm{in}.(N+O+P)\\
&-\text{u. ſ. w.}\quad\text{u. ſ. w.}\\
&\pm 2\alpha(\pi+\varrho)\,ao\cos\mathrm{in}.(B+C\ldots+O)\\
&\pm 2(\alpha+\beta)\varrho\,bp\cos\mathrm{in}.(C+D\ldots+P)\\
&\pm 2\alpha\varrho\,ap\cos\mathrm{in}.(B+C\ldots+P)]\\
&:(\alpha+\beta+\gamma\ldots.+\varrho)
\end{aligned}
$$

daß alsdann bey e+1 Punkten das nemliche Geſez Statt finden werde. Dieſer Beweis kann vermittelſt der nemlichen Betrachtungen geführt werden, die Simſon

 braucht,

braucht, um die für eine gewisse Anzahl Punkte gebrauchte Analyse und Komposition auf eine um Eins grössere Anzahl von Punkten anwenden zu können, oder, was eben darauf hinaus kommt, um diese leztere Anzahl von Punkten auf eine um Eins geringere Anzahl zurük zu bringen. Es seye nemlich Fig. 64. k eine beliebige Anzahl Punkte A, B, C u. s. w. gegeben, und von ihnen an einen andern E hin gerade Linien gezogen, und die Summe der über ihnen beschriebenen der Gattung nach gegebenen Figuren a, b, c u. s. w. seye gleich einem gegebenen Raum = R, und man theile die Linie AE in dem Punkt F so, und finde FG so, daß

BF : FG = a : AE^2 = α : 1

FG : AF = BE^2 : b = 1 : β; so ist folglich

BF : AF = α : β, und AB : AF = $\alpha+\beta$: β

folglich, wenn AB = a gesezt wird, AF = $\frac{\beta a}{\alpha+\beta}$;

BF = $\frac{\alpha a}{\alpha+\beta}$ und AB : FG = $\alpha+\beta$: 1. Nun zeigt Simson, daß, wenn man die Linie FE zieht, a+b gleich seye einem gegebenen Raum H, und einer über FE beschriebenen Figur e, die sich zu dem Quadrat über FE verhalte, wie AB : FG, d. h. wie $\alpha+\beta$: 1. Dieser gegebene Raum H ist nemlich nach dem Zus. des 10ten Lehns. = den Rechteken FD × DA + LD × DB der dortigen Figur. Es ist aber dort HD : DA = FC × CA : CA^2 = α : 1. Nun ist, was dort DA hieß, hier AF oder $\frac{\beta a}{\alpha+\beta}$, folglich das dortige HD = $\frac{\alpha\beta a}{\alpha+\beta}$, und das dortige Rechtek HDA hier = $\frac{\alpha\beta^2 a^2}{(\alpha+\beta)^2}$. Eben so ist im Zus. des 10ten

Lehns.

hnſ. LD : DB = β : 1, aber das dortige DB hier = BF = $\frac{\alpha a}{\alpha+\beta}$, alſo das dortige LD = $\frac{\beta\alpha a}{\alpha+\beta}$, und das dortige Rechteck LDB = $\frac{\beta\alpha^2 a^2}{(\alpha+\beta)^2}$; folglich der Raum H = $\frac{\alpha\beta a^2}{\alpha+\beta}$, mithin a+b = $\frac{\alpha\beta a^2}{\alpha+\beta}$+e. Da nun a + b + c + u. ſ. w. = R; ſo iſt e+c . . . u. ſ. w. = R − $\frac{\alpha\beta a^2}{\alpha+\beta}$, und es iſt die Anzahl der beſchriebenen Figuren dadurch um Eins geringer gemacht, weil jezt ſtatt a + b nur die Figur e vorkommt.

Will man nun ſo eine Anzahl gegebener Punkte auf eine um Eins geringere Anzahl reduciren; ſo muß man mithin jezt den Punkt F ſtatt des vorhin vorkommenden Punkts A; die Figur über FE ſtatt der über AE; folglich das Verhältniß α+β: 1 ſtatt des Verhältniſſes α: 1 ſezen; und eben ſo die Linie FC ſtatt AB; CD ſtatt BC u. ſ. w. ſubſtituiren; endlich noch eben ſo den Winkel FCD ſtatt des Winkels B u. ſ. w. Man muß alſo vor allen Dingen wiſſen, was der Werth der Linie FC, des Winkels FCD u. ſ. w. iſt.

Hieſſen nun vorhin die Linien AB = a, BC = b, CD = c u. ſ. w. der Winkel ABC = B, BCD = C u. ſ. w.; ſo iſt jezt in dem Dreyek FBC die Seite FB = $\frac{\alpha a}{\alpha+\beta}$, die Seite BC = b, und der Winkel B bekannt, und man findet

$$FC = \sqrt{\left(b^2 + \frac{\alpha^2 a^2}{(\alpha+\beta)^2} = \frac{2\alpha ab}{\alpha+\beta} \text{ cosin. B}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{[(\alpha+\beta)^2 b^2 + \alpha^2 a^2 - 2\alpha(\alpha+\beta) ab \text{ cosin. B})}}{\alpha+\beta}$$

Dieſen Werth muß man alſo immer ſtatt deſſen, was vorher a war, ſubſtituiren, wenn man die Formeln, die für eine um Eins geringere Anzahl von Punkten galten, auf eine um Eins gröſſere Anzahl anwenden will.

Ferner hat man

$$\text{ſin. BCF} = \frac{\text{BF. ſin. B}}{\sqrt{(\text{BF}^2 + \text{BC}^2 - 2\,\text{BF. BC coſin. B})}}$$

$$= \frac{\alpha\, a \text{ ſin. B.}}{\sqrt{[(\alpha+\beta)^2 b^2 + \alpha^2 a^2 - 2\alpha(\alpha+\beta)\, a\, b \text{ coſin. B}]}}$$

$$\text{und coſin. BCF} = \frac{\text{BC} - \text{BF. coſin. B}}{\sqrt{(\text{BF}^2 + \text{BC}^2 - 2\,\text{BF. BC. coſin. B})}}$$

$$= \frac{(\alpha+\beta)\, b - \alpha\, a \text{ coſin. B}}{\sqrt{[(\alpha+\beta)^2 b^2 + \alpha^2 a^2 - 2\alpha(\alpha+\beta)\, a\, b \text{ coſin. B}]}},$$

folglich iſt ſin. FCD = ſin. (C — BCF)

$$\text{ſin. C. coſin. BCF} - \text{coſin. C. ſin. BCF}$$

$$= \frac{(\alpha+\beta)\, b \text{ ſin. C} - \alpha\, a \text{ ſin. (B+C)}}{\sqrt{[(\alpha+\beta)^2 b^2 + \alpha^2 a^2 - 2\alpha(\alpha+\beta)\, a\, b \text{ coſin. B}]}},$$

Dieſer Ausdruk muß alſo ſtatt deſſen, was vorher ſin. B war, ſubſtituirt werden. Eben ſo iſt coſin. FCD = coſin. C. coſin. BCF + ſin. C. ſin. BCF

$$= \frac{(\alpha+\beta)\, b \text{ coſin. C} - \alpha\, a \text{ coſin. (B+C)}}{\sqrt{[(\alpha+\beta)^2 b^2 + \alpha^2 a^2 - 2\alpha(\alpha+\beta)\, a\, b \text{ coſin. B}]}},$$

und dieſer Ausdruk muß ſtatt coſin. B ſubſtituirt werden.

Kommt nun noch in einer Formel vor ſin. (B+X), wo X die Summe von einer beliebigen Anzahl von Winkeln C+D+E+F u. ſ. w. bedeuten kann; ſo iſt ſin. (B+X) = ſin. B. coſin. X + coſin. B ſin. X. Sezt man nun ſtatt X jezt X′, wo X′ die Summe der Winkel

kel D+E+F+G u. ſ. w. bedeutet, und eben ſo ſtatt ſin. B, coſin. B die eben gefundenen Werthe; ſo muß ſtatt ſin. (B+X) geſezt werden

$$[(\alpha+\beta)\,b\,(\text{ſin. C coſin. X}'+\text{coſin. C. ſin. X}')$$
$$-\alpha\,a\,(\text{ſin. (B+C) coſin. X}'+\text{coſin. (B+C) ſin. X}')]$$
$$:\sqrt{[(\alpha+\beta)^2b^2+\alpha^2a^2-2\alpha\,(\alpha+\beta)\,ab\,\text{coſin. B}]}$$
$$=\frac{(\alpha+\beta)\,b\,\text{ſin. (C+X}')-\alpha\,a\,\text{ſin. (B+C+X}')}{\sqrt{[(\alpha+\beta)^2b^2+\alpha^2a^2-2\alpha\,(\alpha+\beta)\,ab\,\text{coſin. B}]}}.$$

Eben ſo, wenn coſin. (B+X) vorkommt; ſo iſt

coſin. (B+X) = coſin. B. coſin X — ſin. B. ſin. X, mithin ſtatt B und X ihren neuen Werth ſubſtituirt; ſo muß ſtatt coſin. (B+X) geſezt werden

$$[(\alpha+\beta)\,b\,(\text{coſin. C. coſin. X}'-\text{ſin. C. ſin. X}')$$
$$-\alpha\,a\,(\text{coſin. (B+C). coſin. X}'-\text{ſin. (B+C) ſin. X}')]$$
$$:\sqrt{[(\alpha+\beta)^2b^2+\alpha^2a^2-2\alpha\,(\alpha+\beta)\,ab\,\text{coſin. B}]}$$
$$=\frac{(\alpha+\beta)\,b\,\text{coſin. (C+X}')-\alpha\,a\,\text{coſin. (B+C+X}')}{\sqrt{[(\alpha+\beta)^2a^2+\alpha^2a^2-2\alpha\,(\alpha+\beta)\,ab\,\text{coſin. B}]}}$$

Endlich muß ſtatt

C	D	E	u. ſ. w.	$\mathfrak{R}$

geſezt werden

D	E	F	u. ſ. w.	$\mathfrak{R}-\frac{\alpha\beta a^2}{\alpha+\beta}$

ferner ſtatt

α	β	γ	u. ſ. w.	b	c	d	u. ſ. w.

wird ſubſtituirt

$\alpha+\beta$	γ	δ	u. ſ. w.	c	d	e	u. ſ. w.

Nimmt man nun die angezeigten Subſtitutionen in der obigen Formel von GZ für e gegebene Punkte vor; ſo erhält man für $e+1=f$ Punkte folgende Formel:

$$GZ = [(\alpha+\beta+\gamma \ldots +6)\,\mathfrak{N}$$
$$-\alpha(\beta+\gamma+\delta \ldots +6)\,a^2 - (\alpha+\beta)(\gamma+\delta \ldots +6)\,b^2$$
$$-(\alpha+\beta+\gamma)(\delta \ldots +6)\,c^2 \ldots - (\alpha+\beta \ldots +\varrho)\,6\,r^2$$
$$+2\alpha(\gamma+\delta \ldots +6)\,ab\cos in.B + 2(\alpha+\beta)(\delta \ldots +6)\,bc\cos in.C$$
$$\ldots + 2(\alpha+\beta \ldots +\pi)\,6\,p\,r\cos in.R$$
$$-2\alpha(\delta+\varepsilon \ldots +6)\,a\,c\cos in.(B+C)$$
$$-2(\alpha+\beta)(\varepsilon \ldots +6)\,b\,b\cos in.(C+D)$$
$$\ldots -2(\alpha+\beta \ldots +o)\,6\,o\,r\cos in.(P+R)$$
u. s. w. u. s. w.
$$\mp 2\alpha(\varrho+6)\,a\,p\cos in.(B+C+D \ldots +P)$$
$$\mp 2(\alpha+\beta)\,6\,b\,r\cos in.(C+D \ldots +R)$$
$$\pm 2\alpha\,6\,a\,r\cos in.(B+C \ldots +R)]$$
$$:(\alpha+\beta+\gamma \ldots +6)$$

Da nun diese Formel ganz das angegebene Geſez befolgt; ſo iſt das Geſez, wenn es von e Punkten wahr iſt, auch von e+1 gegebenen Punkten wahr. Nun gilt es aber, wie wir geſehen haben, von 2 Punkten, folglich auch von 3, folglich auch von 4, ... folglich von jeder beliebigen Anzahl gegebener Punkte.

Völlig eben ſo wird die Allgemeinheit der Geſeze für die übrigen Formeln vermittelſt eben dieſer Subſtitutionen erwieſen.

6. Satz.

Wenn aus zwey gegebenen Punkten zwey gerade Linien an einen Punkt hin gezogen werden, und aus dieſem Punkt eine gerade Linie mit einer der Lage nach gegebenen gleichlauffend gezogen wird, und dieſe auf einer andern der Lage nach gegebenen geraden Linie ein Stük abſchneidet, deſſen anderer Endpunkt gegeben iſt; und wenn die Summe von Figuren, die der Gattung nach gege-

egeben, und über den an einen Punkt hin gezogenen eraden Linien beſchrieben ſind, gleich iſt dem Rechtek, as zwiſchen einer gegebenen geraden Linie und zwiſchen em abgeſchnittenen Stük enthalten iſt: ſo berührt der Durchſchnitts-Punkt jener zwey aus den gegebenen Punkten gezogenen Linien einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

1. Fall. Wenn die der Lage nach gegebene gerade inie, auf welcher das Stük abgeſchnitten wird, durch en Punkt geht, welcher die gerade Linie zwiſchen den eyden gegebenen Punkten in zwey gleiche Theile theilt, nd die der Gattung nach gegebenen Figuren Quadrate nd.

Fig. 65. a.

Aus den gegebenen Punkten A, B ſeyen an einen unkt C hin die geraden Linien AC, BC, und durch C ne gerade Linie CD mit einer der Lage nach gegebenen eraden Linie gleichlauffend gezogen, es ſchneide CD uf einer der Lage nach gegebenen geraden Linie, die urch die Mitte von AB geht, das Stük DE ab, deſſen nderer Endpunkt E gegeben iſt, und die Summe der Quadrate über AC, BC ſeye gleich dem Rechtek, das wiſchen einer gegebenen geraden Linie, und zwiſchen em Stük DE enthalten iſt: ſo berührt der Punkt C nen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Es begegne DE der Linie AB in dem Punkt F, der, wenn DE durch die Punkte A, B ſelbſt geht; ſo ye AB in dem Punkt F in zwey gleiche Theile getheilt, an ziehe FC, und es ſeye das doppelte von FG oder g gleich der gegebenen geraden Linie; ſo iſt folglich die ppelte Summe der Quadrate über AF, FC gleich der Summe der Quadrate über AC, CB (6ter Lehnſ.), d. i. ach der Vorausſezung gleich dem doppelten Rechtek

Dieſen Werth muß man alſo immer ſtatt deſſen, was vorher a war, ſubſtituiren, wenn man die Formeln, die für eine um Eins geringere Anzahl von Punkten galten, auf eine um Eins gröſſere Anzahl anwenden will.

Ferner hat man

$$\text{ſin. BCF} = \frac{\text{BF. ſin. B}}{\sqrt{(\text{BF}^2 + \text{BC}^2 - 2\,\text{BF. BC coſin. B})}}$$

$$= \frac{\alpha\, a \text{ ſin. B.}}{\sqrt{[(\alpha+\beta)^2 b^2 + \alpha^2 a^2 - 2\alpha(\alpha+\beta)\, a\, b \text{ coſin. B}]}}$$

$$\text{und coſin. BCF} = \frac{\text{BC} - \text{BF. coſin. B}}{\sqrt{(\text{BF}^2 + \text{BC}^2 - 2\,\text{BF. BC. coſin. B})}}$$

$$= \frac{(\alpha+\beta)\, b - \alpha\, a \text{ coſin. B}}{\sqrt{[(\alpha+\beta)^2 b^2 + \alpha^2 a^2 - 2\alpha(\alpha+\beta)\, a\, b \text{ coſin. B}]}},$$

folglich iſt ſin. FCD = ſin. (C — BCF)

$$\text{ſin. C. coſin. BCF} - \text{coſin. C. ſin. BCF}$$

$$= \frac{(\alpha+\beta)\, b \text{ ſin. C} - \alpha\, a \text{ ſin. (B+C)}}{\sqrt{[(\alpha+\beta)^2 b^2 + \alpha^2 a^2 - 2\alpha(\alpha+\beta)\, a\, b \text{ coſin. B}]}},$$

Dieſer Ausdruk muß alſo ſtatt deſſen, was vorher ſin. B war, ſubſtituirt werden. Eben ſo iſt coſin. FCD = coſin. C. coſin. BCF + ſin. C. ſin. BCF

$$= \frac{(\alpha+\beta)\, b \text{ coſin. C} - \alpha\, a \text{ coſin. (B+C)}}{\sqrt{[(\alpha+\beta)^2 b^2 + \alpha^2 a^2 - 2\alpha(\alpha+\beta)\, a\, b \text{ coſin. B}]}},$$

und dieſer Ausdruk muß ſtatt coſin. B ſubſtituirt werden.

Kommt nun noch in einer Formel vor ſin. (B+X), wo X die Summe von einer beliebigen Anzahl von Winkeln C+D+E+F u. ſ. w. bedeuten kann; ſo iſt ſin. (B+X) = ſin. B. coſin. X + coſin. B ſin. X. Sezt man nun ſtatt X jezt X', wo X' die Summe der Winkel

kel D+E+F+G u. ſ. w. bedeutet, und eben ſo ſtatt ſin. B, coſin. B die eben gefundenen Werthe; ſo muß ſtatt ſin. (B+X) geſezt werden

$$= \frac{[(\alpha+\beta)\,b\,(\text{ſin. C coſin. X}' + \text{coſin. C. ſin. X}') - \alpha\,a\,(\text{ſin. (B+C) coſin. X}' + \text{coſin. (B+C) ſin. X}')]}{\sqrt{[(\alpha+\beta)^2 b^2 + \alpha^2 a^2 - 2\alpha\,(\alpha+\beta)\,a\,b\,\text{coſin. B}]}}$$

$$= \frac{(\alpha+\beta)\,b\,\text{ſin. (C+X}') - \alpha\,a\,\text{ſin. (B+C+X}')}{\sqrt{[(\alpha+\beta)^2 b^2 + \alpha^2 a^2 - 2\alpha\,(\alpha+\beta)\,a\,b\,\text{coſin. B}]}}$$

Eben ſo, wenn coſin. (B+X) vorkommt; ſo iſt coſin. (B+X) = coſin. B. coſin X — ſin. B. ſin. X, mithin ſtatt B und X ihren neuen Werth ſubſtituirt; ſo muß ſtatt coſin. (B+X) geſezt werden

$$= \frac{[(\alpha+\beta)\,b\,(\text{coſin. C. coſin. X}' - \text{ſin. C. ſin. X}') - \alpha\,a\,(\text{coſin. (B+C). coſin. X}' - \text{ſin. (B+C) ſin. X}')]}{\sqrt{[(\alpha+\beta)^2 b^2 + \alpha^2 a^2 - 2\alpha\,(\alpha+\beta)\,a\,b\,\text{coſin. B}]}}$$

$$= \frac{(\alpha+\beta)\,b\,\text{coſin. (C+X}') - \alpha\,a\,\text{coſin. (B+C+X}')}{\sqrt{[(\alpha+\beta)^2 a^2 + \alpha^2 a^2 - 2\alpha\,(\alpha+\beta)\,a\,b\,\text{coſin. B}]}}$$

Endlich muß ſtatt	C	D	E	u. ſ. w.	$\mathfrak{N}$
geſezt werden	D	E	F	u. ſ. w.	$\mathfrak{N} - \frac{\alpha\beta a^2}{\alpha+\beta}$

ferner ſtatt	α	β	γ	u. ſ. w.	b	c	d	u. ſ. w.
wird ſubſtituirt	$\alpha+\beta$	γ	δ	u. ſ. w.	c	d	e	u. ſ. w.

Nimmt man nun die angezeigten Subſtitutionen in der obigen Formel von GZ für e gegebene Punkte vor; ſo erhält man für $e+1 = f$ Punkte folgende Formel:

$$GZ = [(\alpha+\beta+\gamma \ldots +6)\,\mathfrak{N}$$
$$-\alpha(\beta+\gamma+\delta \ldots +6)\,a^2 - (\alpha+\beta)(\gamma+\delta \ldots +6)\,b^2$$
$$-(\alpha+\beta+\gamma)(\delta \ldots +6)\,c^2 \ldots - (\alpha+\beta \ldots +\varrho)\,6\,r^2$$
$$+2\alpha(\gamma+\delta \ldots +6)\,ab\cos in.B + 2(\alpha+\beta)(\delta \ldots +6)\,bc\cos in.C$$
$$\ldots + 2(\alpha+\beta \ldots +\pi)\,6\,p\,r\cos in.R$$
$$-2\alpha(\delta+\varepsilon \ldots +6)\,a\,c\cos in.(B+C)$$
$$-2(\alpha+\beta)(\varepsilon \ldots +6)\,b\,b\cos in.(C+D)$$
$$\ldots -2(\alpha+\beta \ldots +o)\,6\,o\,r\cos in.(P+R)$$
u. ſ. w. u. ſ. w.
$$\mp 2\alpha(\varrho+6)\,a\,p\cos in.(B+C+D \ldots +P)$$
$$\mp 2(\alpha+\beta)\,6\,b\,r\cos in.(C+D \ldots +R)$$
$$\pm 2\alpha\,6\,a\,r\cos in.(B+C \ldots +R)]$$
$$:(\alpha+\beta+\gamma \ldots +6)$$

Da nun dieſe Formel ganz das angegebene Geſez befolgt; ſo iſt das Geſez, wenn es von e Punkten wahr iſt, auch von e+1 gegebenen Punkten wahr. Nun gilt es aber, wie wir geſehen haben, von 2 Punkten, folglich auch von 3, folglich auch von 4, ... folglich von jeder beliebigen Anzahl gegebener Punkte.

Völlig eben ſo wird die Allgemeinheit der Geſeze für die übrigen Formeln vermittelſt eben dieſer Subſtitutionen erwieſen.

6. Saz.

Wenn aus zwey gegebenen Punkten zwey gerade Linien an einen Punkt hin gezogen werden, und aus dieſem Punkt eine gerade Linie mit einer der Lage nach gegebenen gleichlauffend gezogen wird, und dieſe auf einer andern der Lage nach gegebenen geraden Linie ein Stük abſchneidet, deſſen anderer Endpunkt gegeben iſt; und wenn die Summe von Figuren, die der Gattung nach

gege-

gegeben, und über den an einen Punkt hin gezogenen geraden Linien beschrieben sind, gleich ist dem Rechtek, das zwischen einer gegebenen geraden Linie und zwischen dem abgeschnittenen Stük enthalten ist: so berührt der Durchschnitts-Punkt jener zwey aus den gegebenen Punkten gezogenen Linien einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

1. Fall. Wenn die der Lage nach gegebene gerade Linie, auf welcher das Stük abgeschnitten wird, durch den Punkt geht, welcher die gerade Linie zwischen den beyden gegebenen Punkten in zwey gleiche Theile theilt, und die der Gattung nach gegebenen Figuren Quadrate sind.

Fig. 65. a.

Aus den gegebenen Punkten A, B seyen an einen Punkt C hin die geraden Linien AC, BC, und durch C eine gerade Linie CD mit einer der Lage nach gegebenen geraden Linie gleichlauffend gezogen, es schneide CD auf einer der Lage nach gegebenen geraden Linie, die durch die Mitte von AB geht, das Stük DE ab, dessen anderer Endpunkt E gegeben ist, und die Summe der Quadrate über AC, BC seye gleich dem Rechtek, das zwischen einer gegebenen geraden Linie, und zwischen dem Stük DE enthalten ist: so berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Es begegne DE der Linie AB in dem Punkt F, oder, wenn DE durch die Punkte A, B selbst geht; so seye AB in dem Punkt F in zwey gleiche Theile getheilt, man ziehe FC, und es seye das doppelte von FG oder Fg gleich der gegebenen geraden Linie; so ist folglich die doppelte Summe der Quadrate über AF, FC gleich der Summe der Quadrate über AC, CB (6ter Lehns.), d. i. nach der Voraussezung gleich dem doppelten Rechtek

$$GZ = [(\alpha+\beta+\gamma \ldots +6)\,\mathfrak{R}$$
$$-\alpha(\beta+\gamma+\delta \ldots +6)\,a^2 - (\alpha+\beta)(\gamma+\delta \ldots +6)\,b^2$$
$$-(\alpha+\beta+\gamma)(\delta \ldots +6)\,c^2 \ldots . - (\alpha+\beta \ldots +\varrho)\,6\mathfrak{k}^2$$
$$+2\alpha(\gamma+\delta \ldots +6)\,ab\cos in.B + 2(\alpha+\beta)(\delta \ldots +6)\,bc\cos in.C$$
$$\ldots . + 2(\alpha+\beta \ldots +\pi)\,6pr\cos in.R$$
$$-2\alpha(\delta+\varepsilon \ldots +6)\,ac\cos in.(B+C)$$
$$-2(\alpha+\beta)(\varepsilon \ldots +6)\,bd\cos in.(C+D)$$
$$\ldots . - 2(\alpha+\beta \ldots +o)\,6or\cos in.(P+R)$$
u. ſ. w. u. ſ. w.
$$\mp 2\alpha(\varrho+6)\,ap\cos in.(B+C+D \ldots +P)$$
$$\mp 2(\alpha+\beta)\,6br\cos in.(C+D \ldots . +R)$$
$$\pm 2\alpha 6ar\cos in.(B+C \ldots +R)]$$
$$:(\alpha+\beta+\gamma \ldots . +6)$$

Da nun dieſe Formel ganz das angegebene Geſez befolgt; ſo iſt das Geſez, wenn es von e Punkten wahr iſt, auch von e+1 gegebenen Punkten wahr. Nun gilt es aber, wie wir geſehen haben, von 2 Punkten, folglich auch von 3, folglich auch von 4, ... folglich von jeder beliebigen Anzahl gegebener Punkte.

Völlig eben ſo wird die Allgemeinheit der Geſeze für die übrigen Formeln vermittelſt eben dieſer Subſtitutionen erwieſen.

6. Saz.

Wenn aus zwey gegebenen Punkten zwey gerade Linien an einen Punkt hin gezogen werden, und aus dieſem Punkt eine gerade Linie mit einer der Lage nach gegebenen gleichlauffend gezogen wird, und dieſe auf einer andern der Lage nach gegebenen geraden Linie ein Stük abſchneidet, deſſen anderer Endpunkt gegeben iſt; und wenn die Summe von Figuren, die der Gattung nach

gege-

gegeben, und über den an einen Punkt hin gezogenen geraden Linien beſchrieben ſind, gleich iſt dem Rechtek, das zwiſchen einer gegebenen geraden Linie und zwiſchen dem abgeſchnittenen Stük enthalten iſt: ſo berührt der Durchſchnitts-Punkt jener zwey aus den gegebenen Punkten gezogenen Linien einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

1. Fall. Wenn die der Lage nach gegebene gerade Linie, auf welcher das Stük abgeſchnitten wird, durch den Punkt geht, welcher die gerade Linie zwiſchen den beyden gegebenen Punkten in zwey gleiche Theile theilt, und die der Gattung nach gegebenen Figuren Quadrate ſind.

Fig. 65. a.

Aus den gegebenen Punkten A, B ſeyen an einen Punkt C hin die geraden Linien AC, BC, und durch C eine gerade Linie CD mit einer der Lage nach gegebenen geraden Linie gleichlauffend gezogen, es ſchneide CD auf einer der Lage nach gegebenen geraden Linie, die durch die Mitte von AB geht, das Stük DE ab, deſſen anderer Endpunkt E gegeben iſt, und die Summe der Quadrate über AC, BC ſeye gleich dem Rechtek, das zwiſchen einer gegebenen geraden Linie, und zwiſchen dem Stük DE enthalten iſt: ſo berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Es begegne DE der Linie AB in dem Punkt F, oder, wenn DE durch die Punkte A, B ſelbſt geht; ſo ſeye AB in dem Punkt F in zwey gleiche Theile getheilt, man ziehe FC, und es ſeye das doppelte von FG oder Fg gleich der gegebenen geraden Linie; ſo iſt folglich die doppelte Summe der Quadrate über AF, FC gleich der Summe der Quadrate über AC, CB (6ter Lehnſ.), d. i. nach der Vorausſezung gleich dem doppelten Rechtek

GF×DE. Es seye aber das Rechtek GF×EH gleich dem Quadrat über der gegebenen Linie AF; so wird, weil GF gegeben ist, auch EH gegeben seyn, man schneide diese Linie EH auf der Linie ED, aus E gegen D hin ab; weil nun der Punkt E gegeben ist, so ist auch der Punkt H gegeben. Und da die Summe der Quadrate über AF, FC gleich ist dem Rechtek GF×DE, und das Quadrat über AF gleich ist dem Rechtek GF×EH; so ist der Rest nemlich das Quadrat über FC gleich dem übrig bleibenden Rechtek GF×HD. Folglich, weil aus einem gegebenen Punkt F eine gerade Linie FC, und aus dem Endpunkt C dieser Linie eine gerade Linie CD mit einer der Lage nach gegebenen geraden Linie gleichlauffend gezogen ist, und weil diese Linie CD auf einer der Lage nach gegebenen geraden Linie, die durch den Punkt F geht, ein Stük DH, dessen anderer Endpunkt H gegeben ist, abschneidet, so, daß das Quadrat über FC gleich ist dem Rechtek, das zwischen einer gegebenen geraden Linie FG, und zwischen dem Stük DH enthalten ist; so berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem 1sten oder 2ten Fall des 3ten Sazes unsers IIten Buchs.

Es liege aber der Punkt E auf eben der Seite des Punkts F, auf welcher A liegt, (denn läge er auf der entgegen gesezten Seite, so würde die Komposition völlig auf die nemliche Art gemacht werden). Weil nun das Rechtek GF × ED gröſſer ist, als das Rechtek GF×EH; so fällt der Punkt H zwischen E und D, d. i. der Punkt D liegt auf der nach H hin verlängerten Seite EH.

Fig. 65. b.

Wenn nun 1) der Punkt H auf den Punkt F fällt, d. i. wenn das Quadrat über AF gleich ist dem Rechtek GFE,

GFE, und man den Punkt H auf der Seite von E nimmt, auf welcher der Punkt F liegt; so geschieht die Komposition nach dem 1sten Fall des angeführten 3ten Sazes, weil nemlich das Quadrat über FC gleich ist dem Rechtek GFD.

Fig. 65. c.

2) Wenn das Rechtek GF × EH, d. i. das Quadrat über AF kleiner ist, als das Rechtek GFE, und man EH gegen F hin trägt; so fällt der Punkt D auf eben diese Seite, d. i. entweder zwischen F und H, oder auf die nach B hin verlängerte Linie FH, denn ED ist immer gröſſer als EH. Mithin geschieht die Komposition nach dem ersten Theil der Komposition für den 2ten Fall des 3ten Sazes.

Fig. 65. d.

3) Wenn man in einem von diesen beyden Fällen, in welchen nemlich das Quadrat über AF entweder gleich oder kleiner ist als das Rechtek GFE, die Linie Eh auf derjenigen Seite des Punkts E nimmt, auf welcher der Punkt F nicht liegt, d. i. wenn der Punkt d auf dieser Seite liegen soll, so wird, weil das Quadrat über FC gleich ist dem Rechtek GF × dh, die Komposition nach dem zweyten Theil der Komposition für den 2ten Fall des 3ten Sazes gemacht. Weil aber in diesem Fall nach der Bestimmung für den angeführten Theil des 2ten Falls des 3ten Sazes erfodert wird, daß das Rechtek gFh kleiner seye als das Quadrat über Fk dem Halbmesser eines Kreises, dessen über Fg beschriebener Abschnitt einen Winkel faßt gleich dem gegebenen cdF; so muß folglich die Summe der Rechteke gF × Eh, und gFE, d. i. die Summe des Quadrats über AF und des Rechteks gFE kleiner seyn als das Quadrat über Fk.

Fig. 65. c.

4) Wenn aber das Rechtek GF×EH, d. i. das Quadrat über AF gröſſer iſt, als das Rechtek GFE, und man EH gegen F hin trägt; ſo fällt der Punkt D auf eben die Seite, d. i. auf die nach H hin verlängerte Linie FH, folglich wird die Kompoſition nach dem 2ten Theil der Kompoſition für den 2ten Fall des 3ten Sazes gemacht. Weil aber für dieſen Fall erfodert wird, daß das Rechtek GFH kleiner ſeye als das Quadrat über FK dem Halbmeſſer eines Kreiſes, deſſen über FG beſchriebener Abſchnitt einen Winkel faßt, gleich dem gegebenen Winkel CDF; ſo muß, das gemeinſchaftliche Rechtek GFE hinzu geſezt, das Rechtek GF × EH, d. i. das Quadrat über AF kleiner ſeyn, als die Summe des Quadrats über KF und des Rechteks GFE.

5) Endlich, wenn in dieſem lezten Fall, wo nemlich das Rechtek GF×EH oder das Quadrat über AF gröſſer iſt, als das Rechtek GFE, Eh auf derjenigen Seite von E genommen wird, auf welcher F nicht iſt, ſo wird Kompoſition und Beſtimmung dieſelbe, wie im vorhergehenden bey nro. 3.

Diß alſo voraus geſchikt, welches zur Unterſcheidung der Fälle und der Beſtimmungen des Orts nothwendig war, iſt folgendes die

Kompoſition.

Fig. 65.

Es ſeyen A, B die gegebenen Punkte, aus welchen die geraden Linien an einen Punkt hin gezogen werden ſollen, E ſeye der andere auf AB gegebene Punkt; und die der Gröſſe nach gegebene gerade Linie ſeye doppelt ſo groß als die gerade Linie M. Man theile AB in dem

Punkt

Punkt F in zwey gleiche Theile, finde zu M und AF die dritte Proportionallinie N, und, wenn (Figg. 65. b. c.) das Quadrat über AF gleich ist dem Rechtek M×FE, oder kleiner ist, als dieses Rechtek; so trage man aus dem Punkt F auf die Seite von B die gerade Linie FG gleich der Linie M, und auf eben diese Seite aus dem Punkt E die gerade Linie EH gleich N. Ist nun (Fig. 65. b.) das Quadrat über AF gleich dem Rechtek GFE, so beschreibe man den Kreis CL, nemlich denjenigen von den beyden Kreisen, die mit einander den Ort für den 1sten Fall des 3ten Sazes ausmachen, welcher auf eben der Seite von F liegt, auf welcher B ist, so, daß, wenn man aus irgend einem Punkt C desselben an F die gerade Linie CF, und an FG die Linie CD mit der der Lage nach gegebenen geraden Linie gleichlauffend zieht, das Quadrat über CF gleich seye dem Rechtek, das zwischen der gegebenen geraden Linie GF, und dem Stük DF enthalten ist; ist aber (Fig. 65. c.) das Quadrat über AF kleiner als das Rechtek GFE; so beschreibe man nach der Komposition des ersten Theils des zweyten Falls jenes Sazes den Kreis CL so, daß, wenn man aus irgend einem Punkt C desselben an F die gerade Linie CF, und an FG die gerade Linie CD mit der der Lage nach gegebenen geraden Linie gleichlauffend zieht, das Quadrat über CF gleich seye dem Rechtek, das zwischen der gegebenen geraden Linie GF, und dem zwischen CD und dem gegebenen Punkt H abgeschnittenen Stük DH enthalten ist: so wird der Umfang von einem dieser Kreise, je nachdem es der Fall erfodert, der gesuchte Ort seyn, und zwar der einzige Ort, wenn die Summe des Quadrats über AF und des Rechteks GFE nicht kleiner ist, als das Quadrat über KF dem Halbmesser eines Kreises, dessen über FG beschriebener Abschnitt einen Winkel faßt gleich dem gegebenen Winkel CDF. Ist aber (Fig. 65. d.)

die

die Summe des Quadrats über AF, und des Rechteks GFE kleiner, als das Quadrat über KF, so nehme man Fg gleich FG und Eh gleich EH, und beschreibe nach dem 2ten Theil der Komposition für den 2ten Fall des angeführten 3ten Sazes den Kreis, welcher dort der Ort ist; so wird dessen Umfang so wohl als derjenige von den beyden vorhin gefundenen Umkreisen, welcher für den jedesmahligen Fall gehört, der gesuchte Ort seyn. Ist aber (Fig. 65. e.) das Quadrat über AF grösser als das Rechtek, das zwischen den geraden Linien M, FE enthalten ist; so muß, wenn es möglich seyn soll den Ort zu verzeichnen, das Quadrat über AF kleiner seyn, als die Summe des Quadrats über KF und des Rechteks GFE, wie vorhin gezeigt worden. Es seye demnach so, und man nehme die Linien FG, EH nach der besagten Richtung, und beschreibe nach dem 2ten Theil des 3ten Sazes den Kreis, der dort der Ort ist; so wird dessen Umfang der gesuchte Ort seyn, und zwar der einzige Ort, wenn die Summe des Quadrats über AF und des Rechteks GFE nicht kleiner ist, als das Quadrat über KF. Ist aber diese Summe kleiner, als das Quadrat über KF, so nehme man Fg gleich FG, und Eh gleich EH, und beschreibe nach dem angeführten 2ten Theil des 2ten Falls einen Kreis, der für den Punkt h der zugehörige Ort seye; so werden diese beyden Umkreise der gesuchte Ort seyn.

Figg. 65. a—e.

Es muß also bewiesen werden, daß, wenn man auf jedem der angeführten Umkreise irgend einen Punkt C nimmt, und an diesen die geraden Linien AC, BC, und CD mit der der Lage nach gegebenen geraden Linie gleichlauffend zieht, daß, sage ich, die Summe der Quadrate über AC, BC gleich seye dem Rechtek, das

zwi-

zwiſchen der gegebenen geraden Linie, d. i. zwiſchen einer Linie, die doppelt ſo groß iſt, als FG, und zwiſchen dem Stük ED enthalten iſt, deſſen einer Endpunkt der gegebene Punkt E iſt. Diß läßt ſich nun ſo für alle Fälle erweiſen. Nach der Verzeichnung, nemlich vermittelſt des 3ten Sazes iſt das Quadrat über FC gleich dem Rechtek GF×DH; es iſt aber das Quadrat über AF gleich dem Rechtek GF×EH; alſo iſt die Summe der Quadrate über AF, FC gleich dem Rechtek GF×ED. Mithin iſt die doppelte Summe der Quadrate über AF, FC, d. i. nach dem 6ten Lehnſ. die Summe der Quadrate über AC, BC gleich dem Rechtek 2. FG×ED.

2. Fall. Wenn die der Lage nach gegebene Linie, auf welcher das Stük abgeſchnitten wird, nicht durch den Punkt geht, der AB in zwey gleiche Theile theilt, und das übrige bleibt, wie bey dem vorhergehenden Fall.

Fig. 65. f.

Es ſeyen aus den gegebenen Punkten A, B an einen Punkt C hin die geraden Linien AC, BC, und aus C, CD mit einer der Lage nach gegebenen geraden Linie gleichlauffend gezogen, CD ſchneide auf einer andern der Lage nach gegebenen Linie ein Stük DE ab, deſſen anderer Endpunkt E gegeben ſeye, und die Summe der Quadrate über AC, BC ſeye gleich dem Rechtek, das zwiſchen einer gegebenen geraden Linie, nemlich zwiſchen der doppelt genommenen Linie M, und zwiſchen dem Stük DE enthalten iſt; ſo berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Man theile AB in F in zwey gleiche Theile, und ziehe FC; ſo iſt folglich die doppelte Summe der Quadrate über AF, FC gleich der Summe der Quadrate über AC, BC nach dem 6ten Lehnſ., d. i. nach der Vorausſezung, gleich dem Rechtek, das zwiſchen der doppelten Linie M und zwiſchen DE enthalten iſt. Alſo

iſt

die Summe des Quadrats über AF, und des Rechteks GFE kleiner, als das Quadrat über KF, so nehme man Fg gleich FG und Eh gleich EH, und beschreibe nach dem 2ten Theil der Kompoſition für den 2ten Fall des angeführten 3ten Sazes den Kreis, welcher dort der Ort iſt; ſo wird deſſen Umfang ſo wohl als derjenige von den beyden vorhin gefundenen Umkreiſen, welcher für den jedesmahligen Fall gehört, der geſuchte Ort ſeyn. Iſt aber (Fig. 65. e.) das Quadrat über AF gröſſer als das Rechtek, das zwiſchen den geraden Linien M, FE enthalten iſt; ſo muß, wenn es möglich ſeyn ſoll den Ort zu verzeichnen, das Quadrat über AF kleiner ſeyn, als die Summe des Quadrats über KF und des Rechteks GFE, wie vorhin gezeigt worden. Es ſeye demnach ſo, und man nehme die Linien FG, EH nach der beſagten Richtung, und beſchreibe nach dem 2ten Theil des 3ten Sazes den Kreis, der dort der Ort iſt; ſo wird deſſen Umfang der geſuchte Ort ſeyn, und zwar der einzige Ort, wenn die Summe des Quadrats über AF und des Rechteks GFE nicht kleiner iſt, als das Quadrat über KF. Iſt aber dieſe Summe kleiner, als das Quadrat über KF, ſo nehme man Fg gleich FG, und Eh gleich EH, und beſchreibe nach dem angeführten 2ten Theil des 2ten Falls einen Kreis, der für den Punkt h der zugehörige Ort ſeye; ſo werden dieſe beyden Umkreiſe der geſuchte Ort ſeyn.

Figg. 65. a — e.

Es muß alſo bewieſen werden, daß, wenn man auf jedem der angeführten Umkreiſe irgend einen Punkt C nimmt, und an dieſen die geraden Linien AC, BC, und CD mit der der Lage nach gegebenen geraden Linie gleichlauffend zieht, daß, ſage ich, die Summe der Quadrate über AC, BC gleich ſeye dem Rechtek, das

zwi-

zwiſchen der gegebenen geraden Linie, d. i. zwiſchen einer Linie, die doppelt ſo groß iſt, als FG, und zwiſchen dem Stük ED enthalten iſt, deſſen einer Endpunkt der gegebene Punkt E iſt. Dieß läßt ſich nun ſo für alle Fälle erweiſen. Nach der Verzeichnung, nemlich vermittelſt des 3ten Sazes iſt das Quadrat über FC gleich dem Rechtek GF×DH; es iſt aber das Quadrat über AF gleich dem Rechtek GF×EH; alſo iſt die Summe der Quadrate über AF, FC gleich dem Rechtek GF×ED. Mithin iſt die doppelte Summe der Quadrate über AF, FC, d. i. nach dem 6ten Lehnſ. die Summe der Quadrate über AC, BC gleich dem Rechtek 2. FG×ED.

2. Fall. Wenn die der Lage nach gegebene Linie, auf welcher das Stük abgeſchnitten wird, nicht durch den Punkt geht, der AB in zwey gleiche Theile theilt, und das übrige bleibt, wie bey dem vorhergehenden Fall.

Fig. 65. f.

Es ſeyen aus den gegebenen Punkten A, B an einen Punkt C hin die geraden Linien AC, BC, und aus C, CD mit einer der Lage nach gegebenen geraden Linie gleichlauffend gezogen, CD ſchneide auf einer andern der Lage nach gegebenen Linie ein Stük DE ab, deſſen anderer Endpunkt E gegeben ſeye, und die Summe der Quadrate über AC, BC ſeye gleich dem Rechtek, das zwiſchen einer gegebenen geraden Linie, nemlich zwiſchen der doppelt genommenen Linie M, und zwiſchen dem Stük DE enthalten iſt; ſo berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Man theile AB in F in zwey gleiche Theile, und ziehe FC; ſo iſt folglich die doppelte Summe der Quadrate über AF, FC gleich der Summe der Quadrate über AC, BC nach dem 6ten Lehnſ., d. i. nach der Vorausſezung, gleich dem Rechtek, das zwiſchen der doppelten Linie M und zwiſchen DE enthalten iſt. Alſo

iſt

ist die Summe der Quadrate über AF, FC gleich dem Rechtek, das zwischen M, und DE enthalten ist. Es seye das zwischen M, und EH enthaltene Rechtek gleich dem Quadrat über AF; so ist der Rest, nemlich das Quadrat über FC gleich dem zwischen M und DH enthaltenen Rechtek.

Weil also aus einem gegebenen Punkt F eine gerade Linie FC, und aus ihrem Endpunkt C eine gerade mit einer der Lage nach gegebenen Linie gleichlauffende Linie CD gezogen ist, die auf einer geraden Linie, die nicht durch den Punkt F geht, ein Stük DH abschneidet, dessen anderer Endpunkt H gegeben ist, und das Quadrat über FC gleich ist dem Rechtek, das zwischen der gegebenen geraden Linie M, und zwischen DH enthalten ist; so berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Kreis nach dem 3ten Fall des 3ten Sazes unsers IIten Buchs. Und nach geschehener Verzeichnung, durch welche jener dritte Fall auf den zweyten zurük gebracht wird, wird dieser Fall völlig eben so erwiesen werden, wie der vorhergehende.

3. Fall. Wenn die der Gattung nach gegebenen Figuren keine Quadrate sind, und das übrige bleibt, wie bey einem der vorhergehenden Fälle.

Fig. 65. g.

Aus den gegebenen Punkten A, B seyen an einen Punkt C hin die geraden Linien AC, BC, und durch C, CD mit einer der Lage nach gegebenen geraden Linie gleichlauffend gezogen, CD schneide auf einer der Lage nach gegebenen geraden Linie ein Stük DE ab, dessen anderer Endpunkt E gegeben seye, und es seye die Summe der über AC, BC beschriebenen der Gattung nach gegebenen Figuren gleich dem Rechtek, das zwischen einer gegebenen geraden Linie, und zwischen dem Stük DE ent-

thalten iſt; ſo berührt der Punkt C einen der Lage
ch gegebenen Umkreis.

Es ſeye a die über AC, b die über BC beſchriebene
gur; ſo ſind (53. D.) die Verhältniſſe von a zu dem
uadrat über AC, und von b zu dem Quadrat über BC
geben; folglich, weil AB der Lage und Gröſſe nach
geben iſt, ſo iſt nach dem 9ten Lehnſ. ein Punkt ge-
ben, der AB in 2 Stüke theilt, die zu einer gegebe-
n geraden Linie dieſe Verhältniſſe haben. Es ſeye diß
r Punkt F, und FM die gegebene gerade Linie, ſo
mlich, daß BF ſich zu FM verhalte, wie a zu dem
uadrat über AC, und AF zu FM, wie b zu dem
uadrat über BC. Man ziehe FC; ſo iſt (Zuſ. 10.
hnſ.) die Summe der Figuren a, b gleich der Summe
nes gegebenen Raums, und eines Raums, welcher zu
m Quadrat über FC das gegebene Verhältniß von AB
FM hat. Nach der Vorausſezung aber iſt die
umme der Figuren a, b gleich dem Rechtek, das zwi-
en einer gegebenen geraden Linie (ſie mag FN ſeyn),
d zwiſchen dem Stük DE enthalten iſt. Alſo iſt das
echtek FN×DE gleich der Summe eines gegebenen
aums, und eines Raums, der zu dem Quadrat über
C ein gegebenes Verhältniß hat. Es ſeye dieſer ge-
bene Raum gleich dem Rechtek FN×EH; ſo iſt folg-
) EH und der Punkt H gegeben, und das Rechtek
N×DH iſt gleich dem Raum, der zu dem Quadrat
er FC das gegebene Verhältniß hat. Wie ſich alſo
H zu FC verhält, ſo verhält ſich FC zu einer geraden
ie FG, zu welcher FN das gegebene Verhältniß hat
3. D.). Nun iſt FN gegeben, alſo auch FG; es iſt
er das Rechtek FG×DH gleich dem Quadrat über FC.
eil alſo aus einem gegebenen Punkt F die gerade Linie
, und aus ihrem Endpunkt C eine gerade Linie CD
einer der Lage nach gegebenen geraden Linie gleich-
ffend gezogen iſt, und das Quadrat über FC gleich

iſt

ist dem Rechtek, das zwischen einer gegebenen geraden Linie FG, und zwischen dem Stük DH enthalten ist, dessen anderer Endpunkt H gegeben ist: so berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem 3ten Saz dieses IIten Buchs.

Kompositon.

Ueber einer und ebenderselben geraden Linie OP seyen zwey Figuren Q, R beschrieben, von diesen seye Q diejenige, welcher die Figur über AC und R diejenige, welcher die Figur über BC ähnlich seyn soll. Und, nach dem 9ten Lehns. bestimme man auf der Linie AB den Punkt F und die Linie FM so, daß BF sich zu FM, wie Q zu dem Quadrat über OP, und AF sich zu FM verhalte, wie R zu dem Quadrat über OP. FN seye gleich der gegebenen geraden Linie, und man nehme FG : FN = FM : AB. Ueber AF seye eine Figur c ähnlich der Figur Q, und über FB seye eine Figur d ähnlich der Figur R, und man mache das Rechtek FN × EH gleich der Summe der Figuren c, d. Nach dem dritten Saz dieses Buchs beschreibe man einen Umkreis, so, daß, wenn man aus irgend einem Punkt C desselben an F die gerade Linie CF, und an FG die Linie CD mit der der Lage nach gegebenen Linie gleichlauffend zieht, daß dann das Quadrat über FC gleich seye dem Rechtek, das zwischen der gegebenen Linie FG und dem Stük DH enthalten ist, welches zwischen der Linie CD und dem gegebenen Punkt H abgeschnitten ist; so wird dieser Umkreis der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man AC, BC zieht, und über denselben die Figuren a, b beschreibt, wovon a der Figur Q, b aber der Figur R ähnlich ist; so wird die Summe der Figuren a, b gleich seyn dem Rechtek, das zwischen der gegebenen geraden Linie FN, und dem Stük DE enthalten ist. Denn nach der Verzeichnung

ist

ist AB : FM = (FN : FG, d. i. =) FN×DH : FG×DH, d. i. = FN×DH : FC². Also ist das Rechtek FN×DH derjenige Raum, der sich zu dem Quadrat über FC verhält, wie AB zu FM. Nach dem 10ten Lehns. aber ist die Summe der Figuren a, b gleich der Summe der Figuren c, d, und des Raums, der sich zu dem Quadrat über FC verhält, wie AB zu FM. Nun ist nach der Verzeichnung die Summe der Figuren c, d gleich dem Rechtek FN×EH. Mithin ist die Summe der Figuren a, b gleich der Summe der Rechteke FN×EH, FN×DH, d. i. gleich dem Rechtek FN×ED.

Berechnung.

1. und 2. Fall. Man nehme FG = der Hälfte der gegebenen Linie, und EH = N = $\frac{AF^2}{FG}$ = $\frac{AB^2}{4FG}$, und verfahre dann nach dem 3ten Saz des IIten Buchs.

3. Fall. Es verhalte sich die Figur über AC zu dem Quadrat über AC wie $\alpha : 1$, und die Figur über BC zu dem Quadrat über BC wie $\beta : 1$; so ist

$AF : FM = \beta : 1$

$FM : BF = 1 : \alpha$

mithin $AF : BF = \beta : \alpha$, und $AB : BF = \alpha+\beta : \alpha$, folglich $BF = \frac{\alpha AB}{\alpha+\beta}$, $AF = \frac{\beta AB}{\alpha+\beta}$. Und, weil $FG : FN = FM : AB = 1 : \alpha+\beta$; so ist $FG = \frac{FN}{\alpha+\beta}$. Ferner ist die Figur c, welche sich zu dem Quadrat über AF verhält, wie $\alpha : 1 = \frac{\alpha\beta^2 . AB^2}{(\alpha+\beta)^2}$,

und eben so die Figur $d = \frac{\beta\alpha^2 AB^2}{(\alpha+\beta)^2}$; folglich ist

$FN \times EH = c + d = \frac{\alpha\beta AB^2}{\alpha+\beta}$, mithin

$EH = \frac{\alpha\beta . AB^2}{(\alpha+\beta)FN}$, und nun verfahre man nach dem 3ten Saz des IIten Buchs.

7ter Saz des IIten Buchs, wie er in der Vorrede des Pappus von Alexandrien, die Halley den zwey Büchern de sectione rationis vordruken ließ, S. 39. steht:

Wenn innerhalb eines der Lage nach gegebenen Kreises ein Punkt gegeben ist, und man durch diesen Punkt jede beliebige gerade Linie zieht, und auf dieser Linie einen Punkt ausserhalb des Kreises nimmt, und das Quadrat des zwischen diesen Punkten abgeschnittenen Stüks entweder gleich ist dem Rechtek, das zwischen der ganzen Linie und dem äussern durch den Kreis abgeschnittenen Stük enthalten ist, oder der Summe dieses Rechteks, und des zwischen den innern Stüken enthaltenen Rechteks: so berührt der ausserhalb des Kreises genommene Punkt eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Fig. 66. a.

Dieser Ort ist nicht nur in Kommandins, Fermats, und Schootens Ueberseʒungen, sondern auch in Halleys griechischem Text, und, wie es scheint, in den Mscpten selbst ganz fehlerhaft. Denn man kann nicht auf jeder beliebigen geraden Linie, die durch den innerhalb des Kreises gegebenen Punkt geht, einen Punkt ausserhalb des Kreises so nehmen, daß die in dem 2ten Fall des Sazes verlangte Bedingung dabey Statt fände; sondern diß geht blos bey derjenigen geraden Linie an,

an, welche mit dem Durchmeſſer, der durch den innerhalb des Kreiſes gegebenen Punkt geht, einen rechten Winkel macht. Denn es ſeye der Kreis, deſſen Mittelpunkt A iſt, der Lage nach, und innerhalb deſſelben der Punkt B gegeben, durch B ziehe man irgend eine gerade Linie BC, die mit dem durch B gezogenen Durchmeſſer keinen rechten Winkel mache, ſo kann auf dieſer Linie kein Punkt ſeyn, ſo, daß das Quadrat des zwiſchen dieſem Punkt und B abgeſchnittenen Stüks gleich wäre der Summe des Rechteks, das zwiſchen den Stüken enthalten iſt, die zwiſchen dieſem Punkt, und den Punkten D, E, in welchen die gerade Linie dem Kreis begegnet, abgeſchnitten ſind, und des Rechteks EBD, das zwiſchen den innern Stüken enthalten iſt. Denn, wenn ein ſolcher Punkt möglich iſt, ſo ſeye es C, man ziehe die Linie AB, und fälle auf ihre Verlängerung das Perpendikel CF, und es begegne AB dem Kreis in den Punkten G, H, ferner ziehe man AC die dem Kreis in den Punkten K, L begegne. Weil nun das Rechtek LCK gleich iſt dem Rechtek ECD (36, 3. E.) und das Quadrat über AK oder AG gleich iſt der Summe des Rechteks HBG, oder EBD und des Quadrats über AB (5, 2. E.); ſo iſt, gleiches zu gleichem hinzu geſezt, die Summe des Rechteks LCK und des Quadrats über AK, d. i. (6, 2. E.) das Quadrat über AC gleich der Summe der Rechteke ECD, EBD und des Quadrats über AB; nach der Vorausſezung aber iſt die Summe der Rechteke ECD, EBD gleich dem Quadrat über BC; alſo iſt das Quadrat über AC gleich der Summe der Quadrate über BC und AB, mithin iſt der Winkel ABC ein rechter (48, 1. E.). Es iſt aber dieſer Winkel nach der Vorausſezung kein rechter, und diß iſt widerſprechend. Es giebt folglich auf der Linie BD keinen Punkt, der die Bedingung des Sazes erfüllte. Mithin iſt es unrichtig, was Fermat bey dem Anfang dieſes 7ten Sazes

in den wiederhergeſtellten ebenen Oertern des Apollonius S. 42. ſeiner Oper. Var. Mathem. behauptet, daß nemlich der 2te Theil dieſes Orts ſich leicht durch Hinzufügung gleicher Gröſſen aus dem erſten herleiten laſſe, denn dieſer 2te Theil enthält, wie gezeigt worden, einen Widerſpruch. Eben ſo führt Schooten wahrhaftig ganz am unrechten Ort eine Aufgabe an S. 291 ſeiner Exercit. Mathem., als ob ſie den Sinn von dieſem Ort des Apollonius enthielte, denn bey ihm iſt die durch den innerhalb des Kreiſes gegebenen Punkt gezogene gerade Linie, auf welcher er den Punkt auſſerhalb des Kreiſes annimmt, der Lage nach gegeben, nemlich ſenkrecht auf dem Durchmeſſer, der durch den innerhalb des Kreiſes gegebenen Punkt gezogen iſt, wie oben gezeigt worden. Der Saz aber iſt gar nicht von Punkten zu verſtehen, von welchen einer wo man will nur auf einer einzigen (der Lage nach beſtimmten) geraden Linie genommen wird, die durch den innerhalb des Kreiſes gegebenen Punkt gezogen iſt; ſondern von Punkten, von denen einer auf jeder nach Belieben durch den gegebenen Punkt gezogenen geraden Linie beſtimmt werden muß, wie man aus dem erſten Theil dieſes Orts ſieht, über deſſen Sinn gar kein Zweifel iſt.

Wenn es aber in einem beſondern aus den Bedingungen des Orts herrührenden Fall geſchieht, daß die gerade Linie, welche der Ort der Punkte iſt, die auf geraden aus dem gegebenen Punkt gezogenen Linien liegen, durch dieſen gegebenen Punkt geht; alsdann verwandelt ſich dieſer Ort in einen Lehrſaz, wie wir bey dem Ort, der in dem folgenden 9ten Saz vorkommt, bemerken können, denn ſelbiger Ort verwandelt ſich in einem gewiſſen Fall in Schootens Saz.

Ich fand aber, daß ſich in den griechiſchen Text ein Fehler eingeſchlichen habe, denn ſtatt der Worte ἢ τῷ μένῳ, ἢ τέτῳ τε καὶ τῷ ὑπὸ, muß geleſen werden ἢ τὸ

τὸ μόνον ἢ τετό τε καὶ τὸ ὑπὸ, und mit dieſer Veränderung heißt dann der Ort, wie folgt.

Apollonius 7ter Saz des IIten Buchs.

Wenn innerhalb eines der Lage nach gegebenen Kreiſes ein Punkt gegeben iſt, und man durch dieſen Punkt jede beliebige gerade Linie zieht, und auf dieſer Linie einen Punkt auſſerhalb des Kreiſes nimmt; und wenn entweder das Quadrat des zwiſchen dieſen Punkten abgeſchnittenen Stüks allein, oder die Summe dieſes Quadrats und des zwiſchen den beyden innern Stüken enthaltenen Rechteks, gleich iſt dem Rechtek, das enthalten iſt zwiſchen der ganzen Linie, und zwiſchen dem äuſſern durch den Kreis abgeſchnittenen Stük: ſo berührt der auſſerhalb des Kreiſes genommene Punkt eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Fig. 66. b.

Iſter Theil. Der Kreis, deſſen Mittelpunkt A iſt, ſeye der Lage nach, und innerhalb dieſes Kreiſes der Punkt B gegeben, durch dieſen Punkt ziehe man irgend eine gerade Linie, die dem Kreis in den Punkten C, D begegne, und auſſerhalb des Kreiſes auf der Verlängerung von CD ſeye ein Punkt E ſo, daß das Quadrat über EB gleich ſeye dem Rechtek CED: ſo berührt der Punkt E eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Man ziehe und verlängere die Linie AB, fälle auf ſie aus dem Punkt E das Perpendikel EF, und es begegne AB dem Kreis in den Punkten G, H, man ziehe GE, und dieſe Linie begegne dem Kreis in K, endlich ziehe man HK. Weil nun das Quadrat über GE gleich iſt der Summe der Quadrate über GF, FE; ſo iſt (2, 2. E.) die Summe der Rechteke EGK; GEK

gleich der Summe der Rechteke FGH, GFH und des Quadrats über FE, hievon ſind die Rechteke EGK, und FGH einander gleich (denn die Punkte F, H, K, E liegen wegen den rechten Winkeln bey F, K auf dem Umfang eines Kreiſes), mithin iſt das Rechtek GEK gleich der Summe des Rechteks GFH und des Quadrats über FE. Es iſt aber das Rechtek GEK gleich dem Rechtek CED, d. i. nach der Vorausſezung dem Quadrat über BE, d. i. der Summe der Quadrate über BF, FE; alſo iſt die Summe der Quadrate über BF, FE gleich der Summe des Rechteks GFH und des Quadrats über FE, mithin das Quadrat über BF gleich dem Rechtek GFH; und, das gemeinſchaftliche Rechtek BFH hinweg genommen, iſt der Reſt, nemlich das Rechtek HBF, gleich dem Rechtek, das zwiſchen GB und HF enthalten iſt. Folglich verhält ſich HB zu BG wie HF zu FB, und HB, BG ſind gegeben, alſo iſt das Verhältniß von HF zu FB gegeben, es iſt aber BH gegeben, mithin iſt (6, 2. D.) BF und der Punkt F gegeben, alſo iſt auch EF der Lage nach gegeben (32, D.).

Kompoſition.

Durch die Punkte A, B ziehe man eine gerade Linie, die dem Kreis in den Punkten G, H begegne, und man nehme BF : FH = GB : BH, durch den Punkt F ziehe man eine gerade Linie ſenkrecht auf BF: ſo wird dieſe der geſuchte Ort ſeyn, d. i. wenn man auf ihr irgend einen Punkt E nimmt, und die gerade Linie EB zieht, die dem Kreis in den Punkten D, C begegne; ſo wird das Quadrat über BE gleich ſeyn dem Rechtek CED. Denn, weil nach der Verzeichnung GB : BH = BF : FH, ſo iſt das Rechtek FBH gleich dem Rechtek GB×FH; man ſeze beyderſeits das Rechtek BFH hinzu; ſo iſt folglich das Quadrat über BF gleich dem

Rechtek

Rechtek GFH; alſo iſt die Summe des Quadrats über BF und des Quadrats über FE, d. i. das Quadrat über BE gleich der Summe des Rechteks GFH, und des Quadrats über FE, d. i. gleich dem Rechtek GEK, oder CED, wie bey der Analyſe gezeigt worden. Eben diß erweiſt Pappus im 159ſten Saz ſeines 7ten Buchs.

Fig. 66. c.

IIter Theil. Es ſeye die Summe des Quadrats über EB und des Rechteks CBD gleich dem Rechtek CED, das übrige bleibe wie vorhin, ſo berührt ebenfalls der Punkt E eine der Lage nach gegebene gerade Linie. Es bleibe dieſelbe Verzeichnung, weil nun die Summe des Quadrats über BE und des Rechteks CBD gleich iſt dem Rechtek CED; ſo iſt die Summe der Quadrate über BF, FE und des Rechteks GBH (35, 3. E.) gleich dem Rechtek CED, d. i. gleich der Summe des Rechteks GFH und des Quadrats über FE. Man nehme das gemeinſchaftliche Quadrat über FE hinweg, ſo iſt die Summe des Quadrats über BF und des Rechteks GBH gleich dem Rechtek GFH; man ſeze das Quadrat über AH beyderſeits hinzu, ſo iſt die Summe der Quadrate über BF, AB und des doppelten Rechteks GBH (5, 2. E.) gleich dem Quadrat über AF (6, 2. E.). Man nehme die Quadrate über AB, BF hinweg; ſo iſt das doppelte Rechtek GBH gleich dem doppelten Rechtek ABF (4, 2. E.), mithin ſind auch die Rechteke GBH, ABF ſelbſt gleich. Nun iſt GBH gegeben, mithin auch ABF, und, weil AB gegeben iſt; ſo iſt BF, und der Punkt F, mithin FE der Lage nach gegeben.

Kompoſition.

Man ziehe die Linie AB, dieſe begegne dem Kreis in den Punkten G, H, und man mache das Rechtek ABF

gleich dem Rechtek GBH, auf AF errichte man das Perpendikel FE; ſo wird diß der geſuchte Ort ſeyn, d. i. wenn man aus irgend einem Punkt E deſſelben durch B die gerade Linie EB zieht, die dem Kreis in den Punkten C, D begegnet; ſo wird die Summe des Quadrats über BE und des Rechteks CBD gleich ſeyn dem Rechtek CED. Denn, weil das doppelte Rechtek GBH gleich iſt dem doppelten Rechtek ABF; ſo iſt, die Quadrate über AB, BF hinzu geſezt, die Summe des Quadrats über AH, des Rechteks GBH, und des Quadrats über BF gleich dem Quadrat über AF; und das Quadrat über AH hinweg genommen, iſt die Summe des Rechteks GBH und des Quadrats über BF gleich dem Rechtek GFH. Man ſeze noch das Quadrat über FE hinzu; ſo iſt die Summe des Rechteks GBH, und der Quadrate über BF, FE, d. i. die Summe des Rechteks CBD, und des Quadrats über BE gleich der Summe des Rechteks GFH, und des Quadrats über FE, d. i. gleich dem Rechtek CED.

Es kann aber der vorhergehende Saz auf folgende Art noch allgemeiner gemacht und erwieſen werden.

Wenn innerhalb, oder auſſerhalb eines der Lage nach gegebenen Kreiſes ein Punkt gegeben iſt, und man durch denſelben irgend eine gerade Linie zieht, auf welcher man einen Punkt auſſerhalb des Kreiſes nimmt, und von dieſem Punkt eine gerade Linie zieht, die dem Kreis begegnet, und wenn dann das Quadrat des zwiſchen dieſen Punkten abgeſchnittenen Stüks gleich iſt dem Rechtek, das zwiſchen denjenigen Stüken der geraden an den Kreis gezogenen Linie enthalten iſt, die durch den Umfang des Kreiſes und durch die gerade Linie, die durch den gegebenen Punkt gezogen iſt, abgeſchnitten werden: oder, wenn das genannte Quadrat um einen gegebenen Raum gröſſer oder kleiner iſt, als das genannte Rechtek: oder, wenn die Summe des Quadrats und des Recht-

eks

eks gleich ist einem gegebenen Raum, nur, daß in diesem lezten Fall die gerade durch den gegebenen Punkt gezogene Linie dem Kreis begegnen, und auf derselben ein Punkt innerhalb des Kreises genommen werden muß: so berührt der genommene Punkt eine der Lage nach gegebene gerade Linie. Es kann aber dieser Saz in folgende 4 Säze getheilt werden, von welchen der erste seyn mag unser

7. Saz.

Ein Theil dieses Sazes ist einerley mit dem ersten Theil von Apollonius 7tem Saz des 2ten Buchs.

Fig. 67. a. b. c.

Es seye der Kreis, dessen Mittelpunkt A ist der Lage nach, und innerhalb oder ausserhalb desselben ein Punkt B gegeben, durch B seye irgend eine gerade Linie gezogen, und auf derselben ausserhalb des Kreises ein Punkt E so genommen, daß, wenn man aus diesem Punkt eine gerade Linie ECD an den Kreis zieht, das Quadrat über BE gleich seye dem Rechtek CED: so berührt der Punkt E eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Man ziehe AB, und die Linie AE, die dem Kreis in den Punkten F, G begegne. Weil nun das Quadrat über EB gleich ist dem Rechtek CED, d. i. (36, 3. E.) dem Rechtek FEG; so ist, das Quadrat über AG beyderseits hinzu gesezt, die Summe der Quadrate über EB, AG gleich der Summe des Rechteks FEG und des Quadrats über AG, d. i. (6, 2. E.) gleich dem Quadrat über AE, welches also um einen gegebenen Raum, nemlich um das Quadrat über AG gröſſer ist, als das Quadrat über EB. Weil also aus zwey gegebenen Punkten

gleich dem Rechtek GBH, auf AF errichte man das Perpendikel FE; so wird diß der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man aus irgend einem Punkt E desselben durch B die gerade Linie EB zieht, die dem Kreis in den Punkten C, D begegnet; so wird die Summe des Quadrats über BE und des Rechteks CBD gleich seyn dem Rechtek CED. Denn, weil das doppelte Rechtek GBH gleich ist dem doppelten Rechtek ABF; so ist, die Quadrate über AB, BF hinzu gesezt, die Summe des Quadrats über AH, des Rechteks GBH, und des Quadrats über BF gleich dem Quadrat über AF; und das Quadrat über AH hinweg genommen, ist die Summe des Rechteks GBH und des Quadrats über BF gleich dem Rechtek GFH. Man seze noch das Quadrat über FE hinzu; so ist die Summe des Rechteks GBH, und der Quadrate über BF, FE, d. i. die Summe des Rechteks CBD, und des Quadrats über BE gleich der Summe des Rechteks GFH, und des Quadrats über FE, d. i. gleich dem Rechtek CED.

Es kann aber der vorhergehende Saz auf folgende Art noch allgemeiner gemacht und erwiesen werden.

Wenn innerhalb, oder ausserhalb eines der Lage nach gegebenen Kreises ein Punkt gegeben ist, und man durch denselben irgend eine gerade Linie zieht, auf welcher man einen Punkt ausserhalb des Kreises nimmt, und von diesem Punkt eine gerade Linie zieht, die dem Kreis begegnet, und wenn dann das Quadrat des zwischen diesen Punkten abgeschnittenen Stüks gleich ist dem Rechtek, das zwischen denjenigen Stüken der geraden an den Kreis gezogenen Linie enthalten ist, die durch den Umfang des Kreises und durch die gerade Linie, die durch den gegebenen Punkt gezogen ist, abgeschnitten werden: oder, wenn das genannte Quadrat um einen gegebenen Raum grösser oder kleiner ist, als das genannte Rechtek: oder, wenn die Summe des Quadrats und des Rechteks

eks gleich ist einem gegebenen Raum, nur, daß in diesem lezten Fall die gerade durch den gegebenen Punkt gezogene Linie dem Kreis begegnen, und auf derselben ein Punkt innerhalb des Kreises genommen werden muß: so berührt der genommene Punkt eine der Lage nach gegebene gerade Linie. Es kann aber dieser Saz in folgende 4 Säze getheilt werden, von welchen der erste seyn mag unser

7. Saz.

Ein Theil dieses Sazes ist einerley mit dem ersten Theil von Apollonius 7tem Saz des 2ten Buchs.

Fig. 67. a. b. c.

Es seye der Kreis, dessen Mittelpunkt A ist der Lage nach, und innerhalb oder ausserhalb desselben ein Punkt B gegeben, durch B seye irgend eine gerade Linie gezogen, und auf derselben ausserhalb des Kreises ein Punkt E so genommen, daß, wenn man aus diesem Punkt eine gerade Linie ECD an den Kreis zieht, das Quadrat über BE gleich seye dem Rechtek CED: so berührt der Punkt E eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Man ziehe AB, und die Linie AE, die dem Kreis in den Punkten F, G begegne. Weil nun das Quadrat über EB gleich ist dem Rechtek CED, d. i. (36, 3. E.) dem Rechtek FEG; so ist, das Quadrat über AG beyderseits hinzu gesezt, die Summe der Quadrate über EB, AG gleich der Summe des Rechteks FEG und des Quadrats über AG, d. i. (6, 2. E.) gleich dem Quadrat über AE, welches also um einen gegebenen Raum, nemlich um das Quadrat über AG gröſſer ist, als das Quadrat über EB. Weil also aus zwey gegebenen Punkten

A, B zwey gerade Linien AE, BE gezogen ſind, und der Unterſchied ihrer Quadrate gleich iſt einem gegebenen Raum; ſo berührt der Punkt E eine der Lage nach gegebene gerade Linie nach dem 1ſten Saz unſers IIten Buchs.

Kompoſition.

Man ziehe vermittelſt der Kompoſition des erſten Sazes dieſes IIten Buchs die gerade Linie EH, welche der Ort iſt von den Punkten, die ſo beſchaffen ſind, daß, wenn man aus irgend einem derſelben E an die gegebenen Punkte A, B gerade Linien zieht, daß dann das Quadrat über AE um das Quadrat des Halbmeſſers des gegebenen Kreiſes gröſſer ſeye, als das Quadrat über BE (diß wird nemlich geſchehen, wenn man AB in K in zwey gleiche Theile theilt, AK bis H verlängert, ſo, daß das doppelte Rechtek KH×AB gleich ſeye dem Quadrat des Halbmeſſers AL, und dann HE ſenkrecht auf AH zieht); ſo wird HE der geſuchte Ort ſeyn. Denn nach der Verzeichnung iſt, wenn man auf HE irgend einen Punkt E nimmt, und die geraden Linien AE, BE zieht, die Summe der Quadrate über EB, AL gleich dem Quadrat über AE, mithin, wenn man das Quadrat über AL oder AG hinweg nimmt, ſo iſt das Quadrat über EB gleich dem Rechtek FEG, d. i. gleich dem Rechtek CED.

Daß aber der Punkt H, folglich die gerade Linie HE immer auſſerhalb des Kreiſes falle, wird ſo erwieſen. Erſtens, wenn der Punkt K innerhalb des Kreiſes fällt, d. i. wenn AL gröſſer iſt als LB, weil nemlich AB in K in zwey gleiche Theile getheilt iſt; ſo iſt (8, 2. E.) das Quadrat über BK und KL als einer Linie, d. i. das Quadrat über AL gröſſer als das 4fache Rechtek BK×KL; es iſt aber das doppelte Rechtek KH×AB,

d. i.

d. i. das 4fache Rechtek BKH gleich dem Quadrat über AL; mithin ist das 4fache Rechtek BKH gröſſer, als das 4fache Rechtek BKL, also KH gröſſer, als KL, und der Punkt H fällt ausserhalb des Kreises. Ist aber AL kleiner als LB, d. i. fällt der Punkt K ausserhalb des Kreises; so ist für sich klar, daß der Punkt H, der auf der Verlängerung von LK liegt, ebenfalls ausserhalb des Kreises falle. (Eben diß gilt, wenn AL gleich LB, d. i. wenn die Punkte K und L zusammen fallen. A. d. U.) Weil aber in dem Fall, wenn der Punkt B ausserhalb des Kreises liegt, das Quadrat über AL kleiner ist als das Quadrat über AB; so ist das 4fache Rechtek BKH kleiner als das 4fache Quadrat über BK, mithin KH kleiner, als KB, und der Punkt H fällt zwischen die Punkte L und B.

8. Saz.

Ein Theil dieses Sazes ist einerley mit dem 2ten Theil von Apollonius 7tem Saz des IIten Buchs.

Figg. 68. a. b. c. d.

Es seye der Punkt B innerhalb, oder ausserhalb des Kreises gegeben, und durch denselben irgend eine gerade Linie gezogen, auf dieser Linie seye ausserhalb des Kreises ein Punkt E so genommen, daß, wenn man aus demselben die gerade Linie ECD an den Kreis zieht, die Summe des Quadrats über BE und eines gegebenen Raums P gleich seye dem Rechtek CED: so berührt der Punkt E eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Man ziehe die Linie AB, diese begegne dem Kreis in den Punkten M, L, und AE, die dem Kreis in den Punkten F, G begegne; weil nun die Summe des Quadrats über EB und des gegebenen Raums P gleich ist dem

dem Rechtek CED, d. i. dem Rechtek FEG; so ist, das Quadrat über AL oder AG hinzu gesezt, die Summe des Quadrats über EB, des gegebenen Raums P, und des Quadrats über AL gleich dem Quadrat über AE; also ist das Quadrat über AE um einen gegebenen Raum, nemlich um die Summe des gegebenen Raums P und des Quadrats über AL grösser, als das Quadrat über EB. Folglich berührt der Punkt E nach dem 1sten Saz dieses IIten Buchs eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Kompositon.

Man nehme AN so, daß das Quadrat über AN gleich seye der Summe des Raums P und des Quadrats über AL, theile AB in K in zwey gleiche Theile, und verlängere AK bis an den Punkt H so, daß das doppelte Rechtek AB×KH, d. i. das 4fache Rechtek BKH gleich seye dem Quadrat über AN und ziehe HE senkrecht auf AH; so ist HE der gesuchte Ort. Denn, wenn man auf HE irgend einen Punkt E nimmt, und die geraden Linien AE, BE zieht; so ist nach dem 1sten Saz dieses IIten Buchs die Summe der Quadrate über BE, AN gleich dem Quadrat über AE, d. i. nach der Verzeichnung die Summe der Quadrate über BE, AL und des gegebenen Raums P ist gleich dem Quadrat über AE, und das Quadrat über AL oder AF hinweg genommen, ist die Summe des Quadrats über BE, und des gegebenen Raums P gleich dem Rechtek FEG, d. i. dem Rechtek CED.

Es wird aber der Punkt H, also die gerade Linie HE immer ausserhalb des Kreises fallen auch in dem Fall, wenn K innerhalb des Kreises liegt, denn wenn K ausserhalb (oder auf dem Umfang) des Kreises liegt, so ist die Sache für sich klar. Denn das 4fache Rechtek

BKH

KH ist grösser als das Quadrat über AL, d. i. grösser
s das Quadrat über BK und KL als einer Linie.
lso ist noch weit mehr (8, 2. E.) das 4fache Rechtek
KH grösser, als das 4fache Rechtek BKL; folglich
H grösser als KL.

Fig. 68. c.

Wenn aber der Punkt B ausserhalb des Kreises
egt, und der gegebene Raum P gleich ist dem Rechtek
IBL, das enthalten ist zwischen den Stüken, die zwi-
hen den Punkt B und dem Umkreis abgeschnitten sind;
ist die Summe des Quadrats über BE, des Rechteks
IBL, und des Quadrats über dem Halbmesser AL,
i. (6, 2. E.) die Summe der Quadrate über BE, BA
eich dem Quadrat über AE; folglich ist ABE ein rech-
r Winkel (48, 1. E.) mithin die gerade Linie BE der
ge nach gegeben, also geht der Ort in diesem Fall in
lgenden Lehnsaz über:

Wenn aus einem ausserhalb des Kreises gelegenen
unkt B eine gerade Linie BE auf den durch B gezogenen
urchmesser MAL senkrecht, und aus irgend einem
unkt E dieser Linie eine gerade Linie EDC gezogen
ird, die dem Kreis in den Punkten C, D begegnet;
ist die Summe des Quadrats über BE und des Recht-
s MBL gleich dem Rechtek CED. Denn, die Sum-
e der Quadrate über BE, BA ist gleich dem Quadrat
er AE, und, beyderseits das Quadrat über AL oder
F weggenommen, ist die Summe des Quadrats über
E und des Rechteks MBL gleich dem Rechtek FEG,
er CED.

Figg. 68. d. a.

Ist aber in dem Fall, wenn der Punkt B ausser-
lb des Kreises liegt, der gegebene Raum P kleiner,

als

als das Rechtek MBL; so fällt die Linie EH zwischen L und B. Ist der gegebene Raum grösser, als dieses Rechtek; so fällt EH auf die nach der Seite von B hin verlängerte Linie LB. Denn, weil das 4fache Rechtek BKH nach der Verzeichnung gleich ist der Summe des Raums P und des Quadrats über AL; so ist, je nachdem der Raum P kleiner oder grösser ist, als das Rechtek MBL, das 4fache Rechtek BKH kleiner oder grösser als (die Summe des Rechteks MBL und des Quadrats über AL, d. i. kleiner oder grösser, als das Quadrat über AB, oder) als das 4fache Quadrat über BK, mithin ist KH kleiner oder grösser als KB, und der Punkt H liegt im ersten Fall zwischen K und B, im 2ten auf der nach B hin verlängerten Linie KB.

9. Saz.

Es seye jezt das Quadrat über BE gleich der Summe des Rechteks CED, und eines gegebenen Raums P, das übrige bleibe, wie beym 8ten Saz: so berührt der Punkt E eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Figg. 69. a. b.

1. Es seye der gegebene Raum P kleiner, als das Quadrat des Halbmessers AL; weil nun das Quadrat über BE gleich ist der Summe des Rechteks CED, oder FEG, und des Raums P; so ist, das Quadrat über AF oder AL hinzu gesezt, die Summe der Quadrate über BE, AL gleich der Summe des Quadrats über AE und des gegebenen Raums P. Man nehme beyderseits den Raum P hinweg; so ist die Summe des Quadrats über BE, und des Ueberschusses des Quadrats von AL über den Raum P gleich dem Quadrat über AE; also ist das Quadrat über AE um diesen gegebenen Ueberschuß grösser,

gröſſer, als das Quadrat über BE. Mithin iſt die Sache auf den 1ſten Saz dieſes IIten Buchs zurük gebracht, und vermittelſt deſſelben wird die Auflöſung gemacht werden, wie bey dem vorhergehenden 8ten Saz.

Fig. 69. c.

Wenn aber der Punkt B innerhalb des Kreiſes liegt, und der Raum P gleich iſt dem Rechtek MBL; ſo iſt, nach der Vorausſezung, das Quadrat über BE gleich der Summe der Rechteke CED, oder FEG, und MBL, mithin iſt, das Quadrat über AL oder AF hinzu geſezt, die Summe der Quadrate über BE und AL gleich der Summe des Quadrats über AE, und des Rechteks MBL, und, das Rechtek MBL beyderſeits hinweg genommen, iſt das Quadrat über AE gleich der Summe der Quadrate über BE und AB, mithin (48, 1. E.) der Winkel ABE ein rechter, folglich BE der Lage nach gegeben. Alſo geht in dieſem Fall der Ort in folgenden Lehrſaz über:

Wenn aus einem Punkt B auf dem Durchmeſſer MAL eines Kreiſes eine gerade Linie BE ſenkrecht auf dieſem Durchmeſſer, und aus irgend einem Punkt derſelben E auſſerhalb des Kreiſes eine gerade Linie gezogen wird, die dem Kreis in den Punkten C, D begegne; ſo iſt das Quadrat über BE gleich der Summe der Rechteke CED, MBL. Denn die Summe der Quadrate über EB, BA iſt gleich (dem Quadrat über AE, d. i. der Summe des Rechteks GEF, und des Quadrats über AF, d. i.) der Summe des Rechteks CED und des Quadrats über AL; man nehme beyderſeits das Quadrat über AB hinweg; ſo iſt das Quadrat über EB gleich der Summe der Rechteke CED, und MBL. Diß iſt der Lehrſaz, den Schooten in die Stelle von Apollonius 7tem Saz des IIten Buchs ſezte, und von dieſem

als das Rechtek MBL; so fällt die Linie EH zwiſchen L und B. Iſt der gegebene Raum gröſſer, als dieſes Rechtek; ſo fällt EH auf die nach der Seite von B hin verlängerte Linie LB. Denn, weil das 4fache Rechtek BKH nach der Verzeichnung gleich iſt der Summe des Raums P und des Quadrats über AL; ſo iſt, je nachdem der Raum P kleiner oder gröſſer iſt, als das Rechtek MBL, das 4fache Rechtek BKH kleiner oder gröſſer als (die Summe des Rechteks MBL und des Quadrats über AL, d. i. kleiner oder gröſſer, als das Quadrat über AB, oder) als das 4fache Quadrat über BK, mithin iſt KH kleiner oder gröſſer als KB, und der Punkt H liegt im erſten Fall zwiſchen K und B, im 2ten auf der nach B hin verlängerten Linie KB.

9. Saz.

Es ſeye jezt das Quadrat über BE gleich der Summe des Rechteks CED, und eines gegebenen Raums P, das übrige bleibe, wie beym 8ten Saz: ſo berührt der Punkt E eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Figg. 69. a. b.

1. Es ſeye der gegebene Raum P kleiner, als das Quadrat des Halbmeſſers AL; weil nun das Quadrat über BE gleich iſt der Summe des Rechteks CED, oder FEG, und des Raums P; ſo iſt, das Quadrat über AF oder AL hinzu geſezt, die Summe der Quadrate über BE, AL gleich der Summe des Quadrats über AE und des gegebenen Raums P. Man nehme beyderſeits den Raum P hinweg; ſo iſt die Summe des Quadrats über BE, und des Ueberſchuſſes des Quadrats von AL über den Raum P gleich dem Quadrat über AE; alſo iſt das Quadrat über AE um dieſen gegebenen Ueberſchuß gröſſer,

gröſſer, als das Quadrat über BE. Mithin iſt die Sache auf den 1ſten Saz dieſes IIten Buchs zurük gebracht, und vermittelſt deſſelben wird die Auflöſung gemacht werden, wie bey dem vorhergehenden 8ten Saz.

Fig. 69. c.

Wenn aber der Punkt B innerhalb des Kreiſes liegt, und der Raum P gleich iſt dem Rechtek MBL; ſo iſt, nach der Vorausſezung, das Quadrat über BE gleich der Summe der Rechteke CED, oder FEG, und MBL, mithin iſt, das Quadrat über AL oder AF hinzu geſezt, die Summe der Quadrate über BE und AL gleich der Summe des Quadrats über AE, und des Rechteks MBL, und, das Rechtek MBL beyderſeits hinweg genommen, iſt das Quadrat über AE gleich der Summe der Quadrate über BE und AB, mithin (48, 1. E.) der Winkel ABE ein rechter, folglich BE der Lage nach gegeben. Alſo geht in dieſem Fall der Ort in folgenden Lehrſaz über:

Wenn aus einem Punkt B auf dem Durchmeſſer MAL eines Kreiſes eine gerade Linie BE ſenkrecht auf dieſem Durchmeſſer, und aus irgend einem Punkt derſelben E auſſerhalb des Kreiſes eine gerade Linie gezogen wird, die dem Kreis in den Punkten C, D begegne; ſo iſt das Quadrat über BE gleich der Summe der Rechteke CED, MBL. Denn die Summe der Quadrate über EB, BA iſt gleich (dem Quadrat über AE, d. i. der Summe des Rechteks GEF, und des Quadrats über AF, d. i.) der Summe des Rechteks CED und des Quadrats über AL; man nehme beyderſeits das Quadrat über AB hinweg; ſo iſt das Quadrat über EB gleich der Summe der Rechteke CED, und MBL. Diß iſt der Lehrſaz, den Schooten in die Stelle von Apollonius 7tem Saz des IIten Buchs ſezte, und von dieſem

A, B zwey gerade Linien AE, BE gezogen ſind, und der Unterſchied ihrer Quadrate gleich iſt einem gegebenen Raum; ſo berührt der Punkt E eine der Lage nach gegebene gerade Linie nach dem 1ſten Saz unſers IIten Buchs.

Kompoſition.

Man ziehe vermittelſt der Kompoſition des erſten Sazes dieſes IIten Buchs die gerade Linie EH, welche der Ort iſt von den Punkten, die ſo beſchaffen ſind, daß, wenn man aus irgend einem derſelben E an die gegebenen Punkte A, B gerade Linien zieht, daß dann das Quadrat über AE um das Quadrat des Halbmeſſers des gegebenen Kreiſes gröſſer ſeye, als das Quadrat über BE (diß wird nemlich geſchehen, wenn man AB in K in zwey gleiche Theile theilt, AK bis H verlängert, ſo, daß das doppelte Rechtek KH×AB gleich ſeye dem Quadrat des Halbmeſſers AL, und dann HE ſenkrecht auf AH zieht); ſo wird HE der geſuchte Ort ſeyn. Denn nach der Verzeichnung iſt, wenn man auf HE irgend einen Punkt E nimmt, und die geraden Linien AE, BE zieht, die Summe der Quadrate über EB, AL gleich dem Quadrat über AE, mithin, wenn man das Quadrat über AL oder AG hinweg nimmt, ſo iſt das Quadrat über EB gleich dem Rechtek FEG, d. i. gleich dem Rechtek CED.

Daß aber der Punkt H, folglich die gerade Linie HE immer auſſerhalb des Kreiſes falle, wird ſo erwieſen. Erſtens, wenn der Punkt K innerhalb des Kreiſes fällt, d. i. wenn AL gröſſer iſt als LB, weil nemlich AB in K in zwey gleiche Theile getheilt iſt; ſo iſt (8, 2. E.) das Quadrat über BK und KL als einer Linie, d. i. das Quadrat über AL gröſſer als das 4fache Rechtek BK×KL; es iſt aber das doppelte Rechtek KH×AB,

d. i.

d. i. das 4fache Rechtek BKH gleich dem Quadrat über AL; mithin ist das 4fache Rechtek BKH grösser, als das 4fache Rechtek BKL, also KH grösser, als KL, und der Punkt H fällt ausserhalb des Kreises. Ist aber AL kleiner als LB, d. i. fällt der Punkt K ausserhalb des Kreises; so ist für sich klar, daß der Punkt H, der auf der Verlängerung von LK liegt, ebenfalls ausserhalb des Kreises falle. (Eben diß gilt, wenn AL gleich LB, d. i. wenn die Punkte K und L zusammen fallen. A. d. U.) Weil aber in dem Fall, wenn der Punkt B ausserhalb des Kreises liegt, das Quadrat über AL kleiner ist als das Quadrat über AB; so ist das 4fache Rechtek BKH kleiner als das 4fache Quadrat über BK, mithin KH kleiner, als KB, und der Punkt H fällt zwischen die Punkte L und B.

8. Saz.

Ein Theil dieses Sazes ist einerley mit dem 2ten Theil von Apollonius 7tem Saz des IIten Buchs.

Figg. 68. a. b. c. d.

Es seye der Punkt B innerhalb, oder ausserhalb des Kreises gegeben, und durch denselben irgend eine gerade Linie gezogen, auf dieser Linie seye ausserhalb des Kreises ein Punkt E so genommen, daß, wenn man aus demselben die gerade Linie ECD an den Kreis zieht, die Summe des Quadrats über BE und eines gegebenen Raums P gleich seye dem Rechtek CED: so berührt der Punkt E eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Man ziehe die Linie AB, diese begegne dem Kreis in den Punkten M, L, und AE, die dem Kreis in den Punkten F, G begegne; weil nun die Summe des Quadrats über EB und des gegebenen Raums P gleich ist dem

dem Rechtek CED, d. i. dem Rechtek FEG; ſo iſt, das Quadrat über AL oder AG hinzu geſezt, die Summe des Quadrats über EB, des gegebenen Raums P, und des Quadrats über AL gleich dem Quadrat über AE; alſo iſt das Quadrat über AE um einen gegebenen Raum, nemlich um die Summe des gegebenen Raums P und des Quadrats über AL gröſſer, als das Quadrat über EB. Folglich berührt der Punkt E nach dem 1ſten Saz dieſes IIten Buchs eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Kompoſition.

Man nehme AN ſo, daß das Quadrat über AN gleich ſeye der Summe des Raums P und des Quadrats über AL, theile AB in K in zwey gleiche Theile, und verlängere AK bis an den Punkt H ſo, daß das doppelte Rechtek AB×KH, d. i. das 4fache Rechtek BKH gleich ſeye dem Quadrat über AN und ziehe HE ſenkrecht auf AH; ſo iſt HE der geſuchte Ort. Denn, wenn man auf HE irgend einen Punkt E nimmt, und die geraden Linien AE, BE zieht; ſo iſt nach dem 1ſten Saz dieſes IIten Buchs die Summe der Quadrate über BE, AN gleich dem Quadrat über AE, d. i. nach der Verzeichnung die Summe der Quadrate über BE, AL und des gegebenen Raums P iſt gleich dem Quadrat über AE, und das Quadrat über AL oder AF hinweg genommen, iſt die Summe des Quadrats über BE, und des gegebenen Raums P gleich dem Rechtek FEG, d. i. dem Rechtek CED.

Es wird aber der Punkt H, alſo die gerade Linie HE immer auſſerhalb des Kreiſes fallen auch in dem Fall, wenn K innerhalb des Kreiſes liegt, denn wenn K auſſerhalb (oder auf dem Umfang) des Kreiſes liegt, ſo iſt die Sache für ſich klar. Denn das 4fache Rechtek

BKH

BKH ist grösser als das Quadrat über AL, d. i. grösser als das Quadrat über BK und KL als einer Linie. Also ist noch weit mehr (8, 2. E.) das 4fache Rechtek BKH grösser, als das 4fache Rechtek BKL; folglich KH grösser als KL.

Fig. 68. c.

Wenn aber der Punkt B ausserhalb des Kreises liegt, und der gegebene Raum P gleich ist dem Rechtek MBL, das enthalten ist zwischen den Stüken, die zwischen den Punkt B und dem Umkreis abgeschnitten sind; so ist die Summe des Quadrats über BE, des Rechteks MBL, und des Quadrats über dem Halbmesser AL, d. i. (6, 2. E.) die Summe der Quadrate über BE, BA gleich dem Quadrat über AE; folglich ist ABE ein rechter Winkel (48, 1. E.) mithin die gerade Linie BE der Lage nach gegeben, also geht der Ort in diesem Fall in folgenden Lehnsaz über:

Wenn aus einem ausserhalb des Kreises gelegenen Punkt B eine gerade Linie BE auf den durch B gezogenen Durchmesser MAL senkrecht, und aus irgend einem Punkt E dieser Linie eine gerade Linie EDC gezogen wird, die dem Kreis in den Punkten C, D begegnet; so ist die Summe des Quadrats über BE und des Rechteks MBL gleich dem Rechtek CED. Denn, die Summe der Quadrate über BE, BA ist gleich dem Quadrat über AE, und, beyderseits das Quadrat über AL oder AF weggenommen, ist die Summe des Quadrats über BE und des Rechteks MBL gleich dem Rechtek FEG, oder CED.

Figg. 68. d. a.

Ist aber in dem Fall, wenn der Punkt B ausserhalb des Kreises liegt, der gegebene Raum P kleiner,

als

dem Rechtek CED, d. i. dem Rechtek FEG; so ist, das Quadrat über AL oder AG hinzu gesezt, die Summe des Quadrats über EB, des gegebenen Raums P, und des Quadrats über AL gleich dem Quadrat über AE; also ist das Quadrat über AE um einen gegebenen Raum, nemlich um die Summe des gegebenen Raums P und des Quadrats über AL grösser, als das Quadrat über EB. Folglich berührt der Punkt E nach dem 1sten Saz dieses IIten Buchs eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Komposition.

Man nehme AN so, daß das Quadrat über AN gleich seye der Summe des Raums P und des Quadrats über AL, theile AB in K in zwey gleiche Theile, und verlängere AK bis an den Punkt H so, daß das doppelte Rechtek AB×KH, d. i. das 4fache Rechtek BKH gleich seye dem Quadrat über AN und ziehe HE senkrecht auf AH; so ist HE der gesuchte Ort. Denn, wenn man auf HE irgend einen Punkt E nimmt, und die geraden Linien AE, BE zieht; so ist nach dem 1sten Saz dieses IIten Buchs die Summe der Quadrate über BE, AN gleich dem Quadrat über AE, d. i. nach der Verzeichnung die Summe der Quadrate über BE, AL und des gegebenen Raums P ist gleich dem Quadrat über AE, und das Quadrat über AL oder AF hinweg genommen, ist die Summe des Quadrats über BE, und des gegebenen Raums P gleich dem Rechtek FEG, d. i. dem Rechtek CED.

Es wird aber der Punkt H, also die gerade Linie HE immer ausserhalb des Kreises fallen auch in dem Fall, wenn K innerhalb des Kreises liegt, denn wenn K ausserhalb (oder auf dem Umfang) des Kreises liegt, so ist die Sache für sich klar. Denn das 4fache Rechtek

BKH

BKH ist grösser als das Quadrat über AL, d. i. grösser als das Quadrat über BK und KL als einer Linie. Also ist noch weit mehr (8, 2. E.) das 4fache Rechtek BKH grösser, als das 4fache Rechtek BKL; folglich KH grösser als KL.

Fig. 68. c.

Wenn aber der Punkt B ausserhalb des Kreises liegt, und der gegebene Raum P gleich ist dem Rechtek MBL, das enthalten ist zwischen den Stüken, die zwischen den Punkt B und dem Umkreis abgeschnitten sind; so ist die Summe des Quadrats über BE, des Rechteks MBL, und des Quadrats über dem Halbmesser AL, d. i. (6, 2. E.) die Summe der Quadrate über BE, BA gleich dem Quadrat über AE; folglich ist ABE ein rechter Winkel (48, 1. E.) mithin die gerade Linie BE der Lage nach gegeben, also geht der Ort in diesem Fall in folgenden Lehnsaz über:

Wenn aus einem ausserhalb des Kreises gelegenen Punkt B eine gerade Linie BE auf den durch B gezogenen Durchmesser MAL senkrecht, und aus irgend einem Punkt E dieser Linie eine gerade Linie EDC gezogen wird, die dem Kreis in den Punkten C, D begegnet; so ist die Summe des Quadrats über BE und des Rechteks MBL gleich dem Rechtek CED. Denn, die Summe der Quadrate über BE, BA ist gleich dem Quadrat über AE, und, beyderseits das Quadrat über AL oder AF weggenommen, ist die Summe des Quadrats über BE und des Rechteks MBL gleich dem Rechtek FEG, oder CED.

Figg. 68. d. a.

Ist aber in dem Fall, wenn der Punkt B ausserhalb des Kreises liegt, der gegebene Raum P kleiner,

als

als das Rechtek MBL; so fällt die Linie EH zwischen L und B. Ist der gegebene Raum gröſſer, als dieſes Rechtek; so fällt EH auf die nach der Seite von B hin verlängerte Linie LB. Denn, weil das 4fache Rechtek BKH nach der Verzeichnung gleich ist der Summe des Raums P und des Quadrats über AL; so ist, je nachdem der Raum P kleiner oder gröſſer ist, als das Rechtek MBL, das 4fache Rechtek BKH kleiner oder gröſſer als (die Summe des Rechteks MBL und des Quadrats über AL, d. i. kleiner oder gröſſer, als das Quadrat über AB, oder) als das 4fache Quadrat über BK, mithin ist KH kleiner oder gröſſer als KB, und der Punkt H liegt im ersten Fall zwischen K und B, im 2ten auf der nach B hin verlängerten Linie KB.

9. Saz.

Es seye jezt das Quadrat über BE gleich der Summe des Rechteks CED, und eines gegebenen Raums P, das übrige bleibe, wie beym 8ten Saz: so berührt der Punkt E eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Figg. 69. a. b.

1. Es seye der gegebene Raum P kleiner, als das Quadrat des Halbmessers AL; weil nun das Quadrat über BE gleich ist der Summe des Rechteks CED, oder FEG, und des Raums P; so ist, das Quadrat über AF oder AL hinzu gesezt, die Summe der Quadrate über BE, AL gleich der Summe des Quadrats über AE und des gegebenen Raums P. Man nehme beyderseits den Raum P hinweg; so ist die Summe des Quadrats über BE, und des Ueberschusses des Quadrats von AL über den Raum P gleich dem Quadrat über AE; also ist das Quadrat über AE um diesen gegebenen Ueberschuß gröſſer,

gröſſer, als das Quadrat über BE. Mithin iſt die Sache auf den 1ſten Saz dieſes IIten Buchs zurük gebracht, und vermittelſt deſſelben wird die Auflöſung gemacht werden, wie bey dem vorhergehenden 8ten Saz.

Fig. 69. c.

Wenn aber der Punkt B innerhalb des Kreiſes liegt, und der Raum P gleich iſt dem Rechtek MBL; ſo iſt, nach der Vorausſezung, das Quadrat über BE gleich der Summe der Rechteke CED, oder FEG, und MBL, mithin iſt, das Quadrat über AL oder AF hinzu geſezt, die Summe der Quadrate über BE und AL gleich der Summe des Quadrats über AE, und des Rechteks MBL, und, das Rechtek MBL beyderſeits hinweg genommen, iſt das Quadrat über AE gleich der Summe der Quadrate über BE und AB, mithin (48, 1. E.) der Winkel ABE ein rechter, folglich BE der Lage nach gegeben. Alſo geht in dieſem Fall der Ort in folgenden Lehrſaz über:

Wenn aus einem Punkt B auf dem Durchmeſſer MAL eines Kreiſes eine gerade Linie BE ſenkrecht auf dieſem Durchmeſſer, und aus irgend einem Punkt derſelben E auſſerhalb des Kreiſes eine gerade Linie gezogen wird, die dem Kreis in den Punkten C, D begegne; ſo iſt das Quadrat über BE gleich der Summe der Rechteke CED, MBL. Denn die Summe der Quadrate über EB, BA iſt gleich (dem Quadrat über AE, d. i. der Summe des Rechteks GEF, und des Quadrats über AF, d. i.) der Summe des Rechteks CED und des Quadrats über AL; man nehme beyderſeits das Quadrat über AB hinweg; ſo iſt das Quadrat über EB gleich der Summe der Rechteke CED, und MBL. Diß iſt der Lehrſaz, den Schooten in die Stelle von Apollonius 7tem Saz des IIten Buchs ſezte, und von dieſem

dieſem Lehrſaz iſt in dem vorhergehenden genug geſagt worden.

Fig. 69. d.

2. Es ſeye der gegebene Raum P gleich dem Quadrat des Halbmeſſers AL, oder AF; ſo iſt folglich das Quadrat über BE gleich dem Quadrat über AE, und BE gleich AE. Mithin berührt der Punkt E eine der Lage nach gegebene gerade Linie, nemlich ein auf der Mitte von AB errichtetes Perpendikel nach dem 1ſten Fall des 2ten Sazes dieſes IIten Buchs.

Figg. 69. e. f.

3. Es ſeye der gegebene Raum P gröſſer, als das Quadrat des Halbmeſſers, und ihr Unterſchied ſeye der Raum Q. Weil alſo das Quadrat über BE gleich iſt der Summe des Rechteks FEG, des Quadrats über dem Halbmeſſer AF, und des Raums Q; ſo iſt das Quadrat über BE gleich der Summe des Quadrats über AE, und des Raums Q: alſo berührt der Punkt E eine der Lage nach gegebene gerade Linie nach dem 1ſten Saz dieſes IIten Buchs, und die Kompoſition geſchieht wie bey dem vorhergehenden 8ten Saz. Es muß aber KH gegen A hin genommen werden, nemlich auf der Seite, die derjenigen entgegen geſezt iſt, auf welcher KH vorhin genommen wurde.

10. Saz.

Figg. 70. a. b. c.

Endlich begegne die gerade Linie BE dem Kreiſe, und es ſeye auf derſelben innerhalb des Kreiſes ein Punkt E genommen, und durch dieſen die gerade Linie CED gezogen,

gezogen, die dem Kreiſe in den Punkten C, D begegne, und es ſeye die Summe des Quadrats über BE und des Rechteks CED gleich einem gegebenen Raum: ſo berührt der Punkt E eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Fig. 70. a.

1. Man ziehe die Linie AB, die dem Kreiſe in den Punkten M, L, und AE, die ihm in den Punkten F, G begegne. Und es ſeye 1) der gegebene Raum P kleiner, als das Quadrat des Halbmeſſers, und ihr Unterſchied ſeye gleich dem Raum Q. Weil alſo die Summe des Quadrats über BE und des Rechteks CED oder FEG gleich iſt dem Raum P; ſo iſt, das Quadrat über AE beyderſeits hinzu geſezt, die Summe des Quadrats über AF oder AL, und des Quadrats über BE gleich der Summe des Quadrats über AE und des Raums P. Und, den Raum P hinweg genommen, iſt die Summe des Quadrats über BE und des Raums Q gleich dem Quadrat über AE. Alſo berührt der Punkt E eine der Lage nach gegebene gerade Linie nach dem 1ſten Saz dieſes IIten Buchs; und aus der dortigen Kompoſition erhellt, daß die gerade Linie EH, welche der Ort iſt, auf die nach dem Punkt K hin, in welchem nemlich die gerade Linie AB in zwey gleiche Theile getheilt iſt, verlängerte Linie AK falle, ſo, daß das 4fache Rechtek BKH gleich wird dem gegebenen Raum Q; es wird aber erfodert, daß H innerhalb des Kreiſes, d. i. zwiſchen K und L falle; es muß alſo das 4fache Rechtek BKH kleiner ſeyn als das 4fache Rechtek BKL, d. i. es muß der Raum Q, oder der Ueberſchuß des Quadrats von AL über den Raum P kleiner ſeyn als (8, 2. E.) der Ueberſchuß eben dieſes Quadrats von AL über das Quadrat von BL. Folglich muß der Raum P gröſſer ſeyn, als das Quadrat über BL.

Fig. 70. b.

2. Es seye der gegebene Raum P gleich dem Quadrat des Halbmessers AL, oder AG; so ist folglich die Summe des Quadrats über BE und des Rechteks CED, oder FEG gleich dem Quadrat über AG, und, das gemeinschaftliche Rechtek FEG hinweg genommen, ist das Quadrat über BE gleich dem Quadrat über AE, und BE gleich AE. Mithin berührt der Punkt E eine der Lage nach gegebene gerade Linie, nemlich das in der Mitte von AB errichtete Perpendikel nach dem 1sten Fall des 2ten Sazes dieses IIten Buchs.

Fig. 70. c.

3. Es seye der gegebene Raum P gröſſer, als das Quadrat des Halbmessers AL, oder AG, und ihr Unterschied seye gleich dem Raum Q. Weil also die Summe des Quadrats über BE und des Rechteks CED, oder FEG gleich ist (dem Raum P, d. i.) der Summe des Quadrats über AG und des Raums Q; so ist, das gemeinschaftliche Rechtek FEG hinweg genommen, das Quadrat über BE gleich der Summe des Quadrats über AE, und des Raums Q; also berührt der Punkt E eine der Lage nach gegebene gerade Linie nach dem 1sten Saz dieses IIten Buchs. Es muß aber KH gegen A hin genommen werden, nemlich auf derjenigen Seite, die der entgegen gesezt ist, auf welcher KH in dem ersten Fall genommen wurde. Die Kompositionen dieser 3 Fälle ergeben sich von selbst.

Noch giebt es einen andern allgemeinen, dem vorigen ähnlichen Saz, nemlich diesen:

Wenn innerhalb, oder ausserhalb eines Kreises ein Punkt gegeben ist, und man durch denselben irgend eine gerade Linie zieht, die dem Kreis begegnet, und auf derselben einen Punkt innerhalb des Kreises nimmt, und,

wenn

wenn das Quadrat des zwischen diesen Punkten abgeschnittenen Stüks gleich ist dem Rechtek, das enthalten ist zwischen den Stüken, welche zwischen dem genommenen Punkt, und dem Kreis liegen: oder, wenn diß Quadrat um einen gegebenen Raum grösser oder kleiner ist, als diß Rechtek: oder wenn auf der durch den gegebenen Punkt nach Belieben gezogenen geraden Linie ein Punkt ausserhalb des Kreises genommen wird, und die Summe des Quadrats und des Rechteks gleich ist einem gegebenen Raum: so berührt der genommene Punkt einen der Lage nach gegebenen Umkreis. Auch dieser Saz zerfällt in 4 Säze; von diesen seye der erste folgender.

II. Saz.

Figg. 71. a. b.

Es seye ein Kreis, dessen Mittelpunkt A ist, der Lage nach, und innerhalb oder ausserhalb desselben ein Punkt B gegeben, durch B seye irgend eine gerade Linie gezogen, die dem Kreis in den Punkten C, D begegne, und auf CD innerhalb des Kreises ein Punkt E so genommen, daß das Quadrat über BE gleich seye dem Rechtek CED: so berührt der Punkt E einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Man ziehe AB, und die Linie AE, die dem Kreis in den Punkten F, G begegne. Weil nun das Quadrat über EB gleich ist dem Rechtek CED, d. i. dem Rechtek FEG (35, 3. E.); so ist, das gemeinschaftliche Quadrat über AE hinzu gesezt, die Summe der Quadrate über AE und EB gleich dem Quadrat über AG; es ist aber das Quadrat über AG gegeben: mithin berührt der Punkt E einen der Lage nach gegebenen Umkreis

nach dem 1ſten Fall des 5ten Sazes dieſes IIten Buchs.

Kompoſition.

Man theile AB in H in zwey gleiche Theile, und verlängere AH, bis ſie dem Kreiſe in den Punkten K, L begegne; ſo erhellet aus der Beſtimmung dieſes 5ten Sazes, daß das 2fach genommene Quadrat über AH kleiner ſeyn müſſe, als der gegebene Raum, d. i. kleiner ſeyn müſſe als das Quadrat über AK; alſo muß das 4fach genommene Quadrat über AH, d. i. das Quadrat über AB kleiner ſeyn, als das 2fach genommene Quadrat über AK; folglich muß AB kleiner ſeyn, als die Diagonale des Quadrats über AK, und diß findet in dem Fall nothwendig immer Statt, wenn B innerhalb des Kreiſes liegt. Es ſeye alſo AB kleiner, als die Diagonale des Quadrats über AK; ſo iſt die Hälfte des Quadrats über AB, d. i. das 2fach genommene Quadrat über AH kleiner, als das Quadrat über AK; der Unterſchied zwiſchen dieſen beyden Räumen ſeye gleich dem doppelten Quadrat über MH, und man beſchreibe aus dem Mittelpunkt H mit dem Halbmeſſer MH einen Kreis; ſo wird deſſen Umfang der geſuchte Ort ſeyn, d. i. wenn man aus irgend einem Punkt E deſſelben durch B eine gerade Linie zieht, die dem Kreis, deſſen Mittelpunkt A iſt, in den Punkten C, D begegnet; ſo wird das Quadrat über EB gleich ſeyn dem Rechtek CED. Denn, weil nach der Verzeichnung der aus dem Mittelpunkt H beſchriebene Kreis derjenige iſt, deſſen Umfang der in dem 1ſten Fall des 5ten Sazes beſchriebene Ort iſt; ſo iſt die Summe der Quadrate über AE, BE gleich dem Quadrat über AK oder AG, und, das Quadrat über AE hinweg genommen, iſt das Quadrat über BE gleich dem Rechtek FEG, d. i. dem Rechtek CED.

Eben

Eben dieſes wird man für die Punkte M, N, in welchen der Ort der geraden Linie AR begegnet, ſo erweiſen; weil AB in H in zwey gleiche Theile getheilt iſt, ſo iſt die Summe der Quadrate über AM, MB gleich (9, oder 10, 2. E.) der doppelten Summe der Quadrate über AH, HM, d. i. dem Quadrat über AK; folglich iſt, das Quadrat über AM hinweg genommen, das Quadrat über MB gleich dem Rechtek LMK. Und eben ſo wird man erweiſen, daß das Quadrat über NB gleich ſeye dem Rechtek LNK. Und, weil die Summe der Quadrate über AM, MB gleich iſt dem Quadrat über AK; ſo iſt AM kleiner als AK, mithin fällt der Kreis NEM, welcher der Ort iſt, ganz innerhalb des gegebenen Kreiſes, d. i. der Punkt E liegt immer innerhalb deſſelben.

12. Saz.

Figg. 71. a. b.

Es ſeye jezt die Summe des Quadrats über BE und eines gegebenen Raums P gleich dem Rechtek CED oder FEG, das übrige bleibe, wie in dem vorhergehenden Saz: ſo berührt der Punkt E einen der lage nach gegebenen Umkreis.

Denn, weil die Summe des Quadrats über BE und des gegebenen Raums P gleich iſt dem Rechtek FEG; ſo iſt, beyderſeits das Quadrat über AE hinzu geſezt, die Summe der Quadrate über BE, EA und des gegebenen Raums P gleich dem Quadrat über AG, oder AK; und, den Raum P beyderſeits hinweg genommen, iſt die Summe der Quadrate über BE, AE gleich einem gegebenen Raum, nemlich dem Ueberſchuß des Quadrats von AK über den Raum P. Alſo berührt

der Punkt E einen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem 5ten Saz dieſes IIten Buchs.

Die Kompoſition geſchiehet, wie bey dem vorhergehenden Saz. Man theile nemlich wieder AB in dem Punkt H in zwey gleiche Theile; ſo muß das 2fach genommene Quadrat über AH kleiner ſeyn, als der Ueberſchuß des Quadrats von AK über den Raum P. Es ſeye alſo die Summe des doppelt genommenen Quadrats über AH und des doppelt genommenen Quadrats über HM gleich dieſem Ueberſchuß, und man beſchreibe aus dem Mittelpunkt H mit dem Halbmeſſer HM einen Kreis; ſo wird deſſen Umfang der geſuchte Ort ſeyn, welches völlig, wie bey dem vorhergehenden Saz erwieſen wird, ſo wie auch diß, daß der Kreis MEN, welcher der Ort iſt, ganz innerhalb des gegebenen Kreiſes liege.

13. Saz.

Figg. 72. a. b. c.

Es ſeye das Quadrat über BE gleich der Summe des Rechteks CED oder FEG, und eines gegebenen Raums P, das übrige bleibe wie vorhin; ſo berührt der Punkt E einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Denn, weil das Quadrat über BE gleich iſt der Summe des Rechteks FEG, und des gegebenen Raums P; ſo iſt, beyderſeits das Quadrat über AE hinzu geſezt, die Summe der Quadrate über BE, AE gleich der Summe des Quadrats über AG oder AL, und des gegebenen Raums P; alſo berührt der Punkt E einen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem 1ſten Fall des 5ten Sazes dieſes IIten Buchs.

Figg.

Figg. 72. a. b.

Man theile AB in H in zwey gleiche Theile, und verlängere AH, daß sie den Kreis in den Punkten K, L schneide, von diesen Punkten seye K der von dem Punkt B entferntere; so erhellet aus der Bestimmung des angeführten Sazes, daß das doppelt genommene Quadrat über AH kleiner seyn muß als der gegebene Raum, d. i. als die Summe des Quadrats über AL und des Raums P, und diß findet in dem Fall nothwendig immer Statt, wenn der Punkt B innerhalb des Kreises liegt. Ferner, weil erfodert wird, daß der Punkt E innerhalb des gegebenen Kreises liege, und HK die gröſte gerade Linie ist, die aus dem Punkt H an den Umkreis KDL gezogen werden kann (7, oder 8, 3. E.), der Punkt H mag innerhalb, oder ausserhalb des Kreises liegen; so ist HK gröſſer, als HE; mithin ist die doppelte Summe der Quadrate über KH, HA, d. i. (10, 2. E.) die Summe der Quadrate über KA, KB gröſſer, als die doppelte Summe der Quadrate über EH, HA, d. i. (wie man aus der Komposition des 1sten Falls des 5ten Sazes sieht) gröſſer als die Summe des Quadrats über KA und des gegebenen Raums P. Man nehme beyderseits das Quadrat über KA hinweg; so ist das Quadrat über BK gröſſer als der Raum P. Eben so ist in dem Fall (Fig. 72. c.), wenn der Punkt H ausserhalb des Kreises liegt, LH (8, 3. E.) die kleinste gerade Linie, die aus dem Punkt H an den gegebenen Kreis gezogen werden kann, der Punkt E aber ist innerhalb dieses Kreises, mithin ist LH kleiner als HE; folglich die doppelte Summe der Quadrate über AH, HL, d. i. (9, 2. E.) die Summe der Quadrate über AL, LB kleiner als die (doppelte Summe der Quadrate über AH, HE, d. i. kleiner, als die) Summe des Quadrats über AL, und des Raums P. Man nehme beyderseits das Quadrat

über AL hinweg; so ist das Quadrat über LB kleiner als der Raum P. Wenn also der Ort soll verzeichnet werden können; so muß in allen Fällen das doppelt genommene Quadrat über AH kleiner seyn als die Summe des Quadrats über AL, und des Raums P, und das Quadrat über KB muß gröſſer seyn, als der Raum P; in dem Fall aber, wenn der Punkt H ausserhalb des gegebenen Kreises liegt, muß überdiß das Quadrat über LB kleiner seyn, als eben dieser Raum P. Diß voraus geschikt ist folgendes die

Komposition.

Figg. 72. a. b. c.

Es seye P der gegebene Raum, man theile AB in H in zwey gleiche Theile. Weil nun nach der voraus geschikten Bestimmung die Summe des Quadrats über AL und des Raums P gröſſer ist, als das doppelt genommene Quadrat über AH; so seye ihr Unterschied gleich dem doppelt genommenen Quadrat über HM, und man beschreibe aus dem Mittelpunkt H mit dem Halbmesser HM einen Kreis, der der geraden Linie KL wieder in dem Punkt N begegne, und von den Punkten M, N seye N der näher bey A gelegene. Und, weil nach der Bestimmung das Quadrat über KB gröſſer ist, als der Raum P; so ist die Summe der Quadrate über BK, KA, d. i. die doppelte Summe der Quadrate über KH, HA gröſſer, als (die Summe des Quadrats über KA oder AL und des Raums P, d. i. nach der Verzeichnung gröſſer, als) die doppelte Summe der Quadrate über AH, HM. Also ist die gerade Linie KH gröſſer als HM, oder HN; folglich, wenn der Punkt H innerhalb des gegebenen Kreises liegt, dessen Durchmesser KAL ist; so liegt auch der Punkt N innerhalb desselben, also

alſo liegt der aus dem Mittelpunkt H beſchriebene Kreis, oder wenigſtens ein Theil deſſelben innerhalb des gegebenen Kreiſes. Liegt aber der Punkt H auſſerhalb des gegebenen Kreiſes; ſo iſt, weil nach der Beſtimmung für dieſen Fall, das Quadrat über LB kleiner iſt als der Raum P, die Summe der Quadrate über AL, LB, d. i. die doppelt genommene Summe der Quadrate über AH, HL kleiner als (die Summe des Quadrats über AL und des Raums P, d. i. nach der Verzeichnung als) die doppelte Summe der Quadrate über AH, HN. Mithin iſt HL kleiner, als HN; es iſt aber gezeigt worden, daß HK gröſſer ſeye, als HN, folglich fällt der Punkt N zwiſchen K und L, mithin ſchneidet in dieſem Fall der aus dem Mittelpunkt H beſchriebene Kreis nothwendig den gegebenen Kreis. Diß voraus geſchikt nehme man auf dem Umfang des beſchriebenen Kreiſes irgend einen Punkt E innerhalb des gegebenen Kreiſes, deſſen Mittelpunkt A iſt, und ziehe BE, die dem Kreis, deſſen Mittelpunkt A iſt, in den Punkten C, D begegne, und AE, die ihm in den Punkten F, G begegne; ſo iſt nach dem 1ſten Fall des 5ten Sazes dieſes IIten Buchs die Summe der Quadrate über BE, EA gleich der Summe des Quadrats über AK, oder AF, und des gegebenen Raums P; man nehme das gemeinſchaftliche Quadrat über AE hinweg; ſo iſt das Quadrat über BE gleich der Summe des Rechteks FEG oder CED und des Raums P.

Es iſt aber zu bemerken, daß in dem Fall, wenn der Punkt H innerhalb des Kreiſes fällt, das Quadrat über LB gröſſer oder kleiner ſeyn kann, als der Raum P; folglich kann LH gröſſer, gleich, oder kleiner ſeyn, als HM, im erſten Fall wird der Kreis, welcher der Ort iſt, ganz innerhalb des gegebenen Kreiſes fallen, im 2ten ihn innerhalb berühren, im 3ten aber ihn ſchneiden. Diß erweißt man auf eben die Art, wie vorhin

erwieſen wurde, daß LH kleiner ſeye als HN, oder HM in dem Fall, wenn das Quadrat über LB kleiner iſt, als der Raum P, und der Punkt H auſſerhalb des Kreiſes liegt.

14. Saz.

Figg. 73. a — e.

Endlich ſeye die Summe des Quadrats über BE und des Rechteks CED oder FEG gleich einem gegebenen Raum P; der Punkt E aber liege auſſerhalb des gegebenen Kreiſes: ſo berührt der Punkt E einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Denn, weil die Summe des Quadrats über BE und des Rechteks FEG gleich iſt dem gegebenen Raum P; ſo iſt beyderſeits das Quadrat über AG oder AK hinzu geſezt, die Summe der Quadrate über BE, AE gleich der Summe des Quadrats über AK und des Raums P, d. i. einem gegebenen Raum. Alſo berührt der Punkt E einen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem 1ſten Fall des 5ten Sazes dieſes IIten Buchs.

Man theile AB in H in zwey gleiche Theile; ſo erhellet aus der Beſtimmung für den angeführten Fall des 5ten Sazes, daß in allen Fällen das doppelte Quadrat über AH kleiner ſeyn müſſe, als die Summe des Quadrats über AK und des Raums P. Und, wenn der Punkt H innerhalb des gegebenen Kreiſes liegt; ſo muß, da HL die kleinſte Linie iſt, die aus dem Punkt H an den Umkreis gezogen werden kann, und der Punkt E auſſerhalb des Kreiſes liegt, nothwendig HL kleiner ſeyn als HE. Folglich iſt die doppelte Summe der Quadrate über AH, HL, d. i. die Summe der Quadrate über AL, BL kleiner, als (die doppelte Summe

der

der Quadrate über AH, HE, d. i. wie aus der Kompoſition des angeführten Falls erhellet, kleiner, als) die Summe des Quadrats über AL und des Raums P. Es muß alſo das Quadrat über BL kleiner ſeyn, als der Raum P. Diß voraus geſchikt iſt folgendes die

Kompoſition.

Es ſeye P der gegebene Raum; man theile AB in H in zwey gleiche Theile, und es ſeye der Ueberſchuß der Summe des Quadrats von AK oder AL und des Raums P über das doppelt genommene Quadrat von AH gleich dem doppelt genommenen Quadrat von HM, und man beſchreibe aus dem Mittelpunkt H mit dem Halbmeſſer HM einen Kreis, der der geraden Linie KL wieder in dem Punkt N begegne, und von den Punkten M, N ſeye N der näher bey A gelegene. Liegt nun (Figg. 73. b. d. e.) der Mittelpunkt H des beſchriebenen Kreiſes auſſerhalb des gegebenen Kreiſes; ſo iſt offenbahr, daß der beſchriebene Kreis auf der Seite des Punkts H gegen B hin auſſerhalb des gegebenen liege. Iſt aber der Punkt H (Figg. 73. a. c.) innerhalb des gegebenen Kreiſes; ſo iſt wegen der Beſtimmung für dieſen Fall, das Quadrat über BL kleiner als der Raum P, mithin iſt die Summe der Quadrate über AL, BL, d. i. die doppelte Summe der Quadrate über AH, HL kleiner, als (die Summe des Quadrats über AL und des Raums P, d. i. nach der Verzeichnung kleiner, als) die doppelte Summe der Quadrate über AH, HM. Mithin iſt die gerade Linie HL kleiner als HM, folglich liegt der aus dem Mittelpunkt H mit dem Halbmeſſer HM beſchriebene Kreis auf der Seite des Punkts L auſſerhalb des gegebenen Kreiſes. Man nehme auf dem Umfang des beſchriebenen Kreiſes irgend einen Punkt L auſſerhalb des gegebenen Kreiſes, und ziehe BL, die dem ge-

gebe-

gebenen Kreis in den Punkten C, D, und AE, die ihm in den Punkten F, G begegne; so ist nach dem 1sten Fall des 5ten Sazes die Summe der Quadrate über BE, EA gleich der Summe des Quadrats über AK und des Raums P. Man nehme beyderseits das Quadrat über AK oder AG hinweg; so ist die Summe des Quadrats über BE und des Rechteks FEG oder CED gleich dem gegebenen Raum P.

Es kann aber der Kreis, welcher der Ort ist, entweder den gegebenen Kreis einschliessen, (Figg. 73. a. d.) wenn nemlich der Raum P gröſſer ist, als das Quadrat über BK; oder sie können (Fig. 73. b.) beyde ganz ausserhalb einander liegen, wenn nemlich der Raum P kleiner ist als das Quadrat über BL, und der Punkt H ausserhalb des gegebenen Kreises liegt; oder endlich können (Figg. 73. c. e.) die beyden Kreise einander schneiden, nemlich, wenn der Raum P kleiner ist, als das Quadrat über BK, aber gröſſer als das Quadrat über BL, welches sich aus dem, was bey dem 13ten Saz gesagt worden, leicht wird einsehen lassen.

Simsons Anhang.

Es schien mir der Mühe werth zu seyn, den Lehnsäzen zu dem 5ten Saz des IIten Buchs noch folgende 2 beizufügen, wodurch Pappus 7ter und 8ter Lehnsaz allgemeiner gemacht werden, weil sie bey Auflösung vieler Aufgaben und Oerter von sehr gutem Gebrauch sind. Hierzu sezte ich noch den 3ten, den man bey einigen Oertern nöthig hat, wenn statt der Summe der Quadrate oder der Räume im 5ten Saz des IIten Buchs der Ueberschuß von einigen derselben über die übrigen Quadrate oder Räume gegeben ist. Endlich kam noch ein 4ter hinzu, vermittelst dessen man den 33sten Saz des Isten Buchs auf jede beliebige Anzahl gerader Linien ausdehnen kann.

1. Lehnsaz.

Figg. 74. a. b.

Wenn auf einer geraden Linie AB 2 Punkte C, D sind, wovon C zwischen A und B liegt, und wenn CE irgend eine gerade Linie ist: so ist die Summe eines Raums, der sich zum Quadrat über AD verhält, wie BC zu CE, und eines andern, der sich zum Quadrat über BD verhält, wie AC zu CE, gleich der Summe eines Raums, der sich zum Quadrat über AC verhält, wie BC zu CE, und eines andern, der sich zum Quadrat über BC verhält, wie AC zu CE, und noch eines Raums, der sich zum Quadrat über CD verhält, wie AB zu CE.

Man

Man errichte CE senkrecht auf AC, und beschreibe durch die Punkte A, B, E einen Kreis, dem CE wieder in dem Punkt F begegne, ziehe dann AF, BF, und gleichlauffend mit CF die Linie DG, die den Linien AF, BF in den Punkten G, H begegne, und an DG ziehe man FK mit CB gleichlauffend; so ist das Rechtek FCA der Raum, welcher sich zu dem Quadrat über AC verhält wie (FC zu CA, d. i. wie) BC zu CE; das Rechtek FCB ist der Raum, welcher sich zu dem Quadrat über CB wie (FC zu CB, d. i. wie) AC zu CE verhält. Und, weil

BC : CE = (FC : CA, d. i. =) GK : $\begin{cases} KF \\ CD \end{cases}$, und

AC : CE = (FC : CB, d. i. =) HK : KF; so ist (24, 5. E.)

AB : CE = GH : $\begin{cases} KF \\ CD \end{cases}$. Mithin ist das Rechtek GH × KF der Raum, welcher sich zu dem Quadrat über KF oder CD verhält, wie (GH zu KF, d. i. wie) AB zu CE. Ferner ist das Rechtek GDA der Raum, welcher sich zu dem Quadrat über AD verhält, wie (GD zu DA, d. i. wie FC zu CA, d. i. wie) CB zu CE. Endlich ist das Rechtek HDB der Raum, welcher sich zu dem Quadrat über DB verhält, wie (HD zu DB, d. i. wie FC zu CB, d. i. wie) AC zu CE. Es muß also bewiesen werden, daß die Summe der Rechteke GDA, HDB gleich seye der Summe der Rechteke FCA, FCB und GH × KF. Oder, wenn man die Dreyeke nimmt, welche die Hälften dieser Rechteke sind; so muß bewiesen werden, daß die Summe der Dreyeke GDA, HDB gleich seye der Summe der Dreyeke AFB, GFH, welches nun für sich klar ist.

Zus. Wenn CE gleich ist CB; so ist dieser Lehnsaz einerley mit Pappus 7tem Lehnsaz. Ist aber CE gleich AB; so ist, wie gezeigt worden, die Summe eines Raums, der sich zu dem Quadrat über AC verhält, wie

wie BC zu CE, und eines andern, der ſich zu dem Quadrat über BC verhält, wie AC zu CE gleich der Summe der Rechteke FCA, FCB, d. i. dem Rechtek FC×AB, d. i. (weil CE gleich iſt AB) gleich dem Rechtek FCE oder ACB. Derjenige Raum aber, der ſich zu dem Quadrat über CD verhält, wie AB zu CE, iſt das Quadrat von CD ſelbſt. In dieſem Fall kann alſo der Lehnſaz ſo ausgedrükt werden:

Wenn auf einer geraden Linie AB 2 Punkte C, D genommen werden, wovon C zwiſchen A und B liegt; ſo iſt die Summe eines Raums, der ſich zu dem Quadrat über AD verhält, wie BC zu BA, und eines andern, der ſich zum Quadrat über BD verhält, wie AC zu AB gleich der Summe des Rechteks ACB und des Quadrats über CD.

Ehe ich den 10ten Lehnſaz gefunden hatte, bediente ich mich dieſes Lehnſazes, um diejenigen Fälle des 5ten Sazes unſers IIten Buchs zu erweiſen, in welchen die der Gattung nach gegebenen Figuren keine Quadrate ſind. Andere Beweiſe dieſes Lehnſazes fanden von mir aufgefodert vorlängſt meine ehemaligen Schüler, Herr Jacob Moor, und Herr Matthäus Stevart, von welchen jener die griechiſche Sprache auf unſerer Univerſität, dieſer die Mathematik zu Edinburg mit vielem Ruhm lehrt. Der Beweis des Herrn Jacob Moor iſt denen ähnlich, die bey dem 9ten und 10ten Saz des IIten Buchs von Euklids Elementen vorkommen, welche Säze nach ſeiner richtigen Bemerkung die einfachſten Fälle dieſes Lehnſazes ſind. Herr Stevart hat auch einen andern Beweis für den lezten Fall des 10ten Lehnſazes gegeben in dem 1ſten und 2ten Saz ſeines Buchs de quibusdam Theorematibus generalibus etc. das zu Edinburg 1746. heraus kam, und deſſen Gebrauch bey dem Beweis von einigen ſchönen Säzen gezeigt.

2. Lehn-

Man errichte CE senkrecht auf AC, und beschreibe durch die Punkte A, B, E einen Kreis, dem CE wieder in dem Punkt F begegne, ziehe dann AF, BF, und gleichlauffend mit CF die Linie DG, die den Linien AF, BF in den Punkten G, H begegne, und an DG ziehe man FK mit CB gleichlauffend; so ist das Rechtek FCA der Raum, welcher sich zu dem Quadrat über AC verhält wie (FC zu CA, d. i. wie) BC zu CE; das Rechtek FCB ist der Raum, welcher sich zu dem Quadrat über CB wie (FC zu CB, d. i. wie) AC zu CE verhält. Und, weil

$BC : CE = (FC : CA, \text{d. i.} =) GK : \begin{cases} KF \\ CD \end{cases}$, und

$AC : CE = (FC : CB, \text{d. i.} =) HK : KF$; so ist (24, 5. E.)

$AB : CE = GH : \begin{cases} KF \\ CD \end{cases}$. Mithin ist das Rechtek $GH \times KF$ der Raum, welcher sich zu dem Quadrat über KF oder CD verhält, wie (GH zu KF, d. i. wie) AB zu CE. Ferner ist das Rechtek GDA der Raum, welcher sich zu dem Quadrat über AD verhält, wie (GD zu DA, d. i. wie FC zu CA, d. i. wie) CB zu CE. Endlich ist das Rechtek HDB der Raum, welcher sich zu dem Quadrat über DB verhält, wie (HD zu DB, d. i. wie FC zu CB, d. i. wie) AC zu CE. Es muß also bewiesen werden, daß die Summe der Rechteke GDA, HDB gleich seye der Summe der Rechteke FCA, FCB und $GH \times KF$. Oder, wenn man die Dreyeke nimmt, welche die Hälften dieser Rechteke sind; so muß bewiesen werden, daß die Summe der Dreyeke GDA, HDB gleich seye der Summe der Dreyeke AFB, GFH, welches nun für sich klar ist.

Zus. Wenn CE gleich ist CB; so ist dieser Lehnsaz einerley mit Pappus 7tem Lehnsaz. Ist aber CE gleich AB; so ist, wie gezeigt worden, die Summe eines Raums, der sich zu dem Quadrat über AC verhält, wie

wie BC zu CE, und eines andern, der ſich zu dem Quadrat über BC verhält, wie AC zu CE gleich der Summe der Rechteke FCA, FCB, d. i. dem Rechtek FC×AB, d. i. (weil CE gleich iſt AB) gleich dem Rechtek FCE oder ACB. Derjenige Raum aber, der ſich zu dem Quadrat über CD verhält, wie AB zu CE, iſt das Quadrat von CD ſelbſt. In dieſem Fall kann alſo der Lehnſaz ſo ausgedrükt werden:

Wenn auf einer geraden Linie AB 2 Punkte C, D genommen werden, wovon C zwiſchen A und B liegt; ſo iſt die Summe eines Raums, der ſich zu dem Quadrat über AD verhält, wie BC zu BA, und eines andern, der ſich zum Quadrat über BD verhält, wie AC zu AB gleich der Summe des Rechteks ACB und des Quadrats über CD.

Ehe ich den 10ten Lehnſaz gefunden hatte, bediente ich mich dieſes Lehnſazes, um diejenigen Fälle des 5ten Sazes unſers IIten Buchs zu erweiſen, in welchen die der Gattung nach gegebenen Figuren keine Quadrate ſind. Andere Beweiſe dieſes Lehnſazes fanden von mir aufgefodert vorlängſt meine ehemaligen Schüler, Herr Jacob Moor, und Herr Matthäus Stevart, von welchen jener die griechiſche Sprache auf unſerer Univerſität, dieſer die Mathematik zu Edinburg mit vielem Ruhm lehrt. Der Beweis des Herrn Jacob Moor iſt denen ähnlich, die bey dem 9ten und 10ten Saz des IIten Buchs von Euklids Elementen vorkommen, welche Säze nach ſeiner richtigen Bemerkung die einfachſten Fälle dieſes Lehnſazes ſind. Herr Stevart hat auch einen andern Beweis für den lezten Fall des 10ten Lehnſazes gegeben in dem 1ſten und 2ten Saz ſeines Buchs de quibusdam Theorematibus generalibus etc. das zu Edinburg 1746. heraus kam, und deſſen Gebrauch bey dem Beweis von einigen ſchönen Säzen gezeigt.

2. Lehn-

2. Lehnſaz.

Fig. 75.

Es ſeye eine gerade Linie AB der Lage und Gröſſe nach gegeben, und man nehme auf derſelben, oder auf ihrer nach einer beliebigen Seite hin gemachten Verlängerung irgend einen Punkt C: ſo iſt die Summe eines Raums, der zu dem Quadrat über AC ein gegebenes Verhältniß hat, und eines andern, der zu dem Quadrat über BC ein gegebenes Verhältniß hat, gleich der Summe eines gegebenen Raums, und eines Raums, der zu dem Quadrat des Stüks ein gegebenes Verhältniß hat, das zwiſchen dem Punkt C, und einem auf AB gegebenen Punkt abgeſchnitten iſt.

Es ſeye M derjenige Raum, der zu dem Quadrat über AC, und N derjenige, der zu dem Quadrat über BC ein gegebenes Verhältniß hat, und man finde nach dem 9ten Lehnſ. dieſes IIten Buchs auf AB den Punkt D, und die gerade Linie DE, ſo, daß ſich BD zu DE verhalte, wie M zu dem Quadrat über AC, und AD zu DE, wie N zu dem Quadrat über BC; ſo iſt folglich der Punkt D gegeben. Und, nach dem vorhergehenden 1ſten Lehnſaz iſt die Summe von M, N gleich der Summe eines Raums, der zu dem Quadrat über AD das gegebene Verhältniß von BD zu DE, eines andern, der zu dem Quadrat über BD das gegebene Verhältniß von AD zu DE, und noch eines dritten, der zu dem Quadrat über CD das gegebene Verhältniß von AB zu DE hat. Es ſind aber die geraden Linien AD, DB gegeben, mithin auch ihre Quadrate, mithin auch die Räume, welche zu dieſen Quadraten gegebene Verhältniſſe haben. Alſo iſt die Summe von M, N gleich der Summe dieſer gegebenen Räume, und eines Raums, der zu dem Quadrat des Stüks CD, das zwiſchen C und dem

dem gegebenen Punkt D abgeschnitten ist, ein gegebenes Verhältniß hat.

3. Lehnsaz.

Fig. 63. a.

Wenn aus dem Scheitelpunkt C eines Dreyeks ABC irgend eine gerade Linie CD an die Grundlinie gezogen wird: so ist die Summe eines Raums, der sich zu dem Quadrat über AC verhält, wie BD zu BA, und eines andern, der sich zu dem Quadrat über BC verhält, wie AD zu AB, gleich der Summe des Rechteks ADB und des Quadrats über DC.

Dieser Lehnsaz ist derjenige Fall des 10ten Lehnsazes unsers IIten Buchs, in welchem die Linie DE gleich ist der Linie AB, und wird aus dem dort bewiesenen so hergeleitet. Man mache dieselbe Verzeichnung, wie bey dem 10ten Lehns.; so ist dort bewiesen worden, daß die Summe der Rechteke FCA, GCB gleich seye der Summe der Rechteke HDA, LDB, KCD, und MCD; von diesen hat, wie dort gezeigt worden, die Summe der Rechteke KCD, MCD zu dem Quadrat über DC das Verhältniß von AB zu DE, mithin ist in dem gegenwärtigen Fall die Summe der Rechteke KCD, MCD gleich dem Quadrat über DC. Und, weil dort erwiesen worden, daß HD gleich seye DL; so ist die Summe der Rechteke HDA, LDB gleich dem Rechtek HD×AB. Mithin ist die Summe der Rechteke FCA, GCB gleich der Summe des Rechteks HD×AB und des Quadrats über DC. Es ist aber HD : AD = (FC : CA, d. i. nach der Verzeichnung =) BD : $\left\{\begin{matrix}DE\\AB\end{matrix}\right.$. Mithin ist das Rechtek HD×AB gleich dem Rechtek ADB. Also ist die Summe des Rechteks FCA, d. i. eines Raums,

2. Lehnsaz.

Fig. 75.

Es seye eine gerade Linie AB der Lage und Grösse nach gegeben, und man nehme auf derselben, oder auf ihrer nach einer beliebigen Seite hin gemachten Verlängerung irgend einen Punkt C: so ist die Summe eines Raums, der zu dem Quadrat über AC ein gegebenes Verhältniß hat, und eines andern, der zu dem Quadrat über BC ein gegebenes Verhältniß hat, gleich der Summe eines gegebenen Raums, und eines Raums, der zu dem Quadrat des Stüks ein gegebenes Verhältniß hat, das zwischen dem Punkt C, und einem auf AB gegebenen Punkt abgeschnitten ist.

Es seye M derjenige Raum, der zu dem Quadrat über AC, und N derjenige, der zu dem Quadrat über BC ein gegebenes Verhältniß hat, und man finde nach dem 9ten Lehns. dieses IIten Buchs auf AB den Punkt D, und die gerade Linie DE, so, daß sich BD zu DE verhalte, wie M zu dem Quadrat über AC, und AD zu DE, wie N zu dem Quadrat über BC; so ist folglich der Punkt D gegeben. Und, nach dem vorhergehenden 1sten Lehnsaz ist die Summe von M, N gleich der Summe eines Raums, der zu dem Quadrat über AD das gegebene Verhältniß von BD zu DE, eines andern, der zu dem Quadrat über BD das gegebene Verhältniß von AD zu DE, und noch eines dritten, der zu dem Quadrat über CD das gegebene Verhältniß von AB zu DE hat. Es sind aber die geraden Linien AD, DB gegeben, mithin auch ihre Quadrate, mithin auch die Räume, welche zu diesen Quadraten gegebene Verhältnisse haben. Also ist die Summe von M, N gleich der Summe dieser gegebenen Räume, und eines Raums, der zu dem Quadrat des Stüks CD, das zwischen C und dem

dem gegebenen Punkt D abgeschnitten ist, ein gegebenes Verhältniß hat.

3. Lehnsaz.

Fig. 63. a.

Wenn aus dem Scheitelpunkt C eines Dreyeks ABC irgend eine gerade Linie CD an die Grundlinie gezogen wird: so ist die Summe eines Raums, der sich zu dem Quadrat über AC verhält, wie BD zu BA, und eines andern, der sich zu dem Quadrat über BC verhält, wie AD zu AB, gleich der Summe des Rechteks ADB und des Quadrats über DC.

Dieser Lehnsaz ist derjenige Fall des 10ten Lehnsazes unsers IIten Buchs, in welchem die Linie DE gleich ist der Linie AB, und wird aus dem dort bewiesenen so hergeleitet. Man mache dieselbe Verzeichnung, wie bey dem 10ten Lehns.; so ist dort bewiesen worden, daß die Summe der Rechteke FCA, GCB gleich seye der Summe der Rechteke HDA, LDB, KCD, und MCD; von diesen hat, wie dort gezeigt worden, die Summe der Rechteke KCD, MCD zu dem Quadrat über DC das Verhältniß von AB zu DE, mithin ist in dem gegenwärtigen Fall die Summe der Rechteke KCD, MCD gleich dem Quadrat über DC. Und, weil dort erwiesen worden, daß HD gleich seye DL; so ist die Summe der Rechteke HDA, LDB gleich dem Rechtek HD×AB. Mithin ist die Summe der Rechteke FCA, GCB gleich der Summe des Rechteks HD×AB und des Quadrats über DC. Es ist aber HD : AD = (FC : CA, d. i. nach der Verzeichnung =) BD : $\left\{\begin{matrix}DE\\AB\end{matrix}\right.$. Mithin ist das Rechtek HD×AB gleich dem Rechtek ADB. Also ist die Summe des Rechteks FCA, d. i. eines Raums,

der ſich zu dem Quadrat über AC verhält, wie BD zu BA, und des Rechteks GCB, d. i. eines Raums, der ſich zu dem Quadrat über BC verhält, wie AD zu AB, gleich der Summe des Rechteks ADB und des Quadrats über DC. Auf ähnliche Art wird der lezte Fall des 10ten Lehnſazes, der ohne dieſen Lehnſaz bewieſen worden, kürzlich ſo aus demſelben hergeleitet. Es iſt nemlich derjenige Fall des 10ten Lehnſazes, wenn DE gleich iſt DB, und es muß gezeigt werden, daß die Summe des Quadrats über AC und eines Raums, der ſich zu dem Quadrat über BC verhält, wie AD zu DB oder DE, gleich ſeye der Summe des Rechteks BAD und eines Raums, der ſich zu dem Quadrat über DC verhält, wie AB zu BD. Und diß erhellet leicht ſo. Weil die Summe eines Raums, der ſich zu dem Quadrat über AD verhält, wie BD zu DE, und eines andern, der ſich zu dem Quadrat über DB verhält, wie AD zu DE oder DB, gleich iſt (3, 2. E.) dem Rechtek BAD; ſo iſt nach dem 10ten Lehnſaz die Summe des Quadrats über AC, und eines Raums, der ſich zu dem Quadrat über BC verhält, wie AD zu DB, gleich der Summe des Rechteks BAD, und eines Raums, der ſich zu dem Quadrat über DC verhält, wie AB zu DE oder DB.

4. Lehnſaz.

Fig. 76.

Wenn auf einer geraden Linie ein Punkt A genommen wird, und eine beliebige Anzahl Punkte B, C, D u. ſ. w. auf eben dieſer Linie gegeben iſt, und wenn die Summe der Räume gegeben iſt, welche zu den Quadraten über den Stüken, die zwiſchen dem Punkt A und den gegebenen Punkten abgeſchnitten ſind, nemlich immer je ein Raum zu einem Quadrat, gegebene Verhältniſſe haben; ſo iſt der Punkt A gegeben.

1. Es

1. Es seyen 2 Punkte B, C gegeben, und es seye M derjenige Raum, der zu dem Quadrat über AB ein gegebenes Verhältniß hat, N derjenige, dessen Verhältniß zu dem Quadrat über AC gegeben ist; so ist folglich nach dem 2ten Lehns. des Anhangs auf BC ein Punkt R gegeben, so, daß die Summe von M und N gleich ist der Summe eines gegebenen Raums, und eines Raums, der zu dem Quadrat über AR ein gegebenes Verhältniß hat. Es ist aber die Summe von M und N gegeben, mithin ist der Raum gegeben, welcher zu dem Quadrat über AR ein gegebenes Verhältniß hat; folglich ist das Quadrat über AR, also AR selbst gegeben. Es ist aber der Punkt R gegeben, mithin ist auch A gegeben.

2. Es seyen 3 Punkte B, C, D gegeben, und es seyen M, N, O die Räume, welche zu den Quadraten über AB, AC, AD gegebene Verhältnisse haben. Es ist in dem vorhergehenden Fall gezeigt worden, daß die Summe von M und N gleich seye der Summe eines gegebenen Raums, und eines Raums, der zu dem Quadrat über AR ein gegebenes Verhältniß hat. Mithin ist die Summe von M, N, O gleich der Summe eines gegebenen Raums, eines Raums, der zu dem Quadrat über AR ein gegebenes Verhältniß hat (dieser Raum heisse P) und des Raums O. Es ist aber die Summe von M, N, O der Voraussezung nach gegeben, mithin ist die Summe von P und O gleich einem gegebenen Raum. Es hat aber der Raum P zu dem Quadrat über AR ein gegebenes Verhältniß, und eben so ist das Verhältniß des Raums O zu dem Quadrat über AD gegeben; mithin ist nach dem 2ten Lehns. des Anhangs auf der geraden Linie RD ein Punkt Q gegeben, so, daß die Summe von O und P gleich ist der Summe eines gegebenen Raums, und eines Raums, der zu dem Quadrat über AQ ein gegebenes Verhältniß hat. Nun ist

gezeigt worden, daß die Summe von O, P gegeben seye. Mithin ist der Raum gegeben, der zu dem Quadrat über AQ ein gegebenes Verhältniß hat, also ist das Quadrat über AQ, folglich AQ selbst gegeben. Und, weil der Punkt Q gegeben ist; so ist auch der Punkt A gegeben. Auf ähnliche Art wird der Beweis geführt, wenn 4, oder 5 u. s. w. Punkte gegeben sind.

1. Satz.

Fig. 77.

Wenn eine beliebige Anzahl gerader unter einander gleichlauffender Linien AB, CD, EF u. s. w. gegeben ist, und aus einem Punkt G an dieselbe die geraden Linien GH, GK, GL u. s. w. unter gegebenen Winkeln gezogen werden, und die Summe der Räume gegeben ist, welche zu den Quadraten über diesen gezogenen Linien, nemlich je ein Raum zu einem Quadrat gegebene Verhältnisse haben: so berührt der Punkt G eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Denn man verlängere eine der gezogenen Linien LG, diese begegne den übrigen Parallelen in den Punkten M, N u. s. w. Weil nun das Dreyek GHM der Gattung nach gegeben ist; so ist das Verhältniß des Quadrats über GH zu dem Quadrat über GM gegeben; mithin hat der Raum, der zu dem Quadrat über GH ein gegebenes Verhältniß hat, auch zu dem Quadrat über GM ein gegebenes Verhältniß (9. D.). Eben so hat der Raum, der zu dem Quadrat über GK ein gegebenes Verhältniß hat, auch zu dem Quadrat über GN ein gegebenes Verhältniß u. s. w. Es sind aber auf jeder geraden Linie, die unter dem gegebenen Winkel GLE an die Parallelen durch irgend einen gegebenen Punkt L gezogen wird, die Punkte L, N, M u. s. w. gegeben.

gegeben. Weil alſo die Punkte L, N, M u. ſ. w. gegeben ſind, und die Summe der Räume gegeben iſt, welche zu den Quadraten über GM, GN, GL u. ſ. w. je ein Raum zu einem Quadrat gegebene Verhältniſſe haben; ſo iſt der Punkt G gegeben (4. Lehnſ. des Anh.), alſo iſt die gerade Linie LG gegeben, welche unter einem gegebenen Winkel an die der Lage nach gegebene gerade Linie EF gezogen iſt. Mithin berührt der Punkt G eine der Lage nach gegebene gerade Linie nach dem 20ſten Saz unſers Iſten Buchs.

2. Saz.

Figg. 78. a. b.

Wenn aus zwey gegebenen Punkten A, B an einen Punkt C hin zwey gerade Linien AC, BC gezogen werden, und das Quadrat über AC um einen gegebenen Raum gröſſer iſt, als ein Raum, der zu dem Quadrat über BC ein gegebenes Verhältniß hat: ſo berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

1. Fall. Wenn das gegebene Verhältniß das Verhältniß des Gröſſern zum Kleinern iſt.

Fig. 78. a.

Es ſeye b derjenige Raum, der zu dem Quadrat über BC das gegebene Verhältniß hat, und auf der nach B hin verlängerten Linie AB ſeye der Punkt D, ſo, daß das Verhältniß von AD zu DB gleich ſeye dem Verhältniß von b zu dem Quadrat über BC. Es iſt folglich der Punkt D, nebſt den geraden Linien AD, BD gegeben. Man ziehe DC, und es ſeye c ein Raum, der ſich zu dem Quadrat über DC verhält, wie AB zu BD; ſo iſt nach dem lezten Fall des 10ten Lehnſazes die Summe des Quadrats über AC und des Raums c gleich der

Summe des Rechteks DAB und des Raums b. Nach der Vorausſezung aber iſt das Quadrat über AC gleich der Summe des Raums b, und eines gegebenen Raums, der S heiſſen mag; alſo iſt die Summe der Räume b, S, c gleich der Summe des Rechteks DAB, und des Raums b; und den gemeinſchaftlichen Raum b hinweg genommen, iſt die Summe der Räume c, S gleich dem gegebenen Rechtek DAB. Nun iſt der Raum S gegeben, mithin iſt der Raum c gegeben, welcher zu dem Quadrat über DC das gegebene Verhältniß von AB zu BD hat; alſo iſt das Quadrat über DC, folglich DC ſelbſt der Gröſſe nach gegeben; alſo berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem 1ſten Saz unſers Iſten Buchs.

Kompoſition.

Es ſeye das gegebene Verhältniß, welches der Raum b zu dem Quadrat über BC haben ſoll, gleich dem Verhältniß der geraden Linie P zu der geraden Linie Q, und man nehme AD zu DB gleich P zu Q. S ſeye der gegebene Raum, um welchen nemlich das Quadrat über AC gröſſer ſeyn ſoll, als b. Es muß aber der Raum S, wie man aus der Analyſe ſieht, kleiner ſeyn als das Rechtek DAB. Es ſeye alſo S gleich dem Rechtek FAB, weil nun die Summe der Rechteke FAB und AB×FD gleich iſt dem Rechtek DAB; ſo iſt AB×FD der Raum, welcher in der Analyſe c hieß. Und, weil c, d. i. das Rechtek AB×FD ſich zu dem Rechtek BDF verhält, wie AB zu BD; ſo iſt das Rechtek BDF gleich dem Quadrat der zu findenden Linie DC. Man finde alſo zwiſchen BD und DF die mittlere Proportionallinie DE, und beſchreibe aus dem Mittelpunkt D mit dem Halbmeſſer DE einen Kreis; ſo iſt deſſen Umfang der geſuchte Ort; d. i. wenn man an irgend einen Punkt C dieſes

dieſes Orts die geraden Linien AC, BC zieht; ſo iſt das Quadrat über AC um den gegebenen Raum S, d. i. um das Rechtek FAB gröſſer, als der Raum b, welcher zu dem Quadrat über BC das gegebene Verhältniß von AD zu DB hat. Denn man ziehe DC; weil nun aus dem Scheitelpunkt des Dreyeks ADC die gerade Linie CB an die Grundlinie gezogen iſt, und c, oder das Rechtek AB×FD ſich zu dem Quadrat über DE, oder DC, d. i. zu dem Rechtek BDF verhält, wie AB zu BD; und b ſich zu dem Quadrat über BC verhält, wie AD zu DB; ſo iſt nach dem lezten Fall des 10ten Lehnſazes die Summe des Quadrats über AC, und des Raums c gleich der Summe des Rechteks DAB und des Raums b, d. i. nach der Verzeichnung, gleich der Summe der Räume S, c und b. Man nehme den gemeinſchaftlichen Raum c hinweg; ſo iſt das Quadrat über AC, gleich der Summe des gegebenen Raums S, und des Raums b.

2. Fall. Wenn das gegebene Verhältniß das Verhältniß des Kleinern zum Gröſſern iſt, und das übrige wie vorhin bleibt.

Fig. 78. b.

Auf der nach A hin verlängerten Linie AB ſeye ein Punkt D, ſo, daß das Verhältniß von AD zu DB gleich ſeye dem Verhältniß des Raums b zu dem Quadrat über BC, man ziehe DC, und es ſeye c ein Raum, der ſich zu dem Quadrat über DC verhält, wie AB zu BD. Mithin iſt nach dem 3ten Lehnſaz des Anhangs die Summe der Räume c b gleich der Summe des Rechteks DAB und des Quadrats über AC; nach der Vorausſezung aber iſt das Quadrat über AC gleich der Summe der Räume b und S. Mithin iſt die Summe der Räume c, b gleich der Summe des Rechteks DAB, und der Räume b, S. Man nehme den gemeinſchaftlichen

Raum b hinweg; so ist c gleich der Summe des gegebenen Rechteks DAB, und des gegebenen Raums S. Folglich ist der Raum c gegeben, mithin auch das Quadrat über DC, zu welchem der Raum c das gegebene Verhältniß von AB zu BD hat. Also ist DC der Grösse nach gegeben, und, weil der Punkt D gegeben ist; so berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Kompositon.

Man finde, weil das gegebene Verhältniß, das Verhältniß des Kleinern zum Grössern ist, auf der nach A hin verlängerten Linie AB den Punkt D, so, daß das Verhältniß von AD zu DB gleich seye dem gegebenen Verhältniß, welches der Raum b zu dem Quadrat über BC haben soll. Und es seye c gleich der Summe des Rechteks DAB und des Raums S. Man nehme das Verhältniß von c zu dem Quadrat einer geraden Linie DE gleich dem Verhältniß von AB zu BD; aus dem Mittelpunkt D mit dem Halbmesser DE beschreibe man einen Kreis: so wird dessen Umfang der gesuchte Ort seyn. Denn man ziehe an irgend einen Punkt C desselben die geraden Linien AC, BC, DC; so ist nach dem 3ten Lehnsaz des Anhangs die Summe von c und b gleich der Summe des Rechteks DAB und des Quadrats über AC, d. i. nach der Verzeichnung, die Summe des Rechteks DAB, und der Räume S, und b ist gleich der Summe des Rechteks DAB, und des Quadrats über AC. Mithin ist das Quadrat über AC gleich der Summe der Räume S und b, d. i. das Quadrat über AC ist um den gegebenen Raum S grösser, als der Raum b.

Dieser Saz ist einerley mit dem 4ten Saz unsers IIten Buchs. Denn weil das Quadrat über AC gleich

ist

iſt der Summe des Raums b, welcher zu dem Quadrat über BC ein gegebenes Verhältniß hat, und des gegebenen Raums S; ſo iſt der Ueberſchuß des Quadrats von AC über den Raum S gleich dem Raum b; alſo hat der Ueberſchuß des Quadrats von AC über einen gegebenen Raum S zu dem Quadrat über BC ein gegebenes Verhältniß, und diß iſt eben die Vorausſezung des 4ten Sazes unſers IIten Buchs.

Iſt aber die Summe des Quadrats über AC und eines gegebenen Raums gleich einem Raum, der zu dem Quadrat über BC ein gegebenes Verhältniß hat; ſo hat (14. D.) umgekehrt der Ueberſchuß des Quadrats von BC über einen gegebenen Raum zu dem Quadrat über AC ein gegebenes Verhältniß, d. i. das Quadrat über BC iſt um einen gegebenen Raum gröſſer, als ein Raum, der zu dem Quadrat über AC ein gegebenes Verhältniß hat; mithin berührt der Punkt C nach dieſem Saz einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

3. Saz.

Fig. 79.

Wenn aus zwey gegebenen Punkten A, B an einen Punkt C hin zwey gerade Linien AC, BC gezogen werden, und ein Raum, der zu dem Quadrat einer dieſer Linien AC ein gegebenes Verhältniß hat, gleich iſt der Summe eines Raums, der zu dem Quadrat der andern BC ein gegebenes Verhältniß hat, und eines gegebenen Raums S: ſo berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Es ſeye a der Raum, welcher zu dem Quadrat über AC, und b derjenige, welcher zu dem Quadrat

über BC ein gegebenes Verhältniß hat; ſo kann mithin nach dem Zuſ. des 9ten Lehnſazes auf der Verlängerung von AB ein Punkt D, und eine gerade Linie DE gefunden werden, ſo, daß BD ſich zu DE verhalte, wie a zu dem Quadrat über AC, und AD zu DE, wie b zu dem Quadrat über BC. Es ſeye diß geſchehen, und man ziehe DC. c ſeye ein Raum, welcher ſich zu dem Quadrat über AD, wie BA zu DE, und d ein Raum, der ſich zu dem Quadrat über AB, wie AD zu DE, endlich e ein Raum, der ſich zu dem Quadrat über DC verhält, wie BA zu DE; ſo ſind, weil BA, AD gegeben ſind, die Räume c, d gegeben. Es iſt aber nach dem 10ten Lehnſaz die Summe von e und b gleich der Summe von c, d, a; und nach der Vorausſezung iſt a gleich der Summe von b und S; mithin iſt die Summe von e und b gleich der Summe von c, d, b, S. Man nehme den gemeinſchaftlichen Raum b hinweg; ſo iſt e gleich der Summe von c, d, S; mithin iſt e gegeben. Es hat aber e zu dem Quadrat über DC das gegebene Verhältniß von AB zu DE; mithin iſt das Quadrat über DC, alſo DC ſelbſt der Gröſſe nach gegeben, und, weil der Punkt D gegeben iſt; ſo berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Kompoſition.

Es ſeye das gegebene Verhältniß, welches der Raum a zu dem Quadrat über AC haben ſoll, gleich dem Verhältniß, welches eine gerade Linie M zu einer andern O hat; und das Verhältniß, welches b zu dem Quadrat über BC haben ſoll, ſeye gleich dem Verhältniß der geraden Linie N zu der geraden Linie O. Iſt nun das Verhältniß von M zu N das Verhältniß des Gröſſern zum Kleinern; ſo finde man nach dem 9ten

Lehnſ.

Lehnſ. auf der nach A hin verlängerten Linie AB den Punkt D und die gerade Linie DE, ſo, daß ſich BD zu DE verhalte, wie M zu O; und AD zu DE, wie N zu O. Iſt aber das Verhältniß von M zu N das Verhältniß des Kleinern zum Gröſſern; ſo ſeze man M ſtatt N, A ſtatt B, a ſtatt b, und umgekehrt. In beyden Fällen nehme man einen Raum c zu dem Quadrat über AD in eben dem Verhältniß, welches AB zu DE, und einen Raum d zu dem Quadrat über AB in eben dem Verhältniß, welches AD zu DE hat. S ſeye der gegebene Raum, um welchen a gröſſer ſeyn ſoll als b, und man nehme den Raum e gleich der Summe der Räume c, d, S, und e verhalte ſich zu dem Quadrat einer Linie DF wie AB zu DE; aus dem Mittelpunkt D mit dem Halbmeſſer DF beſchreibe man einen Kreis: ſo wird deſſen Umfang der geſuchte Ort ſeyn, d. i. wenn man an irgend einen Punkt C deſſelben die geraden Linien AC, BC zieht; ſo wird a, nemlich ein Raum, der ſich zu dem Quadrat über AC verhält, wie BD zu DE, oder wie M zu O gleich ſeyn der Summe des Raums b, d. i. eines Raums, der ſich zu dem Quadrat über BC verhält, wie AD zu DE, oder, wie N zu O, und des gegebenen Raums S. Denn man ziehe DC; weil nun aus dem Scheitelpunkt C des Dreyeks DCB die Linie CA an die Grundlinie gezogen iſt, und nach der Verzeichnung e: $\left\{\begin{matrix} DF^2 \\ DC^2 \end{matrix}\right. = AB : DE$, und $b : BC^2 = AD : DE$, und $c : DA^2 = AB : DE$, und $d : AB^2 = AD : DE$, und endlich $a : AC^2 = DB : DE$; ſo iſt, nach dem 10ten Lehnſaz die Summe von e, b gleich der Summe von c, d, a. Nach der Verzeichnung aber iſt e gleich der Summe von c, d, S; alſo iſt die Summe von b, c, d, S gleich der Summe von c, d, a. Mithin iſt, die beyden Räume c und d hinweg

weg genommen, a gleich der Summe von b, S. (Dieſer Saz iſt nichts anders, als eine Erweiterung und Verallgemeinerung des 4ten Sazes unſers IIten Buchs, wenn nemlich in demſelben ſtatt der dort genannten Quadrate überhaupt der Gattung nach gegebene Figuren verſtanden werden. Noch allgemeiner kann er auf eine beliebige Anzahl Punkte ſo ausgedehnt werden, daß alsdann der Ueberſchuß der Summe der über einigen Linien, die aus dieſen Punkten an einen andern Punkt hin gezogen werden, beſchriebenen, der Gattung nach gegebenen Figuren, über einen gegebenen Raum, zu der Summe der über den übrigen eben dahin gezogenen Linien beſchriebenen, der Gattung nach gegebenen, Figuren ein gegebenes Verhältniß hat. Dieſe Bemerkung zeigt den Zuſammenhang zwiſchen 4, II. Ap. und 5, II. Ap. Anm. des Ueberſ.)

4. Saz.

Fig. 80.

Wenn aus 3 gegebenen Punkten A, B, C an einen Punkt D hin die geraden Linien AD, BD, CD gezogen werden, und die Summe eines Raums, der zu dem Quadrat einer dieſer Linien AD ein gegebenes Verhältniß hat, und eines Raums, der zu dem Quadrat einer andern BD ein gegebenes Verhältniß hat, gleich iſt der Summe eines Raums, der zu dem Quadrat der dritten CD ein gegebenes Verhältniß hat, und eines gegebenen Raums S: ſo berührt der Punkt D einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Es ſeyen a, b, c Räume, die zu den Quadraten über AD, BD, CD gegebene Verhältniſſe haben, man

ziehe

ziehe AB, und finde auf dieſer Linie nach dem 9ten Lehnſaz den Punkt E, und die gerade Linie EF, ſo, daß ſich BE zu EF wie a zu dem Quadrat über AD, und AE zu EF wie b zu dem Quadrat über BD verhalte. Es ſeye d ein Raum, der ſich zu dem Quadrat über AE verhalte, wie BE zu EF, und e ein Raum, der ſich zu dem Quadrat über BE verhalte, wie AE zu EF; endlich f ein Raum, der ſich zu dem Quadrat über ED verhalte, wie AB zu EF; ſo iſt nach dem 11ten Lehnſaz die Summe von a und b gleich der Summe von d, e, f.

Es iſt aber nach der Vorausſezung die Summe von a und b gleich der Summe von c und S; alſo iſt die Summe von d, e, f gleich der Summe von c, S; es ſind aber die Räume d, e, S gegeben; mithin iſt einer der Räume f, c um einen gegebenen Raum gröſſer als der andere; folglich berührt der Punkt D nach dem vorhergehenden 3ten Saz einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Kompoſition.

Man finde auf der geraden Linie AB den Punkt E und die gerade Linie EF, ſo, daß BE zu EF das gegebene Verhältniß des Raums a zu dem Quadrat über AD, und AE zu EF das gegebene Verhältniß des Raums b zu dem Quadrat über BD habe. Es ſeye S der gegebene Raum, um welchen die Summe von a, b gröſſer ſeyn ſolle, als der Raum c, d. i. als ein Raum, der zu dem Quadrat über CD ein gegebenes Verhältniß haben ſoll, und man mache das Verhältniß von einem Raum d zu dem Quadrat über AE gleich dem Verhältniß von BE zu EF; und das Verhältniß von

einem

einem Raum e zu dem Quadrat über BE gleich dem Verhältniß von AE zu EF. Nun seye 1) die Summe von d, e gröſſer, als der Raum S, und der Ueberschuß jener Räume über diesen seye gleich dem Raum T. Man beschreibe nach dem vorhergehenden 3ten Saz einen Kreis, so, daß, wenn man an irgend einen Punkt D desselben aus den gegebenen Punkten C, E die geraden Linien CD, ED zieht, der Raum c, der zu dem Quadrat über CD das gegebene Verhältniß hat, gleich seye der Summe des Raums f, der zu dem Quadrat über ED das gegebene Verhältniß von AB zu EF hat, und des Raums T; so wird dessen Umfang der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man AD, BD zieht, so wird die Summe des Raums a, der sich zu dem Quadrat über AD verhält, wie BE zu EF, und des Raums b, der sich zu dem Quadrat über BD verhält, wie AE zu EF gleich seyn der Summe der Räume c, S. Denn, weil nach der Verzeichnung die Summe von d, e gleich ist der Summe von S, T; so ist die Summe von d, e, f gleich der Summe von S, T, f; es ist aber c nach der Verzeichnung gleich der Summe von f, T; mithin ist die Summe von d, e, f gleich der Summe von S, c. Es ist aber nach dem 10ten Lehnsaz die Summe von a, b gleich der Summe von d, e, f, d. i. der Summe von c, S.

2) Es seye der Raum S gröſſer, als die Summe der Räume d, e, und der Ueberschuß jenes Raums über diese seye gleich dem Raum V. Man beschreibe nach dem vorhergehenden Saz einen Kreis, so, daß, wenn man an irgend einen Punkt desselben D die geraden Linien ED, CD zieht, der Raum f, der sich zu dem Quadrat über ED verhält, wie AB zu EF,

gleich

gleich ſeye der Summe des Raums c, der zu dem Quadrat über CD das gegebene Verhältniß hat, und des Raums V; ſo wird deſſen Umfang der geſuchte Ort ſeyn. Denn nach der Verzeichnung iſt die Summe der Räume d, e, V gleich dem Raum S; mithin iſt die Summe der Räume d, e, V, c gleich der Summe der Räume c, S. Es iſt aber ebenfalls nach der Verzeichnung f gleich der Summe der Räume c, V; mithin iſt die Summe der Räume d, e, f, d. i. die Summe der Räume a, b gleich der Summe der Räume c, S.

Iſt die Summe der Räume d, e gleich dem Raum S; ſo iſt auch f gleich c und das Quadrat über ED, welches ein gegebenes Verhältniß zu f oder c hat, hat (9. D.) auch ein gegebenes Verhältniß zu dem Quadrat über CD. Alſo hat die gerade Linie ED ein gegebenes Verhältniß zu der Linie CD. Mithin berührt der Punkt D eine der Lage nach gegebene gerade Linie, oder einen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem 2ten Saz unſers IIten Buchs.

(Wegen deſſen, was in der Anmerkung bey dem Zuſaz zu dem 9ten Lehnſaz erinnert worden iſt, hat der 2te, 3te und 4te Saz dieſes Simſonſchen Anhangs eine Einſchränkung nöthig. Es würde nemlich z. B. in dem 3ten Saz der Ort kein Kreis, ſondern eine der Lage nach gegebene gerade Linie ſeyn, wenn der Raum a, der zu dem Quadrat über AC ein gegebenes Verhältniß hat, gerade das nemliche Verhältniß zu dieſem Quadrat hätte, welches der Raum b zu dem Quadrat über BC hat. Denn wirklich, wenn $a : AC^2 = b : BC^2$; ſo iſt auch $a - b : AC^2 - BC^2 = a :$

$= a : AC^2$, d. h. in einem gegebenen Verhältniß. In eben dieſem Verhältniß nehme man den gegebenen Raum S zu einem Raum T; ſo iſt mithin T gegeben; und, weil $a - b : AC^2 - BC^2 = S : T$, und $a - b = S$; ſo iſt $AC^2 - BC^2 = T$, mithin berührt der Punkt C eine der Lage nach gegebene gerade Linie nach dem 1ſten Saz unſers IIten Buchs. Ueberhaupt alſo iſt der Ort eine gerade Linie, wenn die 2. Räume, auf welche am Ende die Sache zurück gebracht wird, zu den ihnen zugehörigen Quadraten einerley Verhältniß haben. Anm. des Ueberſ.)

Erſter Anhang
des Ueberſezers.

Bemerkungen
über
einige dieſer Oerter.

Zu einigen der vorhergehenden Säze können noch folgende Zusäze gemacht werden: Nemlich

Zum 24sten Saz des Isten Buchs.

Fig. 81.

1. Zus. Wenn aus einem Punkt A an eine der Lage nach gegebene gerade Linie BC zwey gerade Linien AH, AG unter gegebenen Winkeln gezogen werden, und wenn HK die Summe der einen AH, und einer dritten Linie AK, zu welcher die andere AG ein gegebenes Verhältniß hat, gegeben ist; oder wenn entweder der Ueberschuß der einen über eine gegebene Linie, oder die Summe der einen und einer gegebenen Linie zu der andern ein gegebenes Verhältniß hat: so berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene mit BC gleichlauffende gerade Linie.

1ster Fall. Wenn HK die Summe der einen aus A gezogenen Linien AH, und einer dritten Linie AK, zu welcher die andere ein gegebenes Verhältniß hat, gegeben ist. Man verlängere AH auf die Seite von A hin, und schneide auf dieser Verlängerung die dritte Linie AK ab; so berührt der Punkt K eine der Lage nach gegebene mit BC gleichlauffende Linie nach dem 20sten Saz des Isten Buchs. Es seye diß die Linie LM. Weil nun an LM und BC die geraden Linien AK, AG, welche ein gegebenes Verhältniß haben, unter gegebenen

[redacted]

Zu einigen der vorhergehenden Säze können noch folgende Zuſäze gemacht werden: Nemlich

Zum 24ſten Saz des Iſten Buchs.

Fig. 81.

1. Zuſ. Wenn aus einem Punkt A an eine der Lage nach gegebene gerade Linie BC zwey gerade Linien AH, AG unter gegebenen Winkeln gezogen werden, und wenn HK die Summe der einen AH, und einer dritten Linie AK, zu welcher die andere AG ein gegebenes Verhältniß hat, gegeben iſt; oder wenn entweder der Ueberſchuß der einen über eine gegebene Linie, oder die Summe der einen und einer gegebenen Linie zu der andern ein gegebenes Verhältniß hat: ſo berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene mit BC gleichlauffende gerade Linie.

1ſter Fall. Wenn HK die Summe der einen aus A gezogenen Linien AH, und einer dritten Linie AK, zu welcher die andere ein gegebenes Verhältniß hat, gegeben iſt. Man verlängere AH auf die Seite von A hin, und ſchneide auf dieſer Verlängerung die dritte Linie AK ab; ſo berührt der Punkt K eine der Lage nach gegebene mit BC gleichlauffende Linie nach dem 20ſten Saz des Iſten Buchs. Es ſeye diß die Linie LM. Weil nun an LM und BC die geraden Linien AK, AG, welche ein gegebenes Verhältniß haben, unter gegebenen

Zu einigen der vorhergehenden Säze können noch folgende Zuſäze gemacht werden: Nemlich

Zum 24ſten Saz des Iſten Buchs.

Fig. 81.

1. Zuſ. Wenn aus einem Punkt A an eine der Lage nach gegebene gerade Linie BC zwey gerade Linien AH, AG unter gegebenen Winkeln gezogen werden, und wenn HK die Summe der einen AH, und einer dritten Linie AK, zu welcher die andere AG ein gegebenes Verhältniß hat, gegeben iſt; oder wenn entweder der Ueberſchuß der einen über eine gegebene Linie, oder die Summe der einen und einer gegebenen Linie zu der andern ein gegebenes Verhältniß hat: ſo berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene mit BC gleichlauffende gerade Linie.

1ſter Fall. Wenn HK die Summe der einen aus A gezogenen Linien AH, und einer dritten Linie AK, zu welcher die andere ein gegebenes Verhältniß hat, gegeben iſt. Man verlängere AH auf die Seite von A hin, und ſchneide auf dieſer Verlängerung die dritte Linie AK ab; ſo berührt der Punkt K eine der Lage nach gegebene mit BC gleichlauffende Linie nach dem 20ſten Saz des Iſten Buchs. Es ſeye diß die Linie LM. Weil nun an LM und BC die geraden Linien AK, AG, welche ein gegebenes Verhältniß haben, unter gegebenen

Winkeln gezogen ſind; ſo berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene mit BC gleichlauffende Linie nach dem 22ſten Saz unſers Iſten Buchs. Die Kompoſition ergiebt ſich von ſelbſt. Auf ähnliche Art ſchließt man nun auch bey den andern Fällen.

Ganz kurz könnte man dieſen Zuſaz auch ſo beweiſen: Man kann ſich vorſtellen, die zwey der Lage nach gegebenen Parallelen, von welchen in dem 24ſten Saz des Iſten Buchs die Rede iſt, liegen immer näher und näher bey einander, bis ſie endlich ganz auf einander fallen, d. h. bis nur noch Eine gerade Linie der Lage nach gegeben iſt. Und die Auflöſung, die bey dem Saz gegeben iſt, gilt offenbahr völlig eben ſo, ſelbſt noch in dem Fall, wenn ſtatt 2 der Lage nach gegebener Paralleln nur Eine gerade Linie gegeben iſt. Bey dem 22ſten Saz geht es nicht an, einen ähnlichen Zuſaz zu machen, weil von den 2 Bedingungen des Sazes, daß nemlich 1) die geraden Linien an die der Lage nach gegebenen Parallelen unter gegebenen Winkeln gezogen, und 2) dieſe gezogenen Linien ein gegebenes Verhältniß unter einander haben ſollen, weil, ſage ich, von dieſen 2 Bedingungen, ſo bald man ſtatt 2 der Lage nach gegebener Parallelen nur Eine gerade Linie ſezen wollte, die leztere ſchon in der erſtern enthalten, folglich keine neue Bedingung wäre.

2. Zuſ. Auch, wenn aus einem Punkt an eine der Lage nach gegebene gerade Linie 2 gerade Linien, deren Summe oder Unterſchied gegeben iſt, unter gegebenen Winkeln gezogen werden; ſo berührt der Punkt eine mit jener erſtern gleichlauffende der Lage nach gegebene gerade Linie. Denn, wenn die Summe der gezogenen Linien gegeben iſt; ſo iſt folglich die Summe der einen, und einer dritten Linie, zu welcher die andere ein gegebenes Verhältniß hat (dieſe dritte Linie iſt nemlich in dieſem Fall einerley mit der andern), gegeben. Iſt

aber

aber der Unterſchied der gezogenen Linien gegeben; ſo hat folglich der Ueberſchuß der einen über eine gegebene Linie (nemlich über den gegebenen Unterſchied der gezogenen Linien) zur andern ein gegebenes Verhältniß. (Dieſer Ueberſchuß iſt nemlich eben die andere Linie ſelbſt.) Folglich berührt in beyden Fällen nach dem 1ſten Zuſ. der Punkt eine der Lage nach gegebene mit der erſten der Lage nach gegebenen gleichlauffende gerade Linie.

3. Zuſ. Auf eben die Art, wie aus dem 1ſten Zuſ. der 2te hergeleitet worden, läßt ſich aus dem 24ſten Saz ſelbſt ein ähnlicher Zuſaz herleiten. Und eben ſo auch aus dem 25ſten Saz.

Zum 26ſten Saz des Iſten Buchs.

1. Zuſ. Wenn 2 gerade Parallellinien der Lage nach gegeben, und aus einem Punkt an eine derſelben 2 gerade Linien, an die andere aber eine gerade Linie unter gegebenen Winkeln gezogen werden, und wenn die Summe der beyden Rchtke, wovon das eine zwiſchen einer der gezogenen Linien, und einer gegebenen Linie, das andere zwiſchen einer andern gezogenen, und einer andern gegebenen Linie enthalten iſt, gleich iſt dem Rchtk, welches zwiſchen der dritten gezogenen und einer dritten gegebenen Linie enthalten iſt; ſo berührt der Punkt, aus welchem die gegeben Linien gezogen worden, eine der Lage nach gegebene gerade Linie. Denn man kann ſich vorſtellen, von den im 26ſten Saz genannten 3 Parallellinien fallen 2 mit einander zuſammen, und, dieſe Veränderung abgerechnet, bleibt alles bey dieſem Saz geſagte.

2. Zuſ. Wenn eine gerade Linie der Lage nach gegeben iſt, und an dieſelbe aus einem Punkt 3 gerade Linien unter gegebenen Winkeln gezogen werden, und

das übrige bleibt wie vorhin; so berührt der Punkt eine der Lage nach gegebene gerade Linie. In diesem Fall nemlich fallen alle 3 im 26sten Saz genannte Parallelen zusammen.

Aehnliche Zusäze nun lassen sich, wie man leicht sieht, auch bey dem 27sten, 28sten, 29sten Saz, wie auch bey allen dort bemerkten Zusäzen machen.

Zum 31sten Saz des Isten Buchs.

Auch dieser Saz kann allgemeiner gemacht, und auf jede beliebige Menge der Lage nach gegebener gerader Linien ausgedehnt werden, nemlich so:

Fig. 82.

Wenn eine beliebige Anzahl gerader Linien AB, CD, EF u. s. w. der Lage nach gegeben, und auf jeder derselben ein Punkt B, D, F u. s. w. gegeben ist, und an dieselbe aus einem Punkt G gerade Linien GH, GI, GK u. s. w. unter gegebenen Winkeln gezogen werden, und die Summe der Rechteke, welche zwischen geraden, der Grösse nach gegebenen Linien α, β, γ u. s. w. und den Stüken HB, ID, KF u. s. w. enthalten sind, (die auf den der Lage nach gegebenen Linien zwischen den an sie gezogenen Linien, und den auf ihnen gegebenen Punkten abgeschnitten sind) gleich ist einem gegebenen Raum; so berührt der Punkt G eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Denn, wenn man die Rechteke GHBL, GIDM, GKFN u. s. w. ergänzt; so wird ganz, wie am Ende des 31sten Sazes gezeigt, daß diß nur ein anderer Ausdruk sey von dem 2ten Zus. des 29sten Sazes.

Zum 32sten Saz des Isten Buchs.

Zus. Wenn aus einem Punkt A an eine der Lage nach gegebene gerade Linie BC zwey gerade Linien AF, AG

AG unter gegebenen Winkeln gezogen werden, und das Rchtk GAF, welches sie einschliessen, gleich ist einem gegebenen Raum: so berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene, mit BC gleichlauffende gerade Linie.

Weil AG, AF unter gegebenen Winkeln gezogen sind; so ist das Verhältniß von AG zu AF, d. i. von dem Rchtk GAF zu dem Quadrat über AF gegeben. Nach der Voraussezung aber ist das Rchtk GAF gegeben, mithin ist auch das Quadrat von AF, folglich AF selbst der Grösse nach gegeben. Weil also aus einem Punkt F in der der Lage nach gegebenen geraden Linie BC eine der Grösse nach gegebene gerade Linie AF unter einem gegebenen Winkel gezogen ist; so berührt der Punkt A eine mit BC gleichlauffende, der Lage nach gegebene, gerade Linie nach dem 20sten Saz.

Kompoſition.

Der gegebene Raum seye N. Man ziehe aus irgend einem Punkt F auf der Linie BC, FH von beliebiger Grösse unter dem gegebenen Winkel AFC, aus H ziehe man an BC eine andere Linie HD unter dem gegebenen Winkel AGB. Nun mache man wie HD zu HF, so N zu dem Quadrat über FA. Durch den hiedurch bestimmten Punkt A ziehe man eine mit BC gleichlauffende gerade Linie; so ist diese der gesuchte Ort. Denn man ziehe aus irgend einem Punkt A derselben an BC die Linien AF, AG unter den gegebenen Winkeln. Weil nun die Dreyeke AFG, HFD ähnlich sind; so ist $AF : AG = HF : HD = AF^2 : N$. Folglich auch $AF^2 : AF \times AG = AF^2 ; N$. Also ist $N = FA \times AG$. Auch dieser Zusaz folgt kürzlich daraus, weil die im 32sten Saz genannten Parallelen hier in eine gerade Linie zusammen fallen. Eben so können nun ähnliche Zusäze zu dem 33sten und 34sten Saz des Isten Buchs,

und zu dem Isten Saz des Simsonschen Anhangs gemacht werden, wobey noch diß zu bemerken ist, daß man auch einige der gezogenen Linien, welche man will, als in eine Linie zusammenfallend sich vorstellen kann.

Uebrigens verdient noch bemerkt zu werden, daß auch der 32ste Saz des Isten Buchs allgemeiner gemacht werden, und von jeder beliebigen Anzahl gerader der Lage nach gegebener Parallelen so ausgedrükt werden kann: Wenn an eine beliebige Anzahl gerader der Lage nach gegebener Parallelen aus einem Punkt gerade Linien unter gegebenen Winkeln gezogen werden, und die Summe aller Rechteke, welche je zwischen zwey der gezogenen Linien enthalten sind, oder der Ueberschuß einiger dieser Rechteke über die übrige, gleich ist einem gegebenen Raum; so berührt der Punkt, aus welchem die Linien gezogen worden sind, eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Endlich kann auch noch der 34ste Saz des Isten Buchs allgemein so ausgedrukt werden: Wenn an eine beliebige Anzahl der Lage nach gegebener Parallelen aus einem Punkt gerade Linien gezogen werden, und der Ueberschuß der über einigen derselben beschriebenen, der Gattung nach gegebenen Figuren über die über den übrigen beschriebenen der Gattung nach gegebenen Figuren gegeben ist; so berührt der Punkt eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Zum 3ten Saz des IIten Buchs.

Dieser Saz kann noch allgemeiner gemacht, und so ausgedrukt werden:

Fig.

Fig. 83.

Wenn aus einem gegebenen Punkt A eine gerade Linie AC, und aus deren Endpunkt an eine der Lage nach gegebene gerade Linie ED eine gerade Linie CD mit einer der Lage nach gegebenen gleichlauffend gezogen wird, und wenn entweder eine der Gattung nach gegebene Figur über der zuerst gezogenen AC gleich ist dem Rchtk, das enthalten ist zwischen einer gegebenen Linie BE, und demjenigen Stük von der der Lage nach gegebenen geraden Linie ED, welches zwischen einem gegebenen Punkt E, und der zweyten gezogenen Linie CD abgeschnitten wird: oder wenn die Summe oder der Unterschied eines gegebenen Raums und einer der Gattung nach gegebenen Figur über AC gleich ist dem besagten Rchtk: oder wenn die Summe einer der Gattung nach gegebenen Figur über AC und des genannten Rchtks gegeben ist; so berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Iſter Fall. Wenn die der Gattung nach gegebene Figur über AC ein Quadrat ist. Hier zerfällt der Saz in 4 besondere Säze. Der erste derselben ist: wenn das Quadrat über AC gleich ist dem genannten Rchtk. Diß ist nun eben der 3te Saz unsers IIten Buchs. Die 3 übrigen besondern Säze für den Isten Fall sind folgende:

1) Wenn die Summe eines gegebenen Raums, und des Quadrats über AC gleich ist dem genannten Rchtk, und das übrige bleibt, wie bey dem 3ten Saz unsers IIten Buchs.

Es seye der gegebene Raum gleich dem Rechtek BE × Ee. Weil nun BE gegeben ist; so ist Ee der Grösse nach gegeben (61. D.). Man nehme Ee auf der Linie ED von E gegen D hin. Weil nun BE × Ee kleiner ist, als BE × ED; so ist Ee < ED, folglich fällt

der Punkt e zwiſchen E und D. Und weil der Punkt E gegeben iſt; ſo iſt auch der Punkt e gegeben. Und da nach der Vorausſezung $BE \times Ee + AC^2 = BE \times ED$; ſo iſt, das gemeinſchaftliche Rchtk $BE \times Ee$ hinweg genommen, $AC^2 = BE \times eD$, folglich berührt der Punkt C nach dem 3ten Saz des IIten Buchs einen der Lage nach gegebenen Umkreis. Die Kompoſition ergiebt ſich von ſelbſt.

2) Wenn das Quadrat über AC gleich iſt der Summe eines gegebenen Raums $BE \times Ee$, und des Rchtks $BE \times ED$, und das übrige bleibt wie vorhin.

Man trägt in dieſem Fall Ee auf die nach E hin verlängerte Linie DE. Auſſer dieſem bleibt alles dem vorhergehenden ähnlich.

3) Wenn die Summe des Quadrats über AC, und des Rechteks $BE \times ED$ gleich iſt einem gegebenen Raum, und alles übrige, wie vorhin, bleibt.

Man trägt in dieſem Fall Ee von E gegen D hin, und weil $BE \times Ee$ gröſſer iſt als $BE \times ED$; ſo fällt e auf die über D hinaus verlängerte Linie ED. Uebrigens bleibt alles dem vorhergehenden ähnlich.

IIter Fall. Wenn die der Gattung nach gegebene Figur über AC kein Quadrat iſt, und wenn 1) dieſe Figur gleich iſt dem Rchtk $BE \times ED$.

Die Figur über AC heiſſe a, weil ſie nun der Gattung nach gegeben iſt; ſo iſt ihr Verhältniß zu dem Quadrat über AC gegeben (53. D.). Man nehme BE zu BF in eben dieſem Verhältniß, ſo iſt folglich BF der Gröſſe nach gegeben. Weil nun $a : AC^2 = BE : BF = BE \times ED : BF \times ED$, und $a = BE \times ED$; ſo iſt $AC^2 = BF \times ED$, mithin berührt der Punkt C nach dem 3ten Saz des IIten Buchs einen der Lage nach gegebenen Umkreis. Hieraus folgen nun die übrigen, denen beym Iſten Fall 1. 2. 3. ähnliche Zuſäze völlig auf eben die Art.

Zu dem 6ten Saz des IIten Buchs

lassen sich, wie man leicht sieht, völlig ähnliche Zusäze, wie bey des 3ten Sazes Istem Fall 1. 2. 3. machen, die ich, da sie ganz auf dieselbe Art bewiesen werden, nur ohne Beweis her seze. Nemlich

1) wenn alles übrige bleibt, wie in dem 6ten Saz, und die Summe eines gegebenen Raums, und der beyden Figuren, welche der Gattung nach gegeben, und über den an einen Punkt hin gezogenen geraden Linien beschrieben sind, gleich ist dem dort genannten Rechtek;

2) wenn alles übrige bleibt, und die Summe der beyden der Gattung nach gegebenen Figuren gleich ist der Summe eines gegebenen Raums, und des genannten Rchtks;

3) wenn alles übrige bleibt, und die Summe des genannten Rchtks, und der beyden der Gattung nach gegebenen Figuren gleich ist einem gegebenen Raum;

so berührt in allen diesen Fällen der Punkt, an welchen hin die geraden Linien gezogen sind, über denen die der Gattung nach gegebenen Figuren beschrieben werden, einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Mit Hülfe des 1sten dieser Zusäze kann nun der 6te Saz noch weit allgemeiner gemacht, und auf jede beliebige Anzahl von gegebenen Punkten ausgedehnt werden, aus welchen gerade Linien an einen Punkt hin gezogen, und über denselben der Gattung nach gegebene Figuren beschrieben werden, deren Summe gleich ist dem in dem Saz genannten Rchtk.

Diß wird nemlich für jede beliebige Anzahl gegebener Punkte erwiesen seyn, wenn gezeigt wird, daß sich jede beliebige Anzahl gegebener Punkte immer auf eine um Eins geringere Anzahl gegebener Punkte zurük bringen

gen laſſe. Diß leztere aber wird völlig auf eben die Art, wie bey dem 5ten Saz des IIten Buchs erwieſen. Es ſeyen z. B. (Fig. 84.) die 3 Punkte A, B, C gegeben, und aus denſelben an einen Punkt D hin die geraden Linien AD, BD, CD gezogen, aus dem Punkt D ſeye an eine der Lage nach gegebene gerade Linie EF, DG mit einer der Lage nach gegebenen geraden Linie gleichlauffend gezogen, und es ſeye die Summe von 3 der Gattung nach gegebenen Figuren über AD, BD, CD gleich dem Rchtk, das enthalten iſt zwiſchen einer gegebenen geraden Linie α, und demjenigen Stük der Linie EF welches zwiſchen einem auf ihr gegebenen Punkt F, und der Linie DG abgeſchnitten wird; ſo berührt der Punkt D einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Die Figuren über AD, BD, CD heiſſen a, b, c; ſo ſind folglich die Verhältniſſe dieſer Figuren zu den Quadraten über AD, BD, CD gegeben (53. D.). Man ziehe AB, und finde nach dem 9ten Lehnſaz den Punkt H und die gerade Linie HI ſo, daß ſich BH zu HI wie a zu dem Quadrat über AD, und AH zu HI wie b zu dem Quadrat über BD verhalte; ſo iſt nach dem Zuſ. des 10ten Lehnſ. die Summe der Figuren a, b gleich einem gegebenen Raum, und einer Figur, die zu dem Quadrat über HD ein gegebenes Verhältniß, nemlich das Verhältniß von AB zu HI hat. Dieſe Figur heiſſe h. Nun iſt nach der Vorausſezung die Summe der Figuren a, b, c gleich dem Rchtk $\alpha \times FG$. Folglich iſt die Summe der Figuren c, h und eines gegebenen Raums gleich eben dieſem Rchtk. Weil nun die Punkte H, C, F gegeben, und DG mit einer der Lage nach gegebenen geraden Linie gleichlauffend gezogen iſt; ſo berührt der Punkt D nach dem hier beigebrachten 1ſten Zuſ. einen der Lage nach gegebenen Umkreis. Die Kompoſition folgt von ſelbſt.

Völlig

Völlig eben ſo werden 4 gegebene Punkte auf 3, kurz immer jede beliebige Anzahl gegebener Punkte auf eine um Eins geringere Anzahl zurük gebracht. Folglich gilt der 6te Saz allgemein von jeder beliebigen Anzahl gegebener Punkte. Und eben ſo allgemein gelten auch die vorhin angeführten 3 Zuſäze.

Iſt, ſtatt der Summe aller der Gattung nach gegebenen Figuren, der Ueberſchuß von einigen derſelben über die übrige gleich dem in dem 6ten Saz genannten Rchtk; ſo berührt der Punkt, an welchen hin die Linien aus den gegebenen Punkten gezogen werden, entweder eine der Lage nach gegebene gerade Linie, oder einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Es ſeyen

1. nur 2 Punkte A, B gegeben, und aus denſelben an einen Punkt C hin die geraden Linien AC, BC gezogen; wenn nun aus dem Punkt C an eine der Lage nach gegebene gerade Linie EN eine gerade Linie CD mit einer der Lage nach gegebenen gleichlauffend gezogen wird, und es iſt

Fig. 85.

1) der Unterſchied der Quadrate über AC und BC gleich dem Rchtk, das zwiſchen einer gegebenen geraden Linie α, und dem Stük ED enthalten iſt, welches zwiſchen einem gegebenen Punkt E, und der Linie CD abgeſchnitten wird; ſo berührt der Punkt C eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

CD iſt entweder ſenkrecht auf AB, oder nicht. Es ſeye a) CD nicht ſenkrecht auf AB; ſo begegnet folglich CD und jede mit ihr gleichlauffende Linie den auf AB errichteten Perpendikeln. Man theile die Linie AB in H in 2 gleiche Theile, und ziehe HL ſenkrecht auf AB. Durch den gegebenen Punkt E ziehe man EL mit CD gleich-

gleichlauffend; so ist folglich EL der Lage nach gegeben, und die Linien HL, EL werden einander in einem gegebenen Punkt L begegnen. Man ziehe LC, und verlängere sie, wenn es nöthig ist, bis sie dem aus B auf AB errichteten Perpendikel BM in einem Punkt M begegne, aus C fälle man noch auf AB das Perpendikel CK, und aus M ziehe man an EN die Linie MN mit CD gleichlauffend. Weil nun nach der Voraussezung der Unterschied der Quadrate über AC, BC gleich ist dem Rchtk $\alpha \times ED$; so ist nach dem 1sten Lehns. des IIten Buchs, das doppelte Rchtk $AB \times HK$ gleich dem Rchtk $\alpha \times ED$, d. h. es ist $HK : ED = \alpha : 2AB$. Wegen der Parallelen aber ist $HK : HB = LC : LM = ED : EN$, oder verwechselt $HK : ED = HB : EN$; folglich ist $\alpha : 2AB = HB : EN$, mithin das Verhältniß von HB zu EN gegeben. Es ist aber HB, folglich auch EN der Grösse nach gegeben, und da der Punkt E gegeben ist; so ist auch der Punkt N (30. D.), mithin die gerade Linie NM der Lage nach (31. D.) gegeben. Und, weil auch BM der Lage nach gegeben ist; so ist folglich der Punkt M (28. D.), mithin die gerade Linie LCM, welche durch die gegebenen Punkte L, M geht, der Lage nach (29. D.) gegeben, oder: der Punkt C berührt eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Kompositon.

Man ziehe EL, HL, wie gesagt worden, und mache das Rchtk $\alpha \times EN$ gleich dem Quadrat über AB, d. i. gleich dem doppelten Rchtk $HB \times BA$. Aus dem Punkt E schneide man auf ED, auf welcher Seite von E man will, EN ab, durch N ziehe man NM mit EL gleichlauffend, die einem aus B (demjenigen unter den Punkten A, B, der in Bezug auf den Punkt H auf eben der-

selben

ſelben Seite liegt, auf welcher N in Bezug auf den Punkt E liegt) errichteten Perpendikel BM in M begegne. Endlich ziehe man die Linie LM; ſo iſt dieſe der geſuchte Ort, d. i. wenn man an irgend einen Punkt C derſelben AC, BC, und aus eben dieſem Punkt an EN die Linie CD mit EL gleichlauffend zieht; ſo iſt der Unterſchied der Quadrate über AC, BC gleich dem Rchtk $\alpha \times ED$. Denn man fälle aus C auf AB das Perpendikel CK; ſo iſt nach dem 1ſten Lehnſ. des IIten Buchs der Unterſchied der Quadrate über AC, BC gleich dem doppelten Rchtk $AB \times HK$. Diß doppelte Rchtk aber verhält ſich zu dem doppelten Rchtk $AB \times HB$ wie HK zu HB, d. i. wegen der Parallelen wie ED zu EN, oder wie das Rchtk $\alpha \times ED$ zu dem Rchtk $\alpha \times EN$. Nun iſt nach der Verzeichnung das Rchtk $\alpha \times EN$ gleich dem doppelten Rchtk $AB \times HB$, folglich iſt auch das Rchtk $\alpha \times ED$ gleich dem doppelten Rchtk $AB \times HK$, d. i. gleich dem Unterſchied der Quadrate über AC, BC.

Es ſeye nun b) CD ſenkrecht auf AB; ſo iſt die der Lage nach gegebene Linie ED entweder einerley mit AB oder nicht. Iſt ED mit AB einerley Linie (Fig. 86.); ſo iſt folglich, wenn man wieder AB in H in 2 gleiche Theile theilt, $2\,AB \times HD = \alpha \times ED$. Es iſt aber entweder die Summe der gegebenen Linie EH und der Linie ED, oder der Unterſchied dieſer Linien gleich der Linie HD. Mithin iſt entweder die Summe des Rchtks $2\,AB \times HE$, d. i. eines gegebenen Raums, und des Rchtks $2\,AB \times ED$, oder der Unterſchied dieſer Rchtke gleich dem Rchtk $\alpha \times ED$, alſo der gegebene Raum $2\,AB \times HE$ entweder gleich der Summe, oder dem Unterſchied der Rchtke $2\,AB \times ED$ und $\alpha \times ED$, folglich iſt, weil AB und α gegeben ſind, ED der Gröſſe nach gegeben. Weil alſo aus 2 gegebenen Punkten A, B an einen Punkt C hin 2 gerade Linien AC, BC gezogen ſind, und der Unterſchied der über denſelben beſchriebenen

Qua-

Quadrate gleich iſt einem gegebenen Raum, nemlich dem Rchtk $\alpha \times ED$; ſo berührt der Punkt C eine der Lage nach gegebene gerade Linie nach dem 1ſten Saz des IIten Buchs. Die Kompoſition erhellet von ſelbſt. Iſt aber ED mit AB nicht einerley Linie; ſo iſt entweder ED mit AB gleichlauffend, oder nicht. Sind ED, AB gleichlauffend (Fig. 87.) ſo begegne CD der Linie AB in K, und aus E fälle man auf AB das Perpendikel Ee; ſo iſt folglich der Punkt e gegeben, und $eK = CD$, mithin der Fall ganz auf den nächſt vorhergehenden zurük gebracht. Iſt endlich ED nicht gleichlauffend mit AB (Fig. 88.); ſo begegnen dieſe beyden der Lage nach gegebenen Linien einander in einem gegebenen Punkt I (28. D.), und wenn CD der Linie AB in dem Punkt K begegnet, und AB in H in 2 gleiche Theile getheilt iſt; ſo iſt, nach dem 1ſten Lehnſ. des IIten Buchs der Unterſchied der Quadrate über AC, BC gleich dem doppelten Rchtk $AB \times HK$, folglich diß doppelte Rchtk gleich dem Rchtk $\alpha \times ED$, d. i. entweder gleich der Summe eines gegebenen Raums, nemlich des Rchtks $\alpha \times IE$ und des Rchtks $\alpha \times ID$, oder gleich dem Unterſchied dieſer Räume. Weil nun ID zu IK ein gegebenes Verhältniß hat; ſo iſt, wenn man β zu α in eben dieſem Verhältniß nimmt, β gegeben, und der Raum $\beta \times IK$ gleich dem Raum $\alpha \times ID$. Mithin iſt das doppelte Rchtk $AB \times HK$ gleich der Summe oder dem Unterſchied eines gegebenen Raums $\alpha \times IE$ und des Rchtks $\beta \times IK$. Es iſt aber das Rchtk $\beta \times IK$ gleich der Summe oder dem Unterſchied eines gegebenen Raums, nemlich des Rchtks $\beta \times IH$, und des Rechtks $\beta \times HK$. Wenn man alſo die beyden gegebenen Räume, nemlich das Rchtk $\alpha \times IE$ und das Rchtk $\beta \times IH$ zuſammen nimmt, oder von einander abzieht; ſo iſt ihre Summe, oder ihr Unterſchied ein gegebener Raum P. Folglich iſt das Rchtk $2\,AB \times HK$ gleich der Summe oder dem Unterſchied des gegebenen Raums P, und des Rchtks $\beta \times HK$.

$\beta \times HK$. Weil nun AB, β gegeben ſind; ſo iſt folglich HK, mithin das doppelte Rechtek $AB \times HK$ gegeben. Mithin berührt nach dem 1ſten Saz des IIten Buchs der Punkt C eine der Lage nach gegebene gerade Linie. Die Kompoſition ergiebt ſich von ſelbſt, und man ſieht leicht, daß in allen Fällen, in welchen CD ſenkrecht auf AB iſt, der Ort des Punkts C die der Lage nach gegebene Linie CD ſelbſt ſeyn werde.

2. Seyen nun über AC, BC keine Quadrate, aber doch ähnliche der Gattung nach gegebene Figuren beſchrieben, und das übrige bleibe, wie vorhin; ſo berührt auch in dieſem Fall der Punkt C eine der Lage nach gegebene gerade Linie. Es ſeye a die Figur über AC, und b die Figur über BC: weil nun nach der Vorausſezung $a : AC^2 = b : BC^2$; ſo hat folglich auch der Unterſchied der Figuren a, b zu dem Unterſchied der Quadrate über AC, BC eben diß Verhältniß von a zu AC^2. Und, weil die Figuren der Gattung nach gegeben ſind; ſo iſt folglich das Verhältniß jeder derſelben zu dem Quadrat der Linie, über welcher ſie beſchrieben ſind, gegeben. Man nehme α zu β in eben dieſem Verhältniß; ſo iſt, weil α gegeben iſt, auch β gegeben, und es hat der Unterſchied der Figuren a, b zu dem Unterſchied der Quadrate über AC, BC eben das Verhältniß, wie α zu β, d. i. wie $\alpha \times ED$ zu $\beta \times ED$. Nach der Vorausſezung aber iſt der Unterſchied der Figuren a, b gleich dem Rchtk $\alpha \times ED$, mithin iſt der Unterſchied der Quadrate über AC, BC gleich dem Rchtk $\beta \times ED$; folglich berührt der Punkt C nach nr. 1. eine der Lage nach gegebene gerade Linie. Die Kompoſition erhellet von ſelbſt.

3. ſeyen die über AC, BC beſchriebenen Figuren nicht ähnlich, und das übrige bleibe wie vorhin; ſo berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis. Diß wird auf ähnliche Art bewieſen, wie der 2te und 3te Saz des Simſonſchen Anhangs. Es kommt nem-

lich alles darauf hinaus, daß gezeigt wird, eine andere der Gattung nach gegebene Figur, die auf einer aus einem gegebenen Punkt an C hin gezogenen Linie beschrieben wird, seye gleich der Summe des oft genannten Rchtks, und eines gegebenen Raums. Damit ist also alles auf einen in diesem Anhang bewiesenen Zus. des 3ten Sazes unsers IIten Buchs zurük gebracht.

Aehnliche Zusäze 1. 2. 3. wie bey dem 3ten Saz gelten nun offenbahr auch überhaupt bey allen unter Nr. I. angeführten besondern Fällen. Und mit Voraussezung dieser Zusäze wird dann auf eben die Art, wie in dem 4ten Saz des Simsonschen Anhangs gezeigt, daß, wenn nun auch

II. drey, oder mehrere Punkte der Lage nach gegeben, und aus denselben an einen Punkt C hin gerade Linien gezogen sind, und die Summe von einigen über ihnen beschriebenen der Gattung nach gegebenen Figuren gleich ist der Summe des oft genannten Rchtks, und der über den übrigen Linien beschriebenen der Gattung nach gegebenen Figuren, daß, sage ich, auch dieser Fall auf den Fall von 2 gegebenen Punkten könne zurük gebracht werden, und folglich der Punkt C entweder eine der Lage nach gegebene gerade Linie, oder einen der Lage nach gegebenen Umkreis berühre, je nachdem nemlich die 2 der Gattung nach gegebenen Figuren, auf welche am Ende alles zurük gebracht wird, ähnlich sind, oder nicht. Ich halte mich also nicht länger dabey auf, und bemerke nur noch, daß auch in diesem IIten Fall ähnliche Zusäze Statt finden, wie bey dem 3ten Saz des IIten Buchs.

Zweys-

Zweyter Anhang

des Ueberſezers.

Sammlung

geometriſcher,

mit Hülfe der vorhergehenden Oerter

aufgelöſter Aufgaben.

lich alles darauf hinaus, daß gezeigt wird, eine andere der Gattung nach gegebene Figur, die auf einer aus einem gegebenen Punkt an C hin gezogenen Linie beschrieben wird, seye gleich der Summe des oft genannten Rchtks, und eines gegebenen Raums. Damit ist also alles auf einen in diesem Anhang bewiesenen Zus. des 3ten Sazes unsers IIten Buchs zurük gebracht.

Aehnliche Zusäze 1. 2. 3. wie bey dem 3ten Saz gelten nun offenbahr auch überhaupt bey allen unter Nr. I. angeführten besondern Fällen. Und mit Vorausseżung dieser Zusäze wird dann auf eben die Art, wie in dem 4ten Saz des Simsonschen Anhangs gezeigt, daß, wenn nun auch

II. drey, oder mehrere Punkte der Lage nach gegeben, und aus denselben an einen Punkt C hin gerade Linien gezogen sind, und die Summe von einigen über ihnen beschriebenen der Gattung nach gegebenen Figuren gleich ist der Summe des oft genannten Rchtks, und der über den übrigen Linien beschriebenen der Gattung nach gegebenen Figuren, daß, sage ich, auch dieser Fall auf den Fall von 2 gegebenen Punkten könne zurük gebracht werden, und folglich der Punkt C entweder eine der Lage nach gegebene gerade Linie, oder einen der Lage nach gegebenen Umkreis berühre, je nachdem nemlich die 2 der Gattung nach gegebenen Figuren, auf welche am Ende alles zurük gebracht wird, ähnlich sind, oder nicht. Ich halte mich also nicht länger dabey auf, und bemerke nur noch, daß auch in diesem IIten Fall ähnliche Zusäze Statt finden, wie bey dem 3ten Saz des IIten Buchs.

Zweys

Zweyter Anhang

des Ueberſezers.

Sammlung

geometriſcher,

mit Hülfe der vorhergehenden Oerter

aufgelößter Aufgaben.

lich alles darauf hinaus, daß gezeigt wird, eine andere der Gattung nach gegebene Figur, die auf einer aus einem gegebenen Punkt an C hin gezogenen Linie beschrieben wird, seye gleich der Summe des oft genannten Rchtks, und eines gegebenen Raums. Damit ist also alles auf einen in diesem Anhang bewiesenen Zus. des 3ten Sazes unsers IIten Buchs zurük gebracht.

Aehnliche Zusäze 1. 2. 3. wie bey dem 3ten Saz gelten nun offenbahr auch überhaupt bey allen unter Nr. I. angeführten besondern Fällen. Und mit Voraussezung dieser Zusäze wird dann auf eben die Art, wie in dem 4ten Saz des Simsonschen Anhangs gezeigt, daß, wenn nun auch

II. drey, oder mehrere Punkte der Lage nach gegeben, und aus denselben an einen Punkt C hin gerade Linien gezogen sind, und die Summe von einigen über ihnen beschriebenen der Gattung nach gegebenen Figuren gleich ist der Summe des oft genannten Rchtks, und der über den übrigen Linien beschriebenen der Gattung nach gegebenen Figuren, daß, sage ich, auch dieser Fall auf den Fall von 2 gegebenen Punkten könne zurük gebracht werden, und folglich der Punkt C entweder eine der Lage nach gegebene gerade Linie, oder einen der Lage nach gegebenen Umkreis berühre, je nachdem nemlich die 2 der Gattung nach gegebenen Figuren, auf welche am Ende alles zurük gebracht wird, ähnlich sind, oder nicht. Ich halte mich also nicht länger dabey auf, und bemerke nur noch, daß auch in diesem IIten Fall ähnliche Zusäze Statt finden, wie bey dem 3ten Saz des IIten Buchs.

Zweys

Zweyter Anhang

des Ueberſezers.

Sammlung

geometriſcher,

mit Hülfe der vorhergehenden Oerter

aufgelößter Aufgaben.

Auflösungen geometrischer Aufgaben mit Hülfe der Oerter kommen sehr häufig vor, ohne daß man eben immer den Nahmen: „Oerter“ braucht, wobey aber natürlich die Sache selbst immer dieselbe bleibt. Gleich die allererste Aufgabe in Euklids Elementen dient zum Beweis hievon. Euklid braucht wirklich zur Auflösung den 1sten Ort unsers Isten Buchs, und diß ist vielleicht der einfachste Fall, wo unsere Oerter angewendet werden können. Auch von den folgenden Aufgaben werden einige, häufig gerade eben so aufgelöst, wie sie mit Hülfe der Oerter gefunden werden, nur dient der Gebrauch der Oerter manchmahl zu einer desto kürzern Analysis.

1. Aufgabe.

Figg. 89. a. b.

Der Flächen-Innhalt eines Dreyeks ABC, eine seiner Seiten AB, und der gegenüber stehende Winkel C sind gegeben: das Dreyek zu beschreiben.

Analyse.

Weil AB die Grundlinie eines der Grösse nach gegebenen Dreyeks der Lage und Grösse nach gegeben ist; so berührt der Punkt C eine der Lage nach gegebene mit AB gleichlauffende gerade Linie (3, 1. Ap.). Weil aber auch der Winkel C gegeben ist; so berührt eben dieser Punkt einen der Lage nach gegebenen Umkreis (2, 1. A.);

folglich muß der Punkt C ſowohl auf der der Lage nach gegebenen geraden Linie, als auf dem der Lage nach gegebenen Umkreis, alſo nothwendig da liegen, wo dieſe beyden Oerter einander ſchneiden; mithin iſt der Punkt C (28. D.) gegeben, folglich ſind die geraden Linien AC, BC der Lage und Gröſſe nach gegeben.

Beſtimmung.

Weil die beyden Oerter, nemlich die gerade Linie CD, und der Umkreis AEB einander begegnen ſollen, ſo muß die Linie CD von AB nicht weiter entfernt ſeyn, als derjenige Punkt des Umkreiſes AEB, welcher am weiteſten von AB entfernt iſt. Man theile AB in F in 2 gleiche Theile, und ziehe durch den Mittelpunkt G des Umkreiſes AEB die Linie FG, die dem Umkreis in E, und der Linie CD in H begegne; ſo iſt, wie leicht aus 15, 3. E. folgt, E derjenige Punkt des Umkreiſes AEB, welcher die gröſßte Entfernung von AB hat. Ueberdiß iſt FE ſenkrecht auf AB (3, 3. E.), folglich auch auf CD, weil nach 3, 1. A. CD mit AB gleichlauft. Mithin iſt FH die Entfernung der Linie CD von AB, und es darf, wenn die Aufgabe möglich ſeyn ſoll, FH nicht gröſſer ſeyn, als FE. Oder, man ziehe noch die Linien AE, BE; ſo iſt, weil ſich alle über AB beſchriebene Dreyeke verhalten, wie ihre Höhen, AEB das gröſßte Dreyek, das in den Umkreis AEB beſchrieben, folglich den gegebenen Winkel haben kann. Es ſind aber die gleichen Winkel EAB, EBA gleich dem Komplement des halben gegebenen Winkels. Man beſchreibe alſo über AB ein Dreyek AEB, ſo, daß jeder der Winkel EAB, EBA gleich ſeye dem Komplement des halben gegebenen Winkels. Iſt nun der gegebene Innhalt des zu verzeichnenden Dreyeks gröſſer, als das Dreyek AEB; ſo iſt die Aufgabe unmöglich: iſt er dieſem Dreyek gleich; ſo

iſt

iſt nur Ein Punkt auf dem Umkreis AEB, dem die Linie CD begegnet, nemlich eben der Punkt E ſelbſt: iſt endlich der gegebene Innhalt kleiner, als das Dreyek AEB; ſo giebt es auf dem Umkreis 2 Punkte C, D, in welchen ihm die Linie CD begegnet.

Kompoſition.

Es ſeye alſo der gegebene Innhalt des zu beſchreibenden Dreyeks nicht gröſſer, als das Dreyek AEB; ſo ziehe man nach 3, 1. A. den Ort CD, d. h. man beſchreibe (45, 1. E.) über AB ein Prllgrm. ABIK, das doppelt ſo groß ſeye, als der gegebene Flächen-Innhalt des Dreyeks. Ferner beſchreibe man nach 2, 1. A. den Ort AEB, d. h. man beſchreibe (33, 3. E.) über AB einen Kreis-Abſchnitt AEB, der des gegebenen Winkels fähig ſeye; ſo begegnet folglich nach der Beſtimmung IK dem Kreis-Abſchnitt AEB entweder in 2 Punkten C, D, und man zieht an einen derſelben, an welchen man will, die Linien AC, BC, oder IK begegnet dem Kreis nur in einem Punkt E, und man zieht AE, BE; ſo iſt in jenem Fall das Dreyek ACB, in dieſem das Dreyek AEB das verlangte Dreyek. Denn nach 3, 1. A. hat es den verlangten Flächen-Innhalt, und nach 2, 1. A. den verlangten Winkel.

Berechnung.

Man fälle aus C auf AB das Perpendikel CL, das dem Kreiſe wieder in M, und dem mit AB gleichlaufſend gezogenen Durchmeſſer in O begegne, und es ſeye der Flächen-Innhalt des Dreyeks $= a^2$, $AB = b$, der gegebene Winkel $= \beta$ $FL = x$; ſo iſt $AL = \frac{1}{2}b - x$, $BL = \frac{1}{2}b + x$. Nun iſt $LO = FG$, d. h. nach der Berechn. bey 2, I. Ap. es iſt $LO = \frac{1}{2}b$.

ctg. β. Ferner ist $CL = \frac{2a^2}{b}$. Weil nun $OM = CO = CL \mp LO$; so ist $LM = OM \mp OL = CL \mp 2\,OL = \frac{2a^2}{b} \mp b$ ctg. β, oder, weil man die Cotangente des stumpfen Winkels als negativ ansieht, überhaupt $LM = \frac{2a^2}{b} - b$ ctg. β. Weil nun $AL \times LB = CL \times LM$ (35, 3. E.), d. h. weil $(\frac{1}{2}b - x)(\frac{1}{2}b + x) = \frac{2a^2}{b}\left(\frac{2a^2}{b} - b \text{ ctg. } \beta\right)$; so ist folglich $\frac{1}{4}b^2 - \frac{4a^4}{b^2} + 2a^2$ ctg. $\beta = x^2$, oder

$$x = \mp\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}b + \frac{2a^2}{b}\right)\left(\tfrac{1}{2}b - \frac{2a^2}{b}\right) + 2a^2 \text{ctg.}\beta}.$$

Mithin ist

$$AL = \tfrac{1}{2}b \mp \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}b + \frac{2a^2}{b}\right)\left(\tfrac{1}{2}b - \frac{2a^2}{b}\right) + 2a^2 \text{ctg.}\beta},$$

und

$$BL = \tfrac{1}{2}b \mp \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}b + \frac{2a^2}{b}\right)\left(\tfrac{1}{2}b - \frac{2a^2}{b}\right) + 2a^2 \text{ctg.}\beta}.$$

Vergl. Schulzes Taschenb. IItes Heft. S. 410, und für den Fall, wenn der gegebene Winkel ein rechter ist, Schwabs Samml. geometr. Aufg. die seiner Uebers. der Data angehängt ist, 23ste Aufg. Schulze nimmt $BL - AL$ als die unbekannte Linie, als das x an. Diß ist aus dem obigen

$$= \sqrt{\left(b + \frac{4a^2}{b}\right)\left(b - \frac{4a^2}{b}\right) + 8a^2 \text{ctg.}\beta}.$$ Die Art, wie diese Formel hier hergeleitet ist, wird hauptsächlich durch die Anwendung des geometrischen Lehrsazes 33, 3. E. einfacher, als die Schulzische. Kennt man

man einmahl AL, BL; so findet sich, da man auch CL kennt, in den rechtwinklichten Dreyeken ALC, BLC das übrige leicht. Die Bestimmung läßt sich ebenfalls leicht trigonometrisch ausdruken. Es darf der Innhalt des Dreyeks höchstens gleich seyn dem Dreyek AEB, d. i. $= \frac{1}{2}$ AB × FE. Nun ist FE : $\frac{1}{2}$ AB $=$ ctg. $\frac{1}{2}\beta$: sin. tot. Mithin darf der gegebene Flächen-Innhalt nicht grösser seyn, als $\frac{1}{4}$ b^2 ctg. $\frac{1}{2}\beta$.

2. Aufgabe.

Figg. 90. a. b. c. d.

Aus einem gegebenen Punkt A an zwey der Lage nach gegebene Linien BC, BD, die einander in einem Punkt B begegnen, eine gerade Linie EAF so zu ziehen, daß die zwischen A und den Linien BC, BD abgeschnittene Stüke EA, AF ein gegebenes Verhältniß unter einander haben.

Analyse.

Es sind auf der geraden Linie FE aus einem auf ihr gegebenen Punkt A zwey Stüke AE, AF abgeschnitten, welche ein gegebenes Verhältniß unter einander haben, und der Endpunkt F eines dieser Stüke berührt eine der Lage nach gegebene gerade Linie BD, mithin berührt auch der Endpunkt E des andern Stüks eine der Lage nach gegebene mit BD gleichlauffende Linie HE (4. 1. A.). Der Voraussezung nach aber berührt der Punkt E auch die der Lage nach gegebene gerade Linie BC; folglich ist E der Durchschnittspunkt von HE und BC, und also gegeben (28. D.). Mithin ist die Linie EA der Lage und Grösse nach (29. D.), mithin der Punkt F, (28. D.) folglich auch AF der Lage und Grösse nach (29. D.) gegeben. Und, weil nach der Voraus-

ſezung BC mit BD nicht gleichlauft; ſo ſchneidet BC immer die mit BD gleichlauffende Linie HE.

Kompoſition.

Man verzeichne den Ort HE nach 4, 1. A., d. h. man fälle aus A auf BD das Perpendikel AG, und nehme auf demſelben AH zu AG in dem gegebenen Verhältniß, welches AE zu AF haben ſoll, durch H ziehe man HE mit BD gleichlauffend, und HE begegne der Linie BC in E, endlich ziehe man die gerade Linie EAF; ſo iſt diß die geſuchte Linie, d. h. es wird AE zu AF das gegebene Verhältniß von AH zu AG haben. Der Beweis erhellet von ſelbſt.

Berechnung.

Da hiebey in Anſehung der Zeichen ſehr viele Fälle vorkommen können, je nachdem der Punkt A zwiſchen, oder auſſerhalb der Linien BC, BD, und je nachdem der Punkt H zwiſchen A und G, oder auf der Verlängerung von AG entweder nach A, oder nach G hin liegt, und dieſe Fälle im übrigen ganz auf einerley Art behandelt werden; ſo begnüge ich mich den Fall von Fig. 90. a. zu betrachten. Es ſeye alſo der Winkel CBD $= \varphi$, der Winkel AFB $= x$, AG $= a$, BG $= b$, das Verhältniß von AE zu AF, d. h. von AH zu AG gleich dem von n zu m, und AG begegne der Linie BC in I; ſo iſt

$$AH : a = n : m$$
$$HE : AH = \text{ctg. } x : \text{ſin. tot.}$$
$$HI : HE = \text{ſin. tot} : \text{ctg. } \varphi$$

folglich gleichförmig $HI : a = n.\ \text{ctg. } x : m\ \text{ctg. } \varphi$, oder $HI \times m.\ \text{ctg. } \varphi = a.\ n.\ \text{ctg. } x$. Nun iſt $HI = HG - IG$, und $HG : a = m - n : m$, oder

HG

$HG = \frac{a(m-n)}{m}$; $IG : b = \text{fin. tot} : \text{ctg. } \varphi$, oder $IG = \frac{b}{\text{ctg. } \varphi}$. Mithin ist $(m-n)$ a. ctg. $\varphi - bm = an$ ctg. x, oder ctg. $x = \frac{(m-n)}{n}$ ctg. $\varphi - \frac{bm}{an}$. Hieraus findet man nun in den ähnlichen Dreyeken AHE, AGF, in welchen alle Winkel, und $AG = a$, $AH = \frac{an}{m}$ gegeben sind, leicht auch AE, AF. Wäre das Perpendikel AG nicht unmittelbar, sondern dafür der Winkel AKB (Fig. 90. c.), den eine durch A gezogene Linie mit BD macht, und KG die Entfernung des Durchschnittpunkts der Linien AK, BD von dem Perpendikel AG gegeben; so würde man hieraus leicht AG finden. Es ist nemlich $AG : KG = \text{fin. tot} : \text{ctg. } AKB$, folglich, wenn $KG = c$, $AKB = p$ gesezt wird, ist $AG = \frac{c}{\text{ctg. } p}$. Diß in der vorhin gefundenen Formel für a substituirt, giebt ctg. $x = \frac{(m-n) \text{ ctg. } \varphi}{n} - \frac{bm}{cn}$. ctg. p. Wäre nun $b = c$, d. h. gienge (Fig. 90. d.) die durch A gezogene Linie durch den Punkt B; so würde ctg. $x = \frac{(m-n) \text{ ctg. } \varphi}{n} - \frac{m}{n}$ ctg. p. In diesem lezten Fall braucht man also, um den Winkel AFB zu finden, die Linie BG noch nicht zu kennen, oder: der Punkt A muß nicht nothwendig gegeben seyn, wenn er nur auf der der Lage nach gegebenen Linie BA liegt. Aber alsdann ist auch die Grösse von AE, AF noch nicht bestimmt. Diß zeigt auch schon der Anblik der Figur. Denn man ziehe irgend eine Linie aef gleichlauffend mit AEF; so ist $ae : af = AE : AF$.

Dieser

Dieſer lezte Fall kommt in Anwendung auf einen Kometen, von dem man voraus ſezt, er bewege ſich (eine kurze Zeit über) gleichförmig in einer geraden Linie, bey Newton Arithm. Vniv. Probl. 30. S. 126. flg. nach der Graveſand. Ausgabe vor, um aus 3 Beobachtungen deſſelben die Neigung ſeiner nach der Vorausſezung geradlinichten Laufbahn gegen die Geſichtslinien zu beſtimmen. Wenn nemlich das Auge in B iſt, (Fig. 90. d.) und der Komet das erſte mahl in F, das 2te mahl in E, das dritte mahl in A erſcheint; ſo weiß man die Neigungen der Geſichtslinien BA, BE, BF gegen einander, oder: dieſe Linien können als der Lage nach gegeben angeſehen werden. Ueberdiß kennt man (weil der Komet ſich gleichförmig bewegt, und folglich AE, AF ſich zu einander verhalten, wie die Zeit, die er brauchte von E nach A, und von F nach A zu kommen) das Verhältniß von AE zu AF. Mithin läßt ſich nach der lezten Formel der Winkel AFB beſtimmen. Vergl. Lamberts Beyträge Iſter Th. S. 179 §. 258. Eine andere praktiſche Anwendung des lezten bey der Berechnung bemerkten Falls ſehe man in Käſtners 7ter aſtron. Abhandl. S. 283 flg. wo die Formel, durch welche x beſtimmt wird, weit einfacher iſt, weil man für die Winkel φ, p bequeme Wehrte von 90°, 45° u. dgl. wählen kann.

3. Aufgabe.

Figg. 91. a — h.

Durch einen gegebenen Punkt D an 2 der Lage nach gegebene gerade Linien BF, CE eine gerade Linie EDF ſo zu ziehen, daß das zwiſchen den Stüken DE, DF enthaltene Rechtek gleich ſeye einem gegebenen Raum.

Analyſe.

Analyse.

Es sind auf der geraden Linie EDF aus einem auf ihr gegebenen Punkt D die Stüke DE, DF abgeschnitten, die ein gegebenes Rechtek einschliessen, und der Endpunkt F eines dieser Stüke berührt eine der Lage nach gegebene gerade Linie BF; folglich berührt der Endpunkt E des andern Stüks einen der Lage nach gegebenen Kreis (8, 1. A.). Eben dieser Punkt berührt aber auch nach der Voraussezung die der Lage nach gegebene gerade Linie EC, mithin ist er gegeben (28. D.); folglich ist EDF der Lage und Grösse nach gegeben (29. 28. 29. D.).

Komposition und Bestimmung.

Man verzeichne den Ort 8, 1. A., d. h. man fälle aus D auf AB das Perpendikel DH, nehme auf welcher Seite von D man will (den Fall ausgenommen, wenn EC, FB gleichlauffen: denn in diesem Fall muß man den Punkt I auf der Seite von D nehmen, auf welcher CE liegt) DI auf dem Perpendikel DH oder auf seiner Verlängerung, so, daß das Rechtek HDI gleich werde dem gegebenen Raum, beschreibe über dem Durchmesser DI einen Kreis, welcher der Linie EC in den Punkten E, e begegne, ziehe durch welchen dieser Punkte man will, die gerade Linie EDF; so ist diß die gesuchte Linie, d. h. das Rchtk EDF ist gleich dem gegebenen Raum. Wenn CE nicht senkrecht ist auf BF; so begegne DH der Linie CE in O. Weil nun erfodert wird, daß der Kreis der Linie CE wenigstens in einem Punkt begegne; so darf, in dem Fall, daß FB, CE gleichlauffen, (Fig. 91. a. b.) DI nicht kleiner seyn, als DO, d. h. der gegebene Raum, nemlich das Rechtek HDI darf nicht kleiner seyn, als das Rechtek HDO.

Ist

Iſt DI = DO; ſo berührt, wie man leicht ſieht, die Linie CE den Kreis in I: iſt DI > DO; ſo ſchneidet ſie ihn in 2 Punkten. Sind aber FB, CE nicht gleichlauffend (Fig. 91. c — g.); ſo begegnen ſie einander in einem Punkt A, und wenn man aus dem Mittelpunkt K des Kreiſes auf CE das Perpendikel GK fälle; ſo darf der Halbmeſſer DK des Kreiſes nie kleiner ſeyn als GK. Weil nun die Dreyeke GKO, HAO ähnlich ſind; ſo iſt GK: KO = AH: HO. Nun iſt in dem Fall der Fig. 91. c. KO = DO — DK; folglich wird, wenn nun DK bey dem hier vorgeſtellten Fall die kleinſte Gröſſe hat, die es nur immer haben kann, d. h. wenn DK = GK, die obige Proportion dieſe: DK: DO — DK = AH: AO, folglich DK: DO = AH: AH + AO, oder HD × DK: HD × DO = AH: AH + AO, oder, weil DI = 2 DK: HD × DI: 2 HD × DO = AH: AH + AO. Wenn alſo DK, folglich DI, folglich der gegebene Raum HD × DI die kleinſte Gröſſe hat, bey welcher die Aufgabe noch möglich iſt; ſo iſt er gleich einem Raum, der ſich zu dem doppelten Rechtek HDO verhält, wie AH zu AH + AO, und wenn er dieſem Raum gleich iſt; ſo berührt die Linie CE den Kreis; iſt er gröſſer, ſo ſchneidet ſie ihn in 2 Punkten; iſt er kleiner, ſo iſt die Aufgabe unmöglich. Bey den übrigen Fällen iſt die Beſtimmung nur darinn verſchieden, daß bey einigen KO nicht wie hier dem Ueberſchuß von DO über DK; ſondern entweder dem Ueberſchuß von DK über DO, oder der Summe von DK und DO gleich iſt, und hienach der 2te Theil der Proportion abgeändert wird. Diß läßt ſich leicht aus der Lage, den die Punkte D, O, K gegen einander haben, beurtheilen. Iſt endlich CE ſenkrecht auf BF (Fig. 91. h.); ſo darf DK nicht kleiner als GK, d. i. nicht kleiner als AH, folglich der gegebene Raum nicht kleiner, als das doppelte Rchtk DHA ſeyn. Iſt nun die Aufgabe nach der Beſtimmung

mung möglich, und die Kompoſition gemacht; ſo wird die Richtigkeit dieſer Kompoſition ſo erwieſen: Nach der Beſtimmung ſchneidet der Kreis die Linie CE in einem Punkt E, und nach 8, 1. A. iſt das Rchtk FDE gleich dem Rchtk HDI, d. i. nach der Verzeichnung gleich dem gegebenen Raum. In dem Fall, wenn CE, BF einander in einem Punkt A begegnen, läßt ſich die Beſtimmung auch noch auf folgende Art ausdruken: Es ſeye der gegebene Raum ſo klein als immer möglich, oder CE berühre den Kreis in einem Punkt L (Fig. 91. d.), und man ziehe LDM; ſo iſt in allen Fällen die Summe der Winkel ALM, DLK gleich der Summe der Winkel AML, LDK (jede dieſer Summen nemlich gleich einem rechten Winkel). Nun iſt DLK = LDK, folglich ALM = AML, und AL = AM, folglich darf der gegebene Raum nicht kleiner ſeyn, als das Rchtk LDM, das zwiſchen den Stüken LD, DM einer geraden Linie enthalten iſt, die durch den Punkt D ſo gezogen wird, daß die Stüke, die ſie von AB, AC abſchneidet, gleich werden. Vergl. l'Huilier de Maximis et Minimis, Pars prior L. I. C. II. §. 57. p. 54. Man ſieht leicht, daß die Linie LDM gezogen werden kann, wenn man den Winkel BAC in 2 gleiche Theile theilt, und auf die Theilungslinie aus D ein Perpendikel fällt.

Berechnung.

Man findet ſehr leicht nach der Kompoſition DI, DK, folglich, weil DO gegeben iſt, auch KO, mithin in dem Dreyek OKE, in welchem die Seiten OK, KE und der Winkel O bekannt ſind, das übrige nemlich OE, und die Winkel OKE, OEK. Eben damit kennt man auch die Winkel EKD, EDK, OED, HFD, und leicht findet man HF, DF, DE.

4. Auf-

4. Aufgabe.

Figg. 92. a. b.

Drey gerade Linien AB, AI, AC schneiden einander in einem Punkt A, man solle durch einen auf einer derselben gegebenen Punkt B an die beyden andern eine gerade Linie BIC so ziehen, daß das Rechtek BIC zu dem Quadrat über AI ein gegebenes Verhältniß habe.

Analyse.

Man ziehe durch einen beliebigen Punkt F (den man folglich als gegeben betrachten darf) auf derjenigen geraden Linie, auf welcher nach der Voraussezung der Punkt I liegen soll, eine gerade Linie DFG mit BIC gleichlauffend, und DFG schneide die übrigen Linien AB, AC in den Punkten D, und G; so ist DF: BI = AF: AI = FG: IC, oder verwechselt DF: FG = BI: IC, folglich $DF \times FG : FG^2 = BI \times IC : IC^2$, oder verwechselt $DF \times FG : BI \times IC = FG^2 : IC^2 = AF^2 : AI^2$, oder $DF \times FG : AF^2 = BI \times IC : AI^2$. Nun ist nach der Voraussezung das Verhältniß von $BI \times IC$ zu AI^2 gegeben; mithin ist das Verhältniß von $DF \times FG$ zu AF^2 gegeben. Nun ist AF, folglich auch AF^2, folglich auch $DF \times FG$ gegeben. Und, weil eine gerade Linie DFG gezogen ist, deren Stüke DF, FG, die aus einem auf ihr gegebenen Punkt F abgeschnitten sind, ein gegebenes Rechtek einschliessen, und der Endpunkt D eines dieser Stüke eine der Lage nach gegebene gerade Linie AB berührt; so berührt der Endpunkt G des andern Stüks einen der Lage nach gegebenen Kreis (8, 1. A.). Dieser Punkt berührt aber der Voraussezung nach auch die der Lage nach gegebene gerade Linie AC, mithin ist er gegeben (28. D.), folglich ist die Linie DFG der Lage nach gegeben (29. 28. 29. D.). Und

weil

weil aus dem gegebenen Punkt B die Linie BIC mit der der Lage nach gegebenen Linie DFG gleichlauffend gezogen ist, und durch die der Lage nach gegebenen Linien AI, AC abgeschnitten wird; so ist BIC der Lage (31. D.) und (28. 29. D.) der Grösse nach gegeben.

Komposition und Bestimmung.

Man beschreibe den Ort 8, 1. A. so, daß das Rechtek DFG gleich seye einem Raum, der zu dem Quadrat über AF das gegebene Verhältniß hat, welches das Rchtk BIC zu dem Quadrat über AI haben soll, d. h. man fälle aus dem gegebenen Punkt F auf AB das Perpendikel FE, und nehme auf diesem, oder auf seiner Verlängerung, auf welcher Seite von F man will, die Linie FH so, daß das Rchtk EFH zu dem Quadrat über AF das gegebene Verhältniß habe. Ueber dem Durchmesser FH beschreibe man einen Kreis, und ziehe durch den Punkt G, wo dieser Kreis die Linie AC schneidet, die gerade Linie GFD, und durch den gegebenen Punkt B, die Linie BIC mit DFG gleichlauffend; so ist BIC die gesuchte Linie, d. h. es wird das Rechtek BIC zu dem Quadrat über AI das gegebene Verhältniß haben. Und, weil der Kreis der geraden Linie AC begegnen soll; so ziehe man durch F an AB, AC eine gerade Linie LFK, so, daß die Stüke AL, AK, welche sie von AB, AC abschneidet, gleich groß werden; so darf nach der Bestimmung bey der vorhergehenden Aufgabe das Rechtek EFH nicht kleiner seyn, als das Rechtek LFK oder das Rchtk EFH darf zu dem Quadrat über AF kein kleineres Verhältniß haben, als das Rchtk LFK zu eben diesem Quadrat hat. Nach der Verzeichnung aber hat das Rchtk EFH zu dem Quadrat über AF das gegebene Verhältniß, welches das Rchtk BIC zu dem Quadrat über AI haben soll. Mithin darf dieses gegebene Ver-

hältniß nicht kleiner seyn, als das Verhältniß des Rchtks LFK zu dem Quadrat über AF. Sind diese beyden Verhältnisse gleich; so berührt die Linie AC den Kreis: ist das gegebene Verhältniß grösser; so schneidet sie ihn in 2 Punkten. Ist also die Aufgabe der Bestimmung nach möglich, und die Komposition gemacht; so wird die Richtigkeit derselben so erwiesen. Nach der Bestimmung schneidet der Kreis die gerade Linie AC in einem Punkt G, und nach 8, 1. A. ist das Rchtk DFG gleich dem Rchtk EFH, d. h. das Rchtk DFG hat zu dem Quadrat über AF das gegebene Verhältniß, und nun wird ganz, wie bey der Analyse erwiesen, daß auch das Rchtk BIC zu dem Quadrat über AI eben dieses Verhältniß habe.

Die Auflösung dieser Aufgabe sezt Archimed in dem 8ten Saz seines Buchs von den Konoiden und Sphäroiden als bekannt voraus in dem Fall, wenn die Linie AF zwischen AC, AB liegt, und den Winkel BAC in 2 gleiche Theile theilt. Rivaltus à Flurantia und nach ihm Sturm geben in ihren Ausgaben von Archimed, eine Auflösung für diesen Fall, welche ganz auf die nemliche Art allgemein gemacht werden kann, und im Grunde mit dieser hier einerley ist. Hier nemlich beschrieb man den Kreis so, daß das Rchtk DFG zu dem Quadrat über AF das gegebene Verhältniß hat. Nach jener andern Auflösung solle man das Rchtk AFM so machen, daß diß zu dem Quadrat über AF das gegebene Verhältniß habe, und dann über FM den Kreis FMG so beschreiben, daß er des gegebenen Winkels BAF fähig seye. Diß ist nun im Grunde mit dem vorigen einerley. Denn, weil in den Dreyeken DFA, MFG die Winkel bey F, und auch die bey A und G gleich sind; so sind diese Dreyeke ähnlich, folglich ist AF : DF = FG : FM, oder das Rchtk DFG ist gleich dem Rchtk AFM. Mithin ist auch nach dieser Auflö-

sung

ſung der Kreis ſo beſchrieben, daß das Rchtk DFG zu dem Quadrat über AF das gegebene Verhältniß hat. In der Anwendung, die Archimed von dieſer Aufgabe macht, iſt das gegebene Verhältniß immer gröſſer, als das Verhältniß des Rchtks LFK zu dem Quadrat über AF, folglich die Aufgabe immer möglich. Wenn aber Rivalt und Sturm beweiſen wollen, daß zu der Möglichkeit der Aufgabe nothwendig erfodert werde, daß das gegebene Verhältniß gröſſer ſeye, als das eben angeführte, wenn ſie nahmentlich in dem Fall der Gleichheit beyder Verhältniſſe die Aufgabe für unmöglich halten; ſo irrten ſie offenbahr, und es iſt auch nicht ſchwer, den Grund ihres Irrthums zu finden. Dieſe beyden Verhältniſſe dürfen wohl gleich, nur aber das erſtere nicht kleiner als das leztere ſeyn.

Berechnung.

Dieſe iſt zu Beſtimmung der Linie DFG ganz die nemliche wie vorhin. Eben damit ſind dann auch die Winkel, unter welchen die aus dem gegebenen Punkt B mit DFG gleichlauffend gezogene Linie BIC mit AB, AI, AC macht, bekannt.

5. Aufgabe.

Fig. 93.

Es ſind 3 Punkte A, B, C gegeben, und man hat in einem 4ten Punkt D beobachtet, unter welchen Winkeln je zwey der gegebenen Punkte erſcheinen: die Lage dieſes 4ten Punkts D zu beſtimmen.

Analyſe und Beſtimmung.

Der Punkt D liegt entweder mit 2 der gegebenen Punkte, z. B. mit den Punkten A und B auf einer gera-

den Linie, oder nicht. Er liege 1) (Figg. 93. a. b. c. d.) nicht mit 2 der gegebenen Punkte auf einer geraden Linie. Weil nun die Linien AD, BD, welche den gegebenen Winkel ADB einschlieſſen, durch 2 gegebene Punkte A und B gehen; so berührt der Punkt D einen der Lage nach gegebenen Umkreis (2, 1. Ap.). Eben so, weil die Linien BD, CD, die den gegebenen Winkel BDC einschlieſſen, durch 2 gegebene Punkte B, C gehen; so berührt der Punkt D wiederum einen der Lage nach gegebenen Umkreis (2, 1. Ap.). Sollte nun (Figg. 93. e. f.) dieſer leztere Kreis mit dem vorhergehenden erſtern einerley seyn; so müßte also der Kreis, der durch die Punkte A, B, D gienge, auch durch den Punkt C gehen, d. h. es müßte sich um das Vierek ABCD ein Kreis beſchreiben laſſen; oder, wenn der Punkt B und D auf verſchiedenen Seiten der Linie AC liegen; so müßte die Summe der Winkel ABC, und ADC gleich seyn zwey rechten (22, 3. E.), liegen aber die Punkte B, D auf einerley Seite der Linie AC; so müßten die Winkel ABC, ADC gleich seyn (21, 3. E.). Wäre nun einer von dieſen Fällen; so könnte der Punkt D noch auf jedem beliebigen Punkt des einzigen der Lage nach gegebenen Kreiſes liegen, und die Aufgabe bliebe also noch unbeſtimmt. Es seye folglich keiner dieſer Fälle; so ſind mithin die Kreiſe ABD, ACD 2 verſchiedene der Lage nach gegebene Kreiſe, und da der Punkt D auf jedem derſelben liegt; so liegt er auf ihrem Durchſchnittspunkt, und iſt folglich gegeben.

Die Kompoſition ergiebt ſich von ſelbſt.

Es liege 2) (Figg. 93. g. h.) der Punkt D mit 2 der gegebenen Punkte, z. B. mit A und B, auf einer geraden Linie. Weil nun aus dem gegebenen Punkt C an die der Lage nach gegebene gerade Linie AB eine gerade Linie CD unter einem gegebenen Winkel CDA gezogen

zogen iſt; ſo iſt (33. D.) die Lage von CD, mithin (28. D.) der Punkt D gegeben. Nur der einzige Fall iſt hier ausgenommen, wenn C ebenfalls auf der geraden Linie AB läge.

Auch hier wieder iſt die Kompoſition für ſich klar.

Berechnung.

Figg. 93. a. b. c. d.

Für den 1ſten Fall. Es ſeye E der Mittelpunkt des über AB, und F der Mittelpunkt des über BC beſchriebenen Kreiſes, und es ſeye AB = a, BC = b, ABC = B, ADB = α, BDC = β; ſo iſt ABE = $\pm$ (90° — α), FBC = $\pm$ (90° — β), EBF = ABC $\mp$ ABE $\mp$ FBC = B + α + β — 180°. Kürze halber heiſſe EBF, d. h. B + α + β — 180° = d. Nun iſt nach der Berechnung von 2, 1. Ap. BE = $\frac{a}{2. \text{ſin. } \alpha}$, BF = $\frac{b}{2. \text{ſin. } \beta}$. Und, weil folglich in dem Dreyek BEF die 2 Seiten BE, BF nebſt dem eingeſchloſſenen Winkel bekannt ſind; ſo findet man jeden der übrigen Winkel, z. B. den Winkel BEF durch die Formel:

$$\text{ctg. BEF} = \frac{EB}{BF. \text{ ſin. EBF}} - \text{ctg. EBF}$$

d. h. $$\text{ctg. BEF} = \frac{a. \text{ ſin. } \beta}{b. \text{ ſin. } \alpha. \text{ ſin. d}} - \text{ctg. d.}$$

Und eben ſo

$$\text{ctg. BFE} = \frac{b \text{ ſin. } \alpha}{a \text{ ſin. } \beta. \text{ ſin. d}} - \text{ctg. d.}$$ Es iſt aber, weil EF die Linie BD halbirt, BEF = BAD, und BFE = BCD. Da man alſo die Winkel BAD, BDA nebſt der Seite AB in dem Dreyek ABD, und

die Winkel BCD, BDC nebſt der Seite BC in dem Dreyek BCD kennt; ſo iſt es leicht die übrigen Seiten und Winkel zu berechnen. In dem 2ten Fall (Figg. 93. g. h.) ſind in dem Dreyek BCD die Winkel bey B, D, nebſt der Seite BC gegeben, woraus das übrige leicht gefunden wird. Man vergl. Schwabs Samml. 28ſte Aufg. Lamb. Beiträge 1. Th. S. 73 flg. Tempelhof theils in der Analyſis endlicher Gröſſen, S. 482 flg. theils in ſeiner Ausgabe von Clairauts Anfangsgr. der Algebr. S. 203 flg. an welchem leztern Ort ſich im Grund dieſelbe Auflöſung, wie hier in der Berechnung, nur anders hergeleitet findet. Schulzes Taſchenb. II. Heft S. 448. flg. und mehrere andere.

Schikard ſcheint dieſe in der praktiſchen Geometrie ſehr nüzliche Aufgabe zuerſt bey wirklichen Meſſungen angewandt zu haben, die er zu Berichtigung der Geographie von Wirtemberg anſtellte. S. Epiſt. Kepler. edit. Hanſch. p. 686.

6. Aufgabe.

Fig. 94.

Ein der Gattung nach gegebenes Dreyek EBC zu finden, deſſen Scheitelpunkt E gegeben iſt, und deſſen übrige Winkelpunkte 2 der Lage nach gegebene gerade Linien AB, GD berühren.

Analyſe.

Weil das Dreyek EBC der Gattung nach gegeben iſt; ſo iſt der Winkel BEC, und das Verhältniß von BE zu EC gegeben (3. Def. D.), da nun der Endpunkt C einer dieſer Linien eine der Lage nach gegebene gerade Linie GD berührt; ſo berührt auch der Endpunkt B der andern

andern eine der Lage nach gegebene gerade Linie (6, 1. A.). Nach der Vorausſezung aber berührt er auch die der Lage nach gegebene gerade Linie AB, mithin iſt er gegeben (28. D.), folglich iſt EB (29. D.), folglich die Lage von EC (33. D.), alſo auch der Punkt C (28. D.) gegeben.

Kompoſition.

Man verzeichne den Ort 6, 1. A. d. h. man fälle aus E auf eine von den der Lage nach gegebenen Linien, z. B. auf DG das Perpendikel ED, über ED beſchreibe man ein Dreyek EDF, das dem gegebenen Dreyek ähnlich ſeye, aus dem Punkt F errichte man auf EF das Perpendikel FB, dieſes ſchneide die andere der Lage nach gegebene Linie AB in dem Punkt B, man ziehe EB, und beſchreibe über dieſer Linie das Dreyek EBC, das dem gegebenen Dreyek ähnlich ſeye; ſo, daß das Dreyek EBC auf eben der Seite von EB liege, nach welcher Seite von EF hin das Dreyek EFD liegt; ſo iſt EBC das verlangte Dreyek, d. h. der Punkt C deſſelben berührt die der Lage nach gegebene Linie DG. Denn es iſt wegen Aehnlichkeit der Dreyeke EFD, EBC, ED : EC = EF : EB, und, weil die Winkel FED, BEC gleich ſind; ſo iſt, den gemeinſchaftlichen Winkel BED hinweg genommen, oder hinzu geſezt, auch der Winkel FEB gleich dem Winkel DEC, mithin ſind die Dreyeke EFB, EDC ähnlich (6, 6. E.); folglich iſt EDC ein rechter Winkel. Nach der Vorausſezung aber iſt auch der Winkel EDG ein rechter, folglich liegt der Punkt C auf der Linie DG. Läge der Punkt F auf der Linie AB; ſo wäre das Dreyek EFD ſelbſt das geſuchte.

Bestimmung.

Soll die Aufgabe möglich seyn, so muß das auf EF errichtete Perpendikel FB der Linie AB wirklich in einem Punkt begegnen, d. h. wenn DG, AB einander in A schneiden; so darf DG die Linie FB nicht so schneiden, daß die innern Winkel, welche DG mit BA, FB macht, zwey rechten gleich werden. Nun macht, wie bey der Berechnung von 6, 1. gezeigt worden, FB mit DG immer einen Winkel, der gleich ist dem Winkel BEC; folglich darf entweder der Winkel BEC, oder sein Nebenwinkel nicht gleich seyn dem Winkel BAG, je nachdem nemlich das Dreyek EFD auf dieser oder der andern Seite von ED beschrieben worden. Sind AB, DG gleichlauffend; so wird das Perpendikel FB, welches die Linie DG immer unter einem Winkel schneidet, der gleich ist BEC, immer auch AB (unter eben diesem Winkel) schneiden. Zugleich sieht man leicht, daß man zwey Auflösungen erhält, je nachdem man das Dreyek EFD auf der einen oder auf der andern Seite von ED beschreibt. Ferner ist hier voraus gesezt worden, man wisse, welcher von den Winkeln des Dreyeks am Scheitelpunkt E liegen solle. Wäre diß nicht bekannt; so könnte man jeden der 3 Winkel nach Belieben an den Scheitelpunkt sezen, und würde folglich für jeden dieser Winkel zwey, mithin im Ganzen 6 verschiedene Auflösungen bekommen. Endlich, was man auch für einen Winkel an den Scheitel sezt; so bleibt noch unbestimmt, welchem der beyden übrigen man den Winkel EDF gleich machen solle. Man könnte also wieder jeden der beyden übrigen nach Belieben darzu wählen; folglich sind in allem 12 verschiedene Auflösungen möglich.

Berechnung.

Die Linie FB begegne der Linie DG in L, und eine durch B mit DG gleichlauffend gezogene Linie, begegne dem Perpendikel ED in K. Sind nun 1) AB, DG gleichlauffend, und iſt a) (Fig. 94. e.) der gegebene Winkel BEC, folglich nach der Berechnung von 6, 1. A. auch der Winkel BLD ein rechter; ſo iſt LD = BK. Man findet aber LD (nach der Berechn. von 6, 1. A.) = ED ctg. EFD = ED ctg. EBC. Und, weil auch EK bekannt iſt; ſo hat man in dem rechtwinklichten Dreyek EBK leicht EB. Aus dieſer Seite, und den bekannten Winkeln findet man in dieſem und den folgenden Fällen leicht die übrigen Seiten des Dreyeks EBC, wie auch die Winkel, welche ſie mit den der Lage nach gegebenen Linien AB, DG machen, welches ich alſo künftig nicht weiter zu erinnern brauchen werde. Iſt nun b) der Winkel BEC, folglich auch der ihm gleiche BLD kein rechter; ſo begegnet folglich die Linie BL der Linie ED, und zwar, wenn (Fig. 94. g.) der Winkel EFD oder EBC ein rechter iſt; ſo begegnet BL der Linie ED in dem Punkt D, oder die Punkte D und L fallen zuſammen, ſ. die Berechn. von 6, 1. A. In dieſem Fall nun wird BK in dem rechtwinklichten Dreyek BKD, in welchem KD, und alle Winkel bekannt ſind (weil nemlich der BDK das Komplement von dem BLG oder BEC iſt), leicht gefunden, und dann hat man wieder in dem rechtwinklichten Dreyek EBK die beyden Seiten EK, BK, und findet folglich EB. Iſt der Winkel EBC kein rechter (Figg. 94. a. b.); ſo begegnet folglich BL der Linie ED in irgend einem andern Punkt H. (Man denke ſich nemlich in den Figg. 94. a. b. BL verlängert, bis BL, ED einander in H begegnen). Nun iſt nach der Berechn. von 6, 1. A. DL = ED ctg. EBC. Hieraus läßt ſich DH finden durch die Formel

Bestimmu

Soll die Aufgabe möglich
EF errichtete Perpendikel FB de
einem Punkt begegnen, d. h. wen
in A schneiden; so darf DG die Li
den, daß die innern Winkel, wel
macht, zwey rechten gleich werden
bey der Berechnung von 6, 1. ge
DG immer einen Winkel, der
BEC; folglich darf entweder der
Nebenwinkel nicht gleich seyn d
nachdem nemlich das Dreyek EF
andern Seite von ED beschrieben
DG gleichlauffend; so wird das
ches die Linie DG immer unter ei
der gleich ist BEC, immer auch
Winkel) schneiden. Zugleich sieht
zwey Auflösungen erhält, je nach
EFD auf der einen oder auf der
beschreibt. Ferner ist hier voraus
wisse, welcher von den Winkeln d
telpunkt E liegen solle. Wäre
könnte man jeden der 3 Winkel
Scheitelpunkt sezen, und würde

In dem Fall, wenn AB, GD gleichlauffen; ist BID ein rechter Winkel, folglich BI = ED ctg. EBC — ID ctg. BLD. Eben diese Formel hat, wie man leicht sieht, auch noch Statt, wenn entweder (Figg. 94. g. h.) BIDL sich in ein Dreyek verwandelt, weil nemlich 2 seiner Winkelpunkte zusammenfallen, oder, wenn BIDL nimmer in dem gewöhnlichen Sinn des Worts, wohl aber in einem etwas weitern Verstand ein Vierek ist, wenn nemlich entweder einige seiner Seiten die Stelle der Diagonalen vertreten, oder wenn einer der Winkel einwärts geht. Nur muß man in diesem Fall die Zeichen, wo es nöthig ist, gehörig verändern. Wenn z. B. (Fig. 94. c.) BI nicht auf eben der Seite von ID liegt, auf welcher DL ist; so ist offenbahr, daß der Winkel BID jezt eine derjenigen entgegengesezte Lage hat, welche er haben würde, wenn BIDL im eigentlichen Sinn des Worts ein Vierek wäre. Man muß also diesen Winkel als negativ ansehen. Bey einem negativen Winkel aber hat der Cosinus eben das Zeichen, wie bey einem gleichgrossen positiven, der Sinus hingegen das entgegen gesezte. Mithin wird in diesem Fall die Formel:

$$BI = \frac{ID - ED \text{ tang. BLD cotg. EBC}}{\text{cosin. BID} + \text{sin. BID tang. BLD}}.$$

Eben diese Formel findet man auch, wenn man für diesen Fall besonders die Rechnung vornimmt.

7. Aufgabe.

In einem Vierek ABCD ist die Linie AB der Lage und Grösse nach, ferner die Summe der anliegenden Winkel A und B, die Lage der gegenüber liegenden Seite CD, und das Verhältniß der beyden übrigen Seiten AC,

AC, BD, welche leztere nicht unter einander gleichlauffen dürfen, gegeben: das Vierek zu finden.

Analyse.

Man verlängere AC, BD, bis ſie einander in einem Punkt E begegnen, welches immer geſchehen wird, weil ſie nach der Vorausſezung nicht gleichlauffen. Weil nun die Summe der Winkel A, B gegeben iſt; ſo iſt der Nebenwinkel dieſer Summe, d. h. der Winkel AEB (32, 1. E.) gegeben. Und, weil aus 2 gegebenen Punkten A und B 2 gerade Linien AC, BD, welche einen gegebenen Winkel E einſchlieſſen, und ein gegebenes Verhältniß unter einander haben, gezogen ſind, und der Endpunkt C einer dieſer Linien eine der Lage nach gegebene gerade Linie CD berührt; ſo berührt auch der Endpunkt D der andern eine der Lage nach gegebene Linie (16, 1. A.) DQ. Eben dieſer Punkt D berührt aber nach der Vorausſezung auch die der Lage nach gegebene gerade Linie CD. Mithin iſt er (28. D.) gegeben; folglich iſt BD der Lage und Gröſſe nach (29. D.), mithin die Winkel DB, folglich auch der Winkel A (4. D.) und AC der Lage (32. D.) nach, folglich der Punkt C (28. D.) mithin AC, CD auch der Gröſſe nach (29. D.), und der Winkel C gegeben. Oder kürzer. Weil BD der Gröſſe nach gegeben iſt; ſo iſt auch AC der Gröſſe nach (2. D.), mithin auch der Lage nach (34. D.) gegeben, folglich iſt auch der Punkt C (28. D.), mithin das ganze Vierek ABCD gegeben.

Kompoſition.

Man verzeichne den Ort QD nach 16, 1. A. d. h. man fälle aus dem Punkt A auf CD das Perpendikel AN, ziehe dann AP ſo, daß der Winkel NAP gleich

In dem Fall, wenn AB, GD gleichlauffen; ist BID ein rechter Winkel, folglich BI = ED ctg. EBC — ID ctg. BLD. Eben diese Formel hat, wie man leicht sieht, auch noch Statt, wenn entweder (Figg. 94. g. h.) BIDL sich in ein Dreyek verwandelt, weil nemlich 2 seiner Winkelpunkte zusammenfallen, oder, wenn BIDL nimmer in dem gewöhnlichen Sinn des Worts, wohl aber in einem etwas weitern Verstand ein Vierek ist, wenn nemlich entweder einige seiner Seiten die Stelle der Diagonalen vertreten, oder wenn einer der Winkel einwärts geht. Nur muß man in diesem Fall die Zeichen, wo es nöthig ist, gehörig verändern. Wenn z. B. (Fig. 94. c.) BI nicht auf eben der Seite von ID liegt, auf welcher DL ist; so ist offenbahr, daß der Winkel BID jezt eine derjenigen entgegengesezte Lage hat, welche er haben würde, wenn BIDL im eigentlichen Sinn des Worts ein Vierek wäre. Man muß also diesen Winkel als negativ ansehen. Bey einem negativen Winkel aber hat der Cosinus eben das Zeichen, wie bey einem gleichgrossen positiven, der Sinus hingegen das entgegen gesezte. Mithin wird in diesem Fall die Formel:

$$BI = \frac{ID - ED \text{ tang. BLD cotg. EBC}}{\text{cosin. BID} + \text{sin. BID tang. BLD}}.$$

Eben diese Formel findet man auch, wenn man für diesen Fall besonders die Rechnung vornimmt.

7. Aufgabe.

In einem Vierek ABCD ist die Linie AB der Lage und Grösse nach, ferner die Summe der anliegenden Winkel A und B, die Lage der gegenüber liegenden Seite CD, und das Verhältniß der beyden übrigen Seiten AC,

AC, BD, welche leztere nicht unter einander gleichlauffen dürfen, gegeben: das Vierek zu finden.

Analyſe.

Man verlängere AC, BD, bis ſie einander in einem Punkt E begegnen, welches immer geſchehen wird, weil ſie nach der Vorausſezung nicht gleichlauffen. Weil nun die Summe der Winkel A; B gegeben iſt; ſo iſt der Nebenwinkel dieſer Summe, d. h. der Winkel AEB (32, 1. E.) gegeben. Und, weil aus 2 gegebenen Punkten A und B 2 gerade Linien AC, BD, welche einen gegebenen Winkel E einſchlieſſen, und ein gegebenes Verhältniß unter einander haben, gezogen ſind, und der Endpunkt C einer dieſer Linien eine der Lage nach gegebene gerade Linie CD berührt; ſo berührt auch der Endpunkt D der andern eine der Lage nach gegebene Linie (16, 1. A.) DQ. Eben dieſer Punkt D berührt aber nach der Vorausſezung auch die der Lage nach gegebene gerade Linie CD. Mithin iſt er (28. D.) gegeben; folglich iſt BD der Lage und Gröſſe nach (29. D.), mithin die Winkel DB, folglich auch der Winkel A (4. D.) und AC der Lage (32. D.) nach, folglich der Punkt C (28. D.) mithin AC, CD auch der Gröſſe nach (29. D.), und der Winkel C gegeben. Oder kürzer. Weil BD der Gröſſe nach gegeben iſt; ſo iſt auch AC der Gröſſe nach (2. D.), mithin auch der Lage nach (34. D.) gegeben, folglich iſt auch der Punkt C (28. D.), mithin das ganze Vierek ABCD gegeben.

Kompoſition.

Man verzeichne den Ort QD nach 16, 1. A. d. h. man fälle aus dem Punkt A auf CD das Perpendikel AN, ziehe dann AP ſo, daß der Winkel NAP gleich

werde

werde dem Nebenwinkel der Summe der Winkel CAB, DBA, und daß AN zu AP das gegebene Verhältniß habe, welches AC zu BD haben soll, und zwar muß AP auf eben der Seite von AN liegen, auf welcher Seite von AB die Linie AE liegen, d. h. das Vierek verzeichnet werden soll. Durch B ziehe man BQ gleich und gleichlauffend mit AP, und errichte auf BQ das Perpendikel QD; so wird dieses die der Lage nach gegebene Linie CD in einem Punkt D schneiden. Denn nach der Berechnung von 16, 1. A. schneiden diese Linien einander immer unter einem Winkel, der gleich ist dem gegebenen Winkel PAN, und begegnen folglich einander gewiß. Man ziehe BD, und mit dieser gleich und gleichlauffend AO, und mache den Winkel OAR gleich dem gegebenen PAN; so ist folglich die Summe der Winkel RAB, OAK, d. h. der Winkel RAB, DBA gleich dem Nebenwinkel von OAR, d. h. dem Nebenwinkel von PAN, also gleich der gegebenen Summe, und AR begegnet der Linie CD in einem Punkt C, und das Vierek ABCD ist das verlangte, d. h. AC hat zu BD das gegebene Verhältniß von AN zu AP. Denn AR möchte der Linie CD begegnen oder nicht; so kann man doch immer auf AR einen Punkt C nehmen, so, daß AC zu BD das gegebene Verhältniß hat. Es seye diß geschehen, und man ziehe NC. Weil nun die Winkel PAN, OAC gleich sind; so ist, den gemeinschaftlichen Winkel OAN hinweg genommen, oder hinzu gesezt, auch der Winkel PAO gleich NAC. Und weil AC: $\begin{cases} BD \\ AO \end{cases}$ = AN: AP, oder AC: AN = AO: AP; so sind, PO noch gezogen, die Dreyeke APO, ANC ähnlich; folglich ist der Winkel ANC gleich APO, d. i. gleich BQD folglich ein rechter, oder NC ist senkrecht auf AN. Es ist aber auch CD (nach der Verzeichn.) eine durch den Punkt N gehende auf AN senkrechte Linie, mithin liegt der

Punkt

Punkt C auf der der Lage nach gegebenen Linie CD, oder AR, CD ſchneiden einander in C, und es iſt AC zu BD in dem gegebenen Verhältniß.

Berechnung.

Man fälle aus B auf die der Lage nach gegebene Linie CD das Perpendikel BF; ſo kann man nach der Berechn. von 16, 1. A. DF finden. Iſt nun CD mit AB gleichlauffend; ſo findet man in dem rechtwinklichten Dreyek DFB aus den bekannten Seiten DF, FB, leicht BD, und die übrigen Winkel. Alſo ſind die Nebenwinkel ABD, ADC bekannt. Iſt aber CD nicht gleichlauffend mit AB; ſo begegnen ſie einander in einem gegebenen Punkt I, und, weil FI, DF bekannt ſind; ſo iſt auch DI bekannt, und da man in dem Dreyek DIB überdiß noch BI und den Winkel bey I kennt; ſo findet man leicht die Seite DB nebſt den anliegenden Winkeln; folglich ſind wieder die Winkel DBA, CDB bekannt. In beyden Fällen nun iſt, weil der Winkel DBA bekannt, und die Summe der Winkel DBA, DAB gegeben iſt, auch DAB, mithin auch ACD bekannt, und, weil BD und das Verhältniß von DB zu AC bekannt iſt; ſo kennt man auch AC, und DC kann man nun leicht auf mehrere Art aus den übrigen bekannten Stüken herleiten.

8. Aufgabe.

Fig. 96.

Ein der Gattung nach gegebenes Dreyek EBD zu finden, deſſen 3 Winkelpunkte 3 der Lage nach gegebene gerade Linien AB, CD, EC berühren, welche nicht alle unter einander gleichlauffen, auch nicht alle einen gemein-

meinschaftlichen Durchschnittspunkt haben, so, daß eine Seite des Dreyeks ED, welche den einander schneidenden Linien CD, EC begegnet, mit einer derselben (folglich auch mit der andern) einen gegebenen Winkel mache.

Analyse.

Weil die Winkel CED, DEB gegeben sind; so ist folglich auch der Winkel CEB gegeben. Und, weil die Winkel CDB, EDB gegeben sind; so ist auch der Winkel CDB gegeben. Ueberdiß ist das Verhältniß von EB zu DB gegeben. Und, weil die geraden Linien CE, CD der Lage nach gegeben sind; so berührt der Punkt B eine der Lage nach gegebene gerade Linie (23, 1. A.). Er berührt aber auch die der Lage nach gegebene gerade Linie AB. Mithin ist er gegeben (28. D.), mithin sind EB, BD der Lage nach (33. D.), folglich die Punkte E und D (28. D.), mithin EB, BD, ED der Lage und Grösse nach (29. D.) gegeben.

Komposition und Bestimmung.

Wenn man der Komposition von 23, 1. A. Schritt vor Schritt folgen wollte; so müßte man erstens die Fälle unterscheiden, in welchen BE, BD mit den Linien CD, CE gleichlauffen oder nicht (denn der Fall, daß BE, BD auf einer geraden Linie liegen, kann der Voraussezung nach hier nicht vorkommen). In dem Fall, wenn BE, BD nicht mit CD, CE gleichlauffen, müßte man alsdann auf einer der Linie CE, CD z. B. auf CE irgend einen Punkt l nehmen, und aus demselben an die andere Linie CD die Linien lm, ln so ziehen, daß lm mit der zu ziehenden Linie BE, ln mit der zu ziehenden BD gleichlauffend würde, alsdann müßte man ol so neh-

nehmen, daß ol zu ln das gegebene Verhältniß von EB zu BD hätte, und endlich auf lm oder ihrer Verlängerung, je nachdem nemlich E, D auf den Seiten des Winkels ECD oder seines Nebenwinkels liegen ſolle, den Punkt p ſo beſtimmen, daß lp zu pm das Verhältniß von ol zu lm habe, d. h. man müßte on, und mit dieſer gleichlauffend lq, und endlich mit ln gleichlauffend qp ziehen, denn ſo würde wegen der Parallelen ln, pq, und on, lq, pm: ml = pq: ln = lp: ol, oder verwechſelt pm: lp = ml: ol ſeyn. Durch den Punkt p müßte man alsdann die gerade Linie Cp ziehen; ſo würden nach dem Beweis von 23, I. A. jede 2 aus irgend einem Punkt der Linie Cp an CE, CD hin mit lp, pq gleichlauffend gezogene Linien das gegebene Verhältniß unter einander haben. Man ſieht aber leicht, daß man nur deswegen nöthig hat, die Linien lm, ol, ln zu ziehen, um durch die beſtimmten Punkte o, n die gerade Linie on, und gleichlauffend mit dieſer durch den Punkt l die Linie lq ziehen zu können, aus deren Endpunkten l und q die mit EB, DB gleichlauffende Linien lp, pq gezogen ſind, welche hernach den Punkt p beſtimmen. Weil aber ol zu ln eben das Verhältniß hat, wie EB zu BD und überdiß ol, ln mit EB, DB gleichlauffen; ſo iſt on, folglich auch lq mit ED gleichlauffend. Da nun bey gegenwärtiger Aufgabe der Winkel, den ED, folglich auch die ihr gleichlauffende Linie lq mit Ec macht, gegeben iſt; ſo braucht man hier, die Linien ol, ln, on nicht zu ziehen, und die Kompoſition wird für alle Fälle kurz dieſe. Aus irgend einem Punkt l der Linie CE ziehe man lq ſo, daß der Winkel Clq gleich ſeye dem gegebenen Winkel, den ED mit EC machen ſoll. Dieſer gegebene Winkel darf nun nicht gleich ſeyn dem Nebenwinkel von ECD, weil ED nach der Vorausſezung der Linie CD begegnen ſoll; folglich begegnet auch lq der Linie CD, es geſchehe diß in q, und

meinschaftlichen Durchschnittspunkt haben, so, daß eine Seite des Dreyeks ED, welche den einander schneidenden Linien CD, EC begegnet, mit einer derselben (folglich auch mit der andern) einen gegebenen Winkel mache.

Analyse.

Weil die Winkel CED, DEB gegeben sind; so ist folglich auch der Winkel CEB gegeben. Und, weil die Winkel CDB, EDB gegeben sind; so ist auch der Winkel CDB gegeben. Ueberdiß ist das Verhältniß von EB zu DB gegeben. Und, weil die geraden Linien CE, CD der Lage nach gegeben sind; so berührt der Punkt B eine der Lage nach gegebene gerade Linie (23, 1. A.). Er berührt aber auch die der Lage nach gegebene gerade Linie AB. Mithin ist er gegeben (28. D.), mithin sind EB, BD der Lage nach (33. D.), folglich die Punkte E und D (28. D.), mithin EB, BD, ED der Lage und Grösse nach (29. D.) gegeben.

Komposition und Bestimmung.

Wenn man der Komposition von 23, 1. A. Schritt vor Schritt folgen wollte; so müßte man erstens die Fälle unterscheiden, in welchen BE, BD mit den Linien CD, CE gleichlauffen oder nicht (denn der Fall, daß BE, BD auf einer geraden Linie liegen, kann der Voraussezung nach hier nicht vorkommen). In dem Fall, wenn BE, BD nicht mit CD, CE gleichlauffen, müßte man alsdann auf einer der Linie CE, CD z. B. auf CE irgend einen Punkt l nehmen, und aus demselben an die andere Linie CD die Linien lm, ln so ziehen, daß lm mit der zu ziehenden Linie BE, ln mit der zu ziehenden BD gleichlauffend würde, alsdann müßte man ol so neh-

nehmen, daß ol zu ln das gegebene Verhältniß von EB zu BD hätte, und endlich auf lm oder ihrer Verlängerung, je nachdem nemlich E, D auf den Seiten des Winkels ECD oder seines Nebenwinkels liegen solle, den Punkt p so bestimmen, daß lp zu pm das Verhältniß von ol zu lm habe, d. h. man müßte on, und mit dieser gleichlauffend lq, und endlich mit ln gleichlauffend qp ziehen, denn so würde wegen der Parallelen ln, pq, und on, lq, pm: ml = pq: ln = lp: ol, oder verwechselt pm: lp = ml: ol seyn. Durch den Punkt p müßte man alsdann die gerade Linie Cp ziehen; so würden nach dem Beweis von 23, I. A. jede 2 aus irgend einem Punkt der Linie Cp an CE, CD hin mit lp, pq gleichlauffend gezogene Linien das gegebene Verhältniß unter einander haben. Man sieht aber leicht, daß man nur deswegen nöthig hat, die Linien lm, ol, ln zu ziehen, um durch die bestimmten Punkte o, n die gerade Linie on, und gleichlauffend mit dieser durch den Punkt l die Linie lq ziehen zu können, aus deren Endpunkten l und q die mit EB, DB gleichlauffende Linien lp, pq gezogen sind, welche hernach den Punkt p bestimmen. Weil aber ol zu ln eben das Verhältniß hat, wie EB zu BD und überdiß ol, ln mit EB, DB gleichlauffen; so ist on, folglich auch lq mit ED gleichlauffend. Da nun bey gegenwärtiger Aufgabe der Winkel, den ED, folglich auch die ihr gleichlauffende Linie lq mit Ec macht, gegeben ist; so braucht man hier, die Linien ol, ln, on nicht zu ziehen, und die Komposition wird für alle Fälle kurz diese. Aus irgend einem Punkt l der Linie CE ziehe man lq so, daß der Winkel Clq gleich seye dem gegebenen Winkel, den ED mit EC machen soll. Dieser gegebene Winkel darf nun nicht gleich seyn dem Nebenwinkel von ECD, weil ED nach der Voraussezung der Linie CD begegnen soll; folglich begegnet auch lq der Linie CD, es geschehe diß in q, und

man beſchreibe über lq ein Dreyek lpq, das dem der Gattung nach gegebenen ähnlich ſeye. Durch die Punkte C, p ziehe man die gerade Linie Cp, die der Linie AB in B begegne. Endlich ziehe man BE, ED, BD mit pl, lq, pq gleichlauffend; ſo iſt BED das verlangte Dreyek. Der Beweis erhellet von ſelbſt. Weil aber erfodert wird, daß die gerade Linie Cp der Linie AB in einem Punkt B begegne; ſo darf folglich AB nicht mit Cp gleichlauffen. Diß wird nun in dem Fall nie geſchehen, wenn AB mit einer der Linien EC, CD gleichlauft. Iſt aber AB mit keiner dieſer Linien gleichlauffend; ſo begegne AB der Linie CD in A, und man ziehe Ar mit Cp, und As mit CD gleichlauffend, und verlängere die Linie lp, bis ſie dieſen Linien in r und s begegne; ſo ſind folglich die Dreyeke lAr und lCp, ingleichen die Dreyeke rAs und pCm ähnlich, und es iſt lp : lr = Cp : Ar = pm : rs, oder verwechſelt lp : pm = lr : rs. Weil nun AB nicht gleichlauffend mit Cp ſeyn darf; ſo darf, wenn lp der Linie AB in t begegnet, nicht lt gleich lr ſeyn, oder der Punkt t nicht auf den Punkt r fallen, d. h. es darf das Verhältniß von lt zu ts nicht gleich ſeyn dem von lp zu pm, d. i. dem von ol zu lm. Und, wenn diß nicht iſt; ſo iſt die Aufgabe immer möglich. Begegnete aber lp der Linie AB nicht, d. h. wären dieſe beyden Linien gleichlauffend; ſo begegnet ohnehin Cp der Linie AB, weil ſie der ihr gleichlauffenden lp begegnet.

Berechnung.

Durch die Formel bey 23, I. A. hat man den Winkel ECB, wird nun (Figg. 96. a. b.) EC von AB in A geſchnitten; ſo hat man auch noch die Seite AC nebſt dem Winkel bey A, hieraus findet man AB, und nun iſt in dem Dreyek AEB die Seite AB nebſt allen

Winkeln

Winkeln bekannt, und man findet leicht EB, und hieraus das übrige. Sind (Fig. 96. c.) EC, AB gleichlauffend; so ist nach der Voraussezung CD, AB nicht gleichlauffend, schneiden nun diese beyden Linien einander in A; so hat man den Winkel DCB aus der Berechnung von 23, I. A. und man findet AB, und dann DB auf ähnliche Art, wie vorhin AB, EB.

Einen besondern Fall dieser Aufgabe sehe man in Schwabs Samml. 15te Aufg.

9. Aufgabe.

Fig. 97.

Einen Punkt D zu finden, so, daß, wenn man aus demselben an 3 der Lage nach gegebene gerade Linien AE, BF, CF, die nicht alle unter einander gleichlauffen, auch nicht alle Einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt haben, 3 gerade Linien DA, DB, DC unter gegebenen Winkeln zieht, die Linien DA, DB, DC ein gegebenes Verhältniß unter einander haben.

Analyse.

Da nicht alle 3 der Lage nach gegebene Linien einander gleichlauffen; so schneidet wenigstens eine die beyden andern, und zwar, wie ebenfalls voraus gesezt wird, in 2 verschiedenen Punkten. Es schneide BF die beyden andern AE, CF in den Punkten E und F. Weil nun aus dem Punkt D an die beyden der Lage nach gegebenen Linien AE, BF 2 gerade Linien DA, DB, die ein gegebenes Verhältniß unter einander haben, unter gegebenen Winkeln gezogen sind; so berührt der Punkt D eine der Lage nach gegebene durch E gehende gerade Linie ED (23, I. A.). Eben so, weil die Linien DB,

meinschaftlichen Durchschnittspunkt haben, so, daß eine Seite des Dreyeks ED, welche den einander schneidenden Linien CD, EC begegnet, mit einer derselben (folglich auch mit der andern) einen gegebenen Winkel mache.

Analyse.

Weil die Winkel CED, DEB gegeben sind; so ist folglich auch der Winkel CEB gegeben. Und, weil die Winkel CDB, EDB gegeben sind; so ist auch der Winkel CDB gegeben. Ueberdiß ist das Verhältniß von EB zu DB gegeben. Und, weil die geraden Linien CE, CD der Lage nach gegeben sind; so berührt der Punkt B eine der Lage nach gegebene gerade Linie (23, 1. A.). Er berührt aber auch die der Lage nach gegebene gerade Linie AB. Mithin ist er gegeben (28. D.), mithin sind EB, BD der Lage nach (33. D.), folglich die Punkte E und D (28. D.), mithin EB, BD, ED der Lage und Grösse nach (29. D.) gegeben.

Komposition und Bestimmung.

Wenn man der Komposition von 23, 1. A. Schritt vor Schritt folgen wollte; so müßte man erstens die Fälle unterscheiden, in welchen BE, BD mit den Linien CD, CE gleichlauffen oder nicht (denn der Fall, daß BE, BD auf einer geraden Linie liegen, kann der Voraussezung nach hier nicht vorkommen). In dem Fall, wenn BE, BD nicht mit CD, CE gleichlauffen, müßte man alsdann auf einer der Linie CE, CD z. B. auf CE irgend einen Punkt l nehmen, und aus demselben an die andere Linie CD die Linien lm, ln so ziehen, daß lm mit der zu ziehenden Linie BE, ln mit der zu ziehenden BD gleichlauffend würde, alsdann müßte man ol so neh-

nehmen, daß ol zu ln das gegebene Verhältniß von EB zu BD hätte, und endlich auf lm oder ihrer Verlängerung, je nachdem nemlich E, D auf den Seiten des Winkels ECD oder seines Nebenwinkels liegen solle, den Punkt p so bestimmen, daß lp zu pm das Verhältniß von ol zu lm habe, d. h. man müßte on, und mit dieser gleichlauffend lq, und endlich mit ln gleichlauffend qp ziehen, denn so würde wegen der Parallelen ln, pq, und on, lq, pm: ml = pq: ln = lp: ol, oder verwechselt pm: lp = ml: ol seyn. Durch den Punkt p müßte man alsdann die gerade Linie Cp ziehen; so würden nach dem Beweis von 23, I. A. jede 2 aus irgend einem Punkt der Linie Cp an CE, CD hin mit lp, pq gleichlauffend gezogene Linien das gegebene Verhältniß unter einander haben. Man sieht aber leicht, daß man nur deswegen nöthig hat, die Linien lm, ol, ln zu ziehen, um durch die bestimmten Punkte o, n die gerade Linie on, und gleichlauffend mit dieser durch den Punkt l die Linie lq ziehen zu können, aus deren Endpunkten l und q die mit EB, DB gleichlauffende Linien lp, pq gezogen sind, welche hernach den Punkt p bestimmen. Weil aber ol zu ln eben das Verhältniß hat, wie EB zu BD und überdiß ol, ln mit EB, DB gleichlauffen; so ist on, folglich auch lq mit ED gleichlauffend. Da nun bey gegenwärtiger Aufgabe der Winkel, den ED, folglich auch die ihr gleichlauffende Linie lq mit Ec macht, gegeben ist; so braucht man hier, die Linien ol, ln, on nicht zu ziehen, und die Komposition wird für alle Fälle kurz diese. Aus irgend einem Punkt l der Linie CE ziehe man lq so, daß der Winkel Clq gleich seye dem gegebenen Winkel, den ED mit EC machen soll. Dieser gegebene Winkel darf nun nicht gleich seyn dem Nebenwinkel von ECD, weil ED nach der Voraussezung der Linie CD begegnen soll; folglich begegnet auch lq der Linie CD, es geschehe diß in q, und

man beſchreibe über lq ein Dreyek lpq, das dem der Gattung nach gegebenen ähnlich ſeye. Durch die Punkte C, p ziehe man die gerade Linie Cp, die der Linie AB in B begegne. Endlich ziehe man BE, ED, BD mit pl, lq, pq gleichlauffend; ſo iſt BED das verlangte Dreyek. Der Beweis erhellet von ſelbſt. Weil aber erfodert wird, daß die gerade Linie Cp der Linie AB in einem Punkt B begegne; ſo darf folglich AB nicht mit Cp gleichlauffen. Diß wird nun in dem Fall nie geſchehen, wenn AB mit einer der Linien EC, CD gleichlauft. Iſt aber AB mit keiner dieſer Linien gleichlauffend; ſo begegne AB der Linie CD in A, und man ziehe Ar mit Cp, und As mit CD gleichlauffend, und verlängere die Linie lp, bis ſie dieſen Linien in r und s begegne; ſo ſind folglich die Dreyeke lAr und lCp, ingleichen die Dreyeke rAs und pCm ähnlich, und es iſt lp : lr = Cp : Ar = pm : rs, oder verwechſelt lp : pm = lr : rs. Weil nun AB nicht gleichlauffend mit Cp ſeyn darf; ſo darf, wenn lp der Linie AB in t begegnet, nicht lt gleich lr ſeyn, oder der Punkt t nicht auf den Punkt r fallen, d. h. es darf das Verhältniß von lt zu ts nicht gleich ſeyn dem von lp zu pm, d. i. dem von ol zu lm. Und, wenn diß nicht iſt; ſo iſt die Aufgabe immer möglich. Begegnete aber lp der Linie AB nicht, d. h. wären dieſe beyden Linien gleichlauffend; ſo begegnet ohnehin Cp der Linie AB, weil ſie der ihr gleichlauffenden lp begegnet.

Berechnung.

Durch die Formel bey 23, I. A. hat man den Winkel ECB, wird nun (Figg. 96. a. b.) EC von AB in A geſchnitten; ſo hat man auch noch die Seite AC nebſt dem Winkel bey A, hieraus findet man AB, und nun iſt in dem Dreyek AEB die Seite AB nebſt allen

Winkeln

Winkeln bekannt, und man findet leicht EB, und hieraus das übrige. Sind (Fig. 96. c.) EC, AB gleichlauffend; so ist nach der Voraussezung CD, AB nicht gleichlauffend, schneiden nun diese beyden Linien einander in A; so hat man den Winkel DCB aus der Berechnung von 23, I. A. und man findet AB, und dann DB auf ähnliche Art, wie vorhin AB, EB.

Einen besondern Fall dieser Aufgabe sehe man in Schwabs Samml. 15te Aufg.

9. Aufgabe.

Fig. 97.

Einen Punkt D zu finden, so, daß, wenn man aus demselben an 3 der Lage nach gegebene gerade Linien AE, BF, CF, die nicht alle unter einander gleichlaufen, auch nicht alle Einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt haben, 3 gerade Linien DA, DB, DC unter gegebenen Winkeln zieht, die Linien DA, DB, DC ein gegebenes Verhältniß unter einander haben.

Analyse.

Da nicht alle 3 der Lage nach gegebene Linien einander gleichlaufen; so schneidet wenigstens eine die beyden andern, und zwar, wie ebenfalls voraus gesezt wird, in 2 verschiedenen Punkten. Es schneide BF die beyden andern AE, CF in den Punkten E und F. Weil nun aus dem Punkt D an die beyden der Lage nach gegebenen Linien AE, BF 2 gerade Linien DA, DB, die ein gegebenes Verhältniß unter einander haben, unter gegebenen Winkeln gezogen sind; so berührt der Punkt D eine der Lage nach gegebene durch E gehende gerade Linie ED (23, I. A.). Eben so, weil die Linien DB,

DC, die ein gegebenes Verhältniß unter einander haben, an die der Lage nach gegebenen Linien BF, CF unter gegebenen Winkeln gezogen sind; so berührt der Punkt D noch eine andere durch den Punkt F gehende gerade Linie (23, I. A.). Mithin ist er gegeben (28. D.).

Komposition.

AE, FC sind entweder gleichlauffend, oder nicht. Im ersten Fall verzeichne man auf welcher Seite von EF man will, im andern auf derjenigen Seite von EF, auf welcher die Linien AE, CF zusammenstossen, innerhalb der beyden innern Winkel, die Oerter EP, Fp so (23, I. A.), daß 2 Linien, die man aus irgend einem Punkt des Orts EP an AE, BF unter den gegebenen Winkeln zieht, das gegebene Verhältniß von AD, BD, und 2 Linien, die man aus irgend einem Punkt des Orts Fp an CF, BF unter den gegebenen Winkeln zieht, das gegebene Verhältniß von CD, BD haben. In beyden Fällen werden die Oerter EP, Fp einander schneiden: es geschehe diß in D; so wird D der gesuchte Punkt seyn, d. h. wenn man aus demselben DA, DB, DC unter den gegebenen Winkeln zieht; so werden diese Linien das gegebene Verhältniß unter einander haben. Denn, da die beyden Winkel, innerhalb welcher die Oerter EP, Fp liegen, zusammen genommen entweder gleich, oder kleiner sind, als zwey rechte; so sind die Winkel PEF, pFE, die innerhalb der vorigen liegen, immer kleiner, als zwey rechte. Mithin schneiden die Linien PE, pF einander in einem Punkt D. Und nach 23, I. A. hat DA zu DB, und DB zu DC die gegebenen Verhältnisse. Die Komposition entwikelter herzusezen, hielt ich für unnöthig, weil ich sonst nur die Komposition von 23, I. A. 2 mahl hätte abschreiben müssen. Unter Voraussezung ähnlicher Bestimmungen,

gen, wie bey der vorhergehenden Aufgabe; könnte man die Oerter EP, Fp oder einen derselben auch innerhalb der Nebenwinkel von AEB, CFB ziehen. Man vergleiche übrigens mit dieser Verzeichnung diejenige, welche Newton aus seiner algebraischen Rechnung herleitet (26. Probl. Arithm. Vniu. p. 121. sq. Edit. Graves.), und ich denke, die geometrische Auflösung solle bey dieser Vergleichung nichts verliehren, ungeachtet Newton blos den besondern Fall betrachtet, wenn die gegebenen Winkel DAE, DBE, DCF rechte sind.

Berechnung.

Die Berechnung von 23, I. A. giebt die Winkel DEB, DFB, und EF ist gegeben; folglich findet man leicht ED, FD. Vergl. Newt. a. a. O., Castillon in seiner Ausgabe von Newt. Arithm. Vniu. und Tempelhof. Anal. endl. Gr. S. 220 flg.

10. Aufgabe.

Fig. 98.

Es ist CIE der Neigungswinkel einer Ebene CNS mit einer andern EST, die Lage der Durchschnittslinie NS dieser beyden Ebenen, in der Ebene EST eine Linie ST, welche die Linie NS in S schneidet, der Lage und Grösse nach gegeben, und in T hat man den Winkel CTE gemessen, unter welchem ein aus einem Punkt C der Ebene CNS auf die Ebene EST gefälltes Perpendikel CE erscheint, und auch noch den Winkel ETS, die Lage des Punkts E zu bestimmen.

Analyse.

Weil in dem Dreyek CEI die 2 Winkel bey E und I, folglich auch der dritte gegeben sind; so ist diß Dreyek der Gattung nach gegeben (43. D.), also das Verhältniß von IE zu CE gegeben (3. Def. D.). Eben so ist, weil in dem Dreyek CET die Winkel bey E, T gegeben sind, das Verhältniß von ET zu CE gegeben. Mithin ist auch das Verhältniß von ET zu EI gegeben (9. D.). Da nun auch die Lage der Linien NS, ST, und die Winkel ETS, EIS [dieser leztere nemlich ist (6. Def. 11. E.) ein rechter] gegeben sind; so berührt der Punkt E eine der Lage nach gegebene durch den (28. D.) gegebenen Punkt S gehende gerade Linie (23, I. A.). Eben dieser Punkt E liegt aber auch auf der (32. D.) der Lage nach gegebenen geraden Linie ET, mithin ist er gegeben (28. D.).

Komposition.

Man ziehe irgend eine gerade Linie te, errichte aus e das Perpendikel ec, und ziehe tc unter dem Winkel etc gleich dem gegebenen ETC, man mache ferner den Winkel eci gleich der Ergänzung des gegebenen Winkels EIC zu einem rechten, und ziehe ci, die der Linie te in i begegne. Nun verzeichne man (23, I. A.) den Ort SP so, daß, wenn man aus irgend einem Punkt desselben an NS, ST 2 Linien unter den gegebenen Winkeln zieht, diese Linien zu einander das Verhältniß von ei, et haben. Endlich ziehe man aus T die Linie ET unter dem gegebenen Winkel ETS; so wird diese dem Ort SP in einem Punkt E begegnen, und dieser wird der verlangte Punkt seyn, d. h. wenn man aus demselben auf der Ebene ETS ein Perpendikel EC errichtet, das der Ebene CNS in C begegnet; so wird

der

der Winkel CTE dem gegebenen Winkel cte gleich seyn. Denn nach 23, 1. A. ist ET : EI = et : ei. Und, weil die Dreyeke CEI, cei ähnlich sind; so ist EI : EC = ei : ec, folglich gleichförmig ET : EC = et : ec. Und weil in den Dreyeken CET, cet auch die Winkel bey e gleich sind; so sind sie einander ähnlich (6, 6. E.). Mithin ist CTE = cte. Daß aber die Linien SP, TE einander gewiß begegnen werden, erhellet von selbst. Denn nach 11, 11. E. ist es gewiß möglich aus C auf die Ebene EST ein Perpendikel CE zu fällen: dieser gewiß immer mögliche Punkt E aber liegt nach der Analyse immer auf dem Durchschnitt von SP, TE, folglich muß dieser Durchschnitt gewiß immer möglich seyn, oder: die Linien SP, TE werden gehörig verlängert einander gewiß schneiden.

Stünden beyde Ebenen senkrecht auf einander; so fielen die Punkte E, I zusammen, und der Punkt I würde geradezu durch die in dem Dreyek ITS alsdann bekannte Seite ST nebst ihren anliegenden Winkeln bestimmt.

Berechnung.

Man findet den Winkel EST durch die Berechn. bey 23, I. A. und nun kennt man in dem Dreyek EST die Seite ST nebst den beyden anliegenden Winkeln, und findet also leicht ET, ES.

Diese Aufgabe kommt vor, um aus dem geocentrischen Ort eines Kometen, seinen heliocentrischen zu finden, wenn die Länge des Knoten, und die Neigung der Bahn als bekannt angenommen werden. Alsdann bedeutet nemlich C den Kometen, S die Sonne, nach NS hin liegt der Knoten, ETS ist die Elongation des Kometen von der Sonne, CTE seine geocentrische

Breite, TSN der heliocentrische Abstand der Erde vom Knoten. S. davon Nordmark im Berlin. astronom. Jahrb. für 1789. S. 210 flg. Man wird alle dort ohne Beweis hergesezte Formeln leicht aus der Berechn. von 23, I. A. herleiten können.

11. Aufgabe.

Fig. 99.

Ueber der der Lage nach gegebenen geraden Linie BC an einen auf ihr gegebenen Punkt B ein der Gattung nach gegebenes Dreyek ABC anzulegen, bey welchem die Summe, oder der Unterschied, oder das Rechtek der beyden übrigen Seiten AB, AC gegeben ist.

Diese leichte Aufgabe, deren Auflösung in dem Fall, wenn Summe oder Unterschied der Linien AB, AC gegeben ist auf dem 2ten Zus. von 24, I. Ap. in dem 1sten Anh. des Ueb. in dem andern Fall auf dem ebendaselbst vorkommenden Zus. zu 32, I. A. beruht, bedarf keine weitere Ausführung.

12. Aufgabe.

Fig. 100.

In dem Vierek ABDC ist BD der Lage und Grösse nach, CD der Lage nach, ferner noch die Winkel bey B und C und die Summe der Seiten AB, AC gegeben, das Vierek zu finden.

Analyse.

Weil aus einem Punkt A an zwey der Lage nach gegebene gerade Linien BD, CD 2 gerade Linien AB, AC, deren Summe gegeben ist, unter gegebenen Winkeln

keln gezogen ſind; ſo berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie (2. Zuſ. zu 29, I. A. am Ende). Und, weil die Linie AB aus einem gegebenen Punkt B der der Lage nach gegebenen Linie BD unter einem gegebenen Winkel gezogen iſt; ſo iſt auch AB der Lage nach gegeben (32. D.) oder: der Punkt A berührt auch die der Lage nach gegebene gerade Linie AB, mithin iſt er gegeben, (28. D.) folglich iſt AB der Gröſſe nach (29. D.), AC der Lage nach (33. D.), mithin der Punkt C (28. D.), folglich AC, CD auch der Gröſſe nach (29. D.) gegeben.

Kompoſition.

Man wende, da die Summe von 2 Linien gegeben iſt, den 2ten Zuſ. von 29, I. Ap. auf den 25ſten Saz des Iſten Buchs an, und verzeichne den Ort für denſelben, d. h. man ziehe aus irgend einem Punkt t der geraden Linie BD eine Linie tl unter dem gegebenen Winkel, den AB mit BD machen ſoll, und nehme tl gleich der gegebenen Summe von AB, AC; durch l ziehe man eine Linie lF mit BD gleichlauffend, die der verlängerten Linie CD in F begegne, ferner begegne die Linie tl, wenn es nöthig iſt verlängert, eben dieſer verlängerten Linie CD in m (den leichten Fall, wenn tl mit CD gleichlauft, werde ich hier Kürze halber nicht beſonders betrachten, da er bey 23, I. A. ausführlich genug vorkommt), und man ziehe aus l an CD die Linie ln unter dem gegebenen Winkel, den AC mit CD machen ſoll, nehme dann ol = ln, und ziehe on, und mit on gleichlauffend die Linie lq, die der Linie CD in q begegne, durch q ziehe man qp mit ln gleichlauffend, und qp begegne der Linie tl in p, man ziehe Fp, und durch B gleichlauffend mit tl die Linie BA, die der Linie Fp in A begegne, endlich AC gleichlauffend mit pq, und AC be-

gegne der Linie CD in C; so ist das auf diese Art beschriebene Vierek ABCD, d. h. die Summe der Linien AB, AC ist gleich der gegebenen Linie tl. Der Beweis erhellet von selbst aus 25, I. A.

Berechnung.

Fp begegne der Linie BD in s; so hat man durch die Berechnung von 25, I. A. in dem Δ DFS, DF, und den Winkel DFs, der Winkel BDC aber ist vorhin bekannt, folglich findet man leicht Ds, mithin, weil DB bekannt ist, auch Bs, und da man auch die beyden anliegenden Winkel sBA, BsA kennt; so hat man in dem Dreyek BsA leicht AB, und hieraus das übrige.

Statt der Seite BD könnte auch die Diagonale AD, oder auch der Winkel, den diese Diagonale mit einer der 4 Seiten des Viereks machte, und statt der Summe der Seiten AB, AC auch ihr Unterschied gegeben seyn, und die Aufgabe würde immer noch auf ähnliche Art aufgelößt.

13. Aufgabe.

Fig. 101.

Es sind 4 Linien AB, BC, CD, DA gegeben aus denselben ein Vierek zu verzeichnen, um das sich ein Kreis beschreiben lasse.

Analyse.

Es seye ABCD das verlangte Vierek. Die Lage einer seiner Seiten kann man nun immer nach Belieben annehmen, folglich als gegeben betrachten. Es seye also z. B. CD der Lage und Grösse nach gegeben; man

ziehe

ziehe AC und dann AE so, daß der Winkel DAE gleich werde dem Winkel BAC; weil nun (22, 3. E.) der Winkel ABC gleich ist dem Winkel ADE; so sind die Dreyeke ABC, ADE ähnlich (4, 6. E.). Also ist AB: BC = AD: DE. Nun sind AB, BC, AD gegeben, folglich (2. D.) auch DE; also ist der Punkt E gegeben (30. D.). Ueberdiß ist AB: AC = AD: AE, und verwechselt AB: AD = AC: AE. Und, weil AB, AD selbst, folglich auch ihr Verhältniß gegeben ist; so ist das Verhältniß von AC zu AE gegeben. Also sind aus 2 gegebenen Punkten C, E 2 gerade Linien AC, AE, die ein gegebenes Verhältniß haben, an einen Punkt A hin gezogen, folglich berührt der Punkt A einen der Lage nach gegebenen Umkreis, oder eine der Lage nach gegebene gerade Linie (2, II. Ap.). Weil überdiß die Grösse von DA und der Punkt D gegeben ist; so berührt der Punkt A noch einen andern der Lage nach gegebenen Umkreis (1, I. A.), folglich ist er gegeben (28. D.). Und, weil die Grösse der Linie BA und der Punkt A gegeben ist; so berührt der Punkt B einen der Lage nach gegebenen Kreis (1, I. A.). Eben dieser Punkt B berührt aber auch noch einen andern der Lage nach gegebenen Kreis, weil die Grösse von CB und der Punkt C gegeben ist (1, I. A.). Mithin ist auch der Punkt B gegeben (28. D.), und alle Seiten des Viereks sind der Lage und Grösse nach gegeben (29. D.).

Bestimmung.

Es muß immer $BC + AC > AB$, oder $AC > AB - BC$, und eben so $CD + AD > AC$, also noch vielmehr $CD + AD > AB - BC$ oder $CD + AD + BC > AB$ seyn, und eben so bey den übrigen Seiten. Oder kurz: es muß immer die Summe von 3 der gegebenen Seiten des Viereks grösser seyn als die vierte.

Kompo-

Kompoſition.

Es ſeye alſo die Summe von je 3 der gegebenen Linien immer gröſſer, als die 4te, und man nehme auf der Verlängerung einer der geraden Linien CD das Stük DE gleich der vierten Proportionallinie zu AB, BC, AD. Nach 2, II. A. beſchreibe man einen Ort FA ſo, daß, wenn man aus C, E an irgend einen Punkt deſſelben A die geraden Linien CA, EA zieht, CA ſich zu EA verhalte wie AB zu AD, d. h. wenn AB = AD (Fig. 101. a.); ſo errichte man auf der Mitte von CE, FA ſenkrecht auf CE. Iſt aber (Figg. 101. b. c.) AB nicht gleich AD; ſo ziehe man aus C irgend eine gerade Linie CK, nehme auf derſelben CI = AB, und IH = IK = AD, ziehe die Linie KE, und mit dieſer gleichlauffend die Linie IF, die der geraden Linie CD in F begegne, ferner HF, und mit dieſer gleichlauffend IG, die der verlängerten Linie CD in G begegne. Endlich beſchreibe man aus dem Mittelpunkt G mit dem Halbmeſſer GF einen Kreis FA. In beyden Fällen beſchreibe man weiter mit dem Halbmeſſer DA aus dem Mittelpunkt D einen Kreis; ſo wird dieſer dem vorhin beſchriebenen Kreis oder der vorhin beſchriebenen geraden Linie FA in einem Punkt A begegnen, und wenn man über der Grundlinie AC ein Dreyek beſchreibt, deſſen andere Seiten die beyden noch übrigen gegebenen Seiten AB, CB des zu beſchreibenden Viereks ſind; ſo wird das Vierek ABCD das verlangte ſeyn, d. h. es wird ſich ein Kreis darum beſchreiben laſſen.

Hiebey muß zuerſt erwieſen werden, daß der aus dem Mittelpunkt D mit dem Halbmeſſer DA beſchriebene Kreis dem Ort FA immer begegnen werde, es mag nun FA eine gerade Linie oder ein Kreis ſeyn. Es ſeye 1) (Fig. 101. a.) FA eine gerade Linie; ſo iſt in dieſem Fall AB = AD, mithin BC = DE, folglich

EF

$EF = \frac{CD + BC}{2}$, mithin $FD = [FE - ED$ oder $= ED - FE$ (je nachdem ED, d. h. BC kleiner oder gröſſer iſt, als CD), d. h. $=] \pm \left(\frac{CD - BC}{2}\right)$. Mithin iſt $FD : DA = \pm \frac{CD - BC}{2} : DA = \pm (CD - BC) : 2\,DA = \pm (CD - BC) : AB + AD$. Es iſt aber nach der Beſtimmung immer $AB + AD + CD > BC$ und auch $AB + AD + BC > CD$, alſo, $AB + AD > \pm (CD - BC)$; folglich iſt auch $DA > FD$, oder der Punkt F liegt innerhalb des aus D mit dem Halbmeſſer AD beſchriebenen Kreiſes, mithin begegnet die gerade Linie FA gehörig verlängert gewiß immer dieſem Kreiſe. Es ſeye 2) (Fig. 101. b. c.) FA ein Kreis; ſo liegt F entweder zwiſchen C und D, oder zwiſchen D und E, oder auf D. Es liege F zwiſchen C, D; ſo iſt $EF : CF = IK : CI = AD : AB = ED : BC$, d. h. $ED + DF : ED = CF : BC$, d. h. $DF : ED = CF - BC : BC$, d. h. $DF : CF - BC = ED : BC$, d. h. $DF : \left\{\begin{matrix} DF + CF - BC \\ CD - BC \end{matrix}\right\} = ED : ED + BC = AD : AD + AB$ oder $DF : AD = CD - BC : AD + AB$. Nun iſt immer $AD + AB + BC > CD$, oder $AD + AB > CD - BC$; folglich iſt immer $DF < AD$, d. h. der Punkt F liegt innerhalb des mit dem Halbmeſſer AD aus dem Mittelpunkt D beſchriebenen Kreiſes. Auf ähnliche Art wird nun eben dieſes auch für den Fall erwieſen, wenn F zwiſchen D, E liegt, und in dem Fall, wenn F auf D, d. h. auf dem Mittelpunkt des Kreiſes liegt, erhellet es von ſelbſten, daß F innerhalb des Kreiſes liege. Da folglich in allen Fällen F innerhalb des aus dem Mittelpunkt D mit dem Halbmeſſer DA beſchriebenen Kreiſes liegt; ſo darf jezt nur noch erwieſen werden,

Kompoſition.

Es ſeye alſo die Summe von je 3 der gegebenen Linien immer gröſſer, als die 4te, und man nehme auf der Verlängerung einer der geraden Linien CD das Stük DE gleich der vierten Proportionallinie zu AB, BC, AD. Nach 2, II. A. beſchreibe man einen Ort FA ſo, daß, wenn man aus C, E an irgend einen Punkt deſſelben A die geraden Linien CA, EA zieht, CA ſich zu EA verhalte wie AB zu AD, d. h. wenn AB = AD (Fig. 101. a.); ſo errichte man auf der Mitte von CE, FA ſenkrecht auf CE. Iſt aber (Figg. 101. b. c.) AB nicht gleich AD; ſo ziehe man aus C irgend eine gerade Linie CK, nehme auf derſelben CI = AB, und IH = IK = AD, ziehe die Linie KE, und mit dieſer gleichlauffend die Linie IF, die der geraden Linie CD in F begegne, ferner HF, und mit dieſer gleichlauffend IG, die der verlängerten Linie CD in G begegne. Endlich beſchreibe man aus dem Mittelpunkt G mit dem Halbmeſſer GF einen Kreis FA. In beyden Fällen beſchreibe man weiter mit dem Halbmeſſer DA aus dem Mittelpunkt D einen Kreis; ſo wird dieſer dem vorhin beſchriebenen Kreis oder der vorhin beſchriebenen geraden Linie FA in einem Punkt A begegnen, und wenn man über der Grundlinie AC ein Dreyek beſchreibt, deſſen andere Seiten die beyden noch übrigen gegebenen Seiten AB, CB des zu beſchreibenden Viereks ſind; ſo wird das Vierek ABCD das verlangte ſeyn, d. h. es wird ſich ein Kreis darum beſchreiben laſſen.

Hiebey muß zuerſt erwieſen werden, daß der aus dem Mittelpunkt D mit dem Halbmeſſer DA beſchriebene Kreis dem Ort FA immer begegnen werde, es mag nun FA eine gerade Linie oder ein Kreis ſeyn. Es ſeye 1) (Fig. 101. a.) FA eine gerade Linie; ſo iſt in dieſem Fall AB = AD, mithin BC = DE, folglich

EF

$EF = \frac{CD + BC}{2}$, mithin $FD = [FE - ED$ oder $= ED - FE$ (je nachdem ED, d. h. BC kleiner oder gröſſer iſt, als CD), d. h. $=] \pm \left(\frac{CD - BC}{2}\right)$. Mithin iſt $FD : DA = \pm \frac{CD - BC}{2} : DA = \pm (CD - BC) : 2\,DA = \pm (CD - BC) : AB + AD$. Es iſt aber nach der Beſtimmung immer $AB + AD + CD > BC$ und auch $AB + AD + BC > CD$, alſo, $AB + AD > \pm (CD - BC)$; folglich iſt auch $DA > FD$, oder der Punkt F liegt innerhalb des aus D mit dem Halbmeſſer AD beſchriebenen Kreiſes, mithin begegnet die gerade Linie FA gehörig verlängert gewiß immer dieſem Kreiſe. Es ſeye 2) (Fig. 101. b. c.) FA ein Kreis; ſo liegt F entweder zwiſchen C und D, oder zwiſchen D und E, oder auf D. Es liege F zwiſchen C, D; ſo iſt $EF : CF = IK : CI = AD : AB = ED : BC$, d. h. $ED + DF : ED = CF : BC$, d. h. $DF : ED = CF - BC : BC$, d. h. $DF : CF - BC = ED : BC$, d. h. $DF : \left\{\begin{matrix} DF + CF - BC \\ CD - BC \end{matrix}\right\} = ED : ED + BC = AD : AD + AB$ oder $DF : AD = CD - BC : AD + AB$. Nun iſt immer $AD + AB + BC > CD$, oder $AD + AB > CD - BC$; folglich iſt immer $DF < AD$, d. h. der Punkt F liegt innerhalb des mit dem Halbmeſſer AD aus dem Mittelpunkt D beſchriebenen Kreiſes. Auf ähnliche Art wird nun eben dieſes auch für den Fall erwieſen, wenn F zwiſchen D, E liegt, und in dem Fall, wenn F auf D, d. h. auf dem Mittelpunkt des Kreiſes liegt, erhellet es von ſelbſten, daß F innerhalb des Kreiſes liege. Da folglich in allen Fällen F innerhalb des aus dem Mittelpunkt D mit dem Halbmeſſer DA beſchriebenen Kreiſes liegt; ſo darf jezt nur noch erwieſen

werden,

werden, daß ein anderer Punkt des Kreiſes FA auſſerhalb des aus D beſchriebenen Kreiſes liege, oder daß $DG + FG > DA$ ſeye. Nach der 1ſten Simſonſchen Verzeichnung von 2, II. A., mit welcher, wie dort gezeigt wird, die hier gewählte 2te Simſonſche im Grund einerley iſt, liegt der Punkt G (der Mittelpunkt des Orts FA) immer auf der Verlängerung von CE entweder nach E oder nach C hin, je nachdem nemlich AC oder AE, d. h. AB oder AD gröſſer iſt, nie aber fällt er zwiſchen C und E. Er liege 1) (Fig. 101. b.) auf der nach E hin verlängerten Linie CE, und der Punkt F liege, wie wir auch oben zuerſt angenommen haben, zwiſchen C und D; ſo iſt, wie oben gezeigt worden, $DF : CF - BC = ED : BC = AD : AB$. Nach der Verzeichnung aber iſt auch $FG : CG = HI : CI = AD : AB$, folglich $FG : CF + FG = DF : CF - BC$, d. h. es iſt $FG : CF = DF : CF - (BC + DF)$, oder $FG : DF = CF : CF - (BC + DF)$ oder $FG : \begin{cases} FG - DF \\ DG \end{cases} = CF : BC + DF$, oder es iſt $FG : FG + DG = CF : CF + BC + DF$ oder $FG : CF = FG + DG : CD + BC$. Nach der Verzeichnung aber iſt auch $FG : CF = HI : CH = AD : AB - AD$. Mithin iſt endlich $AD : AB - AD = FG + DG : CD + BC$, oder $AD : FG = DG = AB - AD : CD + BC$. Nun iſt immer $AB < AD + CD + BC$, folglich $AB - AD < CD + BB$, mithin iſt $AD < FG + DG$, d. h. der Punkt in welchem die Linie FG dem aus G mit dem Halbmeſſer FG beſchriebenen Kreis FA wieder begegnet, liegt auſſerhalb des Kreiſes, der aus D mit dem Halbmeſſer DA beſchrieben wird. Und, da der Punkt F des Kreiſes FA innerhalb des aus D beſchriebenen Kreiſes liegt; ſo ſchneiden dieſe beyden Kreiſe einander gewiß. Liegt aber 2) der Punkt G (Fig. 101. c.) auf der nach C hin verlängerten Linie

EC,

EC, und wieder F zwiſchen C und D; ſo iſt, wie vorhin FG : CG = DF : CF — BC, d. h. FG : FG — CF = DF : CF — BC, oder FG : CF = DF : DF + BC — CF, oder FG : DF = CF : DF + BC — CF, oder FG : $\begin{cases} FG + DF \\ DG \end{cases}$ = CF : DF + BC, oder FG : FG + DG = CF : CF + DF + BC, oder FG : CF = FG + DG : CD + BC. Nach der Verzeichnung aber iſt FG : CF = HI : CH = AD : AD — AB. Mithin iſt AD : AD — AB = FG + DG : CD + BC, oder AD : FD + DG = AD — AB : CD + BC, und es wird, wie vorhin gezeigt, daß AD < FD + DG ſeye. Auf ähnliche Art wird nun eben diß erwieſen, wenn der Punkt F zwiſchen D und E liegt. Mithin ſchneiden die aus den Mittelpunkten D, G auf die vorhin angezeigte Art beſchriebene Kreiſe einander in allen Fällen. Und nun iſt nur noch zu beweiſen, daß das Vierek, welches man beſchreibt, wie oben gezeigt worden, wirklich die verlangte Eigenſchaft habe, daß ſich nemlich ein Kreis um daſſelbe beſchreiben laſſe. Diß läßt ſich nun leicht erweiſen. Nach der Verzeichnung nemlich iſt AC : AE = AB : AD, oder AC : AB = AE : AD, und auch AB : BC = AD : DE. Weil alſo in den beyden Dreyeken ADE, ABC alle Seiten proportional ſind; ſo ſind dieſe Dreyeke gleichwinklicht (5, 6. E.), mithin iſt der Winkel ADE gleich dem Winkel ABC, folglich geht der durch die Punkte A, C, D beſchriebene Kreis auch durch B (2 Schol. 5, 4. E. in der Bärm. Ausg.).

Berechnung.

Für den 1ſten Fall, wenn AB = AD iſt, findet man die Berechnung ſehr leicht, man kann ſie auch aus der folgenden herleiten, indem man b = c ſezt. Es

ſeye

seye nemlich CD = a, DA = b, AB = c, BC = d; so ist für den 2ten Fall, wenn nemlich DA, BA ungleich sind (Fig. 101. b.), nach der Berechnung von 2, II. Ap.

$$AG = \frac{(CD+DE)\ AB.\ AD}{(BA+AD)(BA-AD)} = \frac{\left(CD+\frac{AD.BC}{AB}\right)AB.AD}{(BA+AD)(BA-AD)}$$

d. h. $AG = \frac{(ac+bd)\ b}{(c+b)(c-b)}$,

ferner $DG = CG - CD = \frac{(CD+DE)\ AB^2}{AB^2 - AD^2} - CD$

d. h. $DG = \frac{DE.\ AB^2 + CD.\ AD^2}{(AB+AD)(AB-AD)}$

$$= \frac{AD.\ BC.\ AB + CD.\ AD^2}{(AB+AD)(AB-AD)}$$

oder $DG = \frac{(cd+ab)\ b}{(c+b)(c-b)}$. Endlich ist

$$AD = b = \frac{b\ (c^2 - b^2)}{(c+b)(c-b)}.$$

Man kennt also in dem Dreyek ADG alle Seiten, und findet daraus leicht ADG, mithin auch ADC.

Es ist nemlich sin. ADC = sin. ADG

$$= \sqrt{[(ac+bd+ab+cd+c^2-b^2)(ac+bd+c^2-b^2-ab-cd)(ac+bd+ab+cd+b^2-c^2)(ab+cd+c^2-b^2-ac-bd)] : 2\,(ab+cd)\,(c^2-b^2)}.$$

Nun ist $ac+bd+ab+cd = (c+b)(a+d)$

und $ac+bd-ab-cd = (c-b)(a-d)$

und $ab+cd-ac-bd = (c-b)(d-a)$

Mithin

Mithin ist sin. ADC

$$= \sqrt{[(c+b)(a+d+c-b)(c-b)(a-d+c+b)(c+b)(a+d+b-c)(c-b)(d-a+c+b)] : 2(ab+cd)(c^2-b^2)}$$

d. h. sin. ADC

$$= \sqrt{[(a+c+d-b)(a+b+c-d)(a+b+d-c)(b+c+d-a) : 2(ab+cd)}.$$

Hieraus findet man alles übrige leicht, z. B. den Innhalt des Viereks so: Er ist gleich der Summe der Dreyeke ACD und ACB. Es ist aber der Innhalt des Dreyeks $ACB = \frac{cd.\ sin.\ ABC}{2}$, und der Innhalt des Dreyeks $ACD = \frac{ab.\ sin.\ ADC}{2}$. Nun ist sin. ADC = sin. ABC, mithin der Innhalt des Viereks

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+c+d-b)(a+b+c-d)(a+b+d-c)(b+c+d-a)}.$$

Daß das endliche Resultat der Rechnung sich nicht ändere, wenn G auf der nach C hin verlängerten Linie CD liegt, sieht man leicht.

Anmerkung.

Die Analyse dieser Aufgabe ist von Klingenstierna. Man sehe Schwed. Abhandl. V. Band, S. 203 flg. nach der deutschen Uebersezung. Auch hat nach Schwenters Erzählung in seiner Geometr. pract. nou. 1ster Tract. 4tes Buch, S. 164 flg. der Ausg. von 1618 von dieser Aufgabe der fürtreffliche Mathematicus M. Iohann. Praetorius seliger ein sonderlich Büchlein geschrieben, dessen sich nach ihm seiner ungemeldt etliche

beholfen, daraus auch Schwenter an dem angef. Ort dieſe Aufgabe genommen.

L'Huilier beweiſt in ſeinem oben angeführten Werk de Maximis et Minimis, P. I. C. I. §. 11. p. 5. vergl. p. 18 flg. geometriſch, daß ein auf dieſe Art beſchriebenes Vierek das größte unter allen ſeye, welche aus dieſen vier gegebenen Seiten verzeichnet werden können. Zugleich bemerkt er S. 23 flg., daß, wenn man nicht auf die Bedingung des möglich größten Innhalts, ſondern bloß darauf ſehen wolle, daß ſich ein Kreis um das aus den vier gegebenen Seiten verzeichnete Vierek beſchreiben laſſe, und wenn man zugleich das Wort Vierek in dem allerweiteſten Sinn nehme, wo man nemlich jede durch 4 gerade Linien begränzte Figur darunter verſtehe, ſelbſt, wenn einige der Linien ſtatt Seiten des Viereks zu ſeyn, nun die Stelle der Diagonalen vertreten, daß dann aus den 4 gegebenen Seiten ſich noch ein anderes Vierek verzeichnen laſſe, um welches man ebenfalls einen Kreis beſchreiben könne. Wir dürfen uns nemlich nur wirklich ein Vierek dieſer Art gezeichnet denken, wie in Fig. 101. d. Zieht man hier wieder, wie vorhin AC; ſo iſt jezt nimmer wie vorhin ADC gleich dem Nebenwinkel von ABC; ſondern ADC ſelbſt iſt jezt gleich ABC. Wollen wir alſo wieder, wie vorhin ein Dreyek ADE ſo verzeichnen, daß es dem Dreyek ABC ähnlich werde; ſo müſſen wir jezt DE nimmer auf der nach D hin verlängerten Linie CD, ſondern von D gegen C hin abſchneiden. Es geſchehe diß; ſo wird man nun übrigens ganz auf ähnliche Art wie vorhin verfahren können.

Wegen der Berechnung für dieſen Fall iſt zu bemerken, daß alle übrige Linien ihre vorige Lage behalten, nur die Seite BA, die vorhin auf eben der Seite von DA lag, auf welcher CD iſt, liegt jezt auf der entgegen-

gegen gesezten Seite, mithin muß in der Berechnung jezt nur immer das Zeichen von BA oder c verwechselt werden.

14. Aufgabe.

Fig. 102.

In der dreyekichten Pyramide ABCD sind die Linien BC, BD, CD der Lage und Grösse nach, und noch überdiß die Winkel ABE, ADE, ACE gegeben, den Punkt E der Grundfläche BCD zu finden, auf welchen das aus A gefällte Perpendikel trift.

Analyse.

In dem Dreyek ABE sind alle Winkel gegeben, mithin ist das Verhältniß von BE zu AE gegeben (43. D.). Eben so, weil in dem Dreyek ACE alle Winkel gegeben sind; so ist auch das Verhältniß von CE zu AE gegeben; folglich ist auch das Verhältniß von BE zu CE gegeben (9. D.). Nun sind auch die Punkte B und C gegeben; folglich berührt der Punkt E einen der Lage nach gegebenen Kreis (2, II. A.). Ferner, weil in dem Dreyek ADE alle Winkel gegeben sind; so ist das Verhältniß von DE zu AE, mithin auch das Verhältniß von DE zu EC gegeben, und, weil die Punkte C, D gegeben sind; so berührt der Punkt E noch einen andern der Lage nach gegebenen Kreis (2, II. A.), folglich ist er gegeben (28. D.).

Wären die beyden Winkel ABE, ACE, mithin auch die Linien BE, CE gleich; so würde der erste Ort des Punkts E eine gerade Linie: wären die beyden Winkel ACE, ADE gleich; so würde der andere Ort eine

gerade Linie: wären endlich alle 3 Winkel, mithin alle 3 Linien BE, CE, DE gleich; so würden beyde Oerter gerade Linien seyn (1. Fall 2, II. A.).

Komposition.

Man nehme irgend eine gerade Linie eb, errichte aus einem Punkt b derselben das Perpendikel be, und mache die Winkel eab, eac, ead gleich den Winkeln EAB, EAC, EAD, d. h. gleich den Komplementen der Winkel ABE, ACE, ADE, und ziehe ab, ac, ad; so sind folglich die Dreyeke aeb, aec, aed den Dreyeken AEB, AEC, AED ähnlich, mithin ist

be : ae = BE : AE
ae : ce = AE : CE

folglich gleichförmig be: ce = BE: CE, und eben so ce: de = CE: DE, d. i. die Linien eb, ec, ed haben die Verhältnisse unter einander, welche EB, EC, ED haben sollen. Man beschreibe also einen Ort EF (2, II. Ap.) so, daß die aus B, C an irgend einen Punkt E desselben gezogene gerade Linien BE, CE sich zu einander verhalten wie be zu ce, d. h. man theile BC in dem Punkt F so, daß BF zu CF das gegebene Verhältniß von be zu ce habe, und nehme auf der nach C hin verlängerten Linie BC einen Punkt H so, daß BH zu HF das Verhältniß von BF zu CF, d. i. von be zu ce habe, und beschreibe aus dem Mittelpunkt H mit dem Halbmesser HF einen Kreis. Eben so beschreibe man auf ähnliche Art den Ort EG, d. h. man nehme auf CD den Punkt G so, daß CG zu GD sich verhalte wie ce zu de, und auf der nach D hin verlängerten Linie CD nehme man den Punkt I so, daß CI zu IF das Verhältniß von CG zu DG, d. i. von ce zu de habe, und beschreibe aus dem Mittelpunkt I mit dem

dem Halbmeſſer IG einen Kreis; ſo werden dieſe beyden Kreiſe einander ſchneiden, und ihr Durchſchnittspunkt E wird der geſuchte Punkt ſeyn, d. h. wenn man aus demſelben auf der Ebene BCD ein Perpendikel EA errichtet, und in der Ebene EBA an daſſelbe aus B unter einem Winkel EBA = eba eine Linie BA zieht, die dieſem Perpendikel in A begegnet; ſo werden die Linien CA, DA, wenn man dieſe nun ebenfalls zieht, mit CE, DE Winkel ACE, ADE machen, welche gleich ſind den gegebenen ace, ade.

Daß die beyden Kreiſe FE, GE einander immer ſchneiden werden, erhellet ſchon aus folgender Betrachtung. Weil in jeder Pyramide ein Perpendikel AE auf die Grundfläche gefällt werden kann (11, 11. E.), oder, weil es auf der Grundfläche einer jeden Pyramide immer einen Punkt E giebt, auf welchen ein aus der Spize der Pyramide gefälltes Perpendikel triſt, und weil dieſer gewiß immer vorhandene Punkt E nach der Analyſe auf den beyden beſchriebenen Oertern liegt, und dieſe Oerter gewiß nicht einerley ſind, indem es Kreiſe ſind, deren Mittelpunkte auf verſchiedenen Linien liegen; ſo müſſen folglich dieſe beyden Oerter einander immer wenigſtens in Einem Punkt E begegnen. Und diß iſt zur Auflöſung unſerer Aufgabe ſchon genug. Uebrigens ſchneiden die beyden Oerter einander wirklich in zwey Punkten E, e, d. h. es ſind nach den Angaben der Aufgabe noch 2 Pyramiden möglich, bey welchen alle vorkommende Bedingungen eintreffen, und es muß in jedem vorkommenden Fall aus andern Umſtänden entſchieden werden, welches gerade der diſsmahl gemeinte Punkt ſeye. Inzwiſchen bleiben wir nun nur bey einem dieſer Punkte E ſtehen, und ziehen an denſelben die Linien BE, CE, DE. Weil nun nach der Verzeichnung die Dreyeke ABE, abe ähnlich ſind; ſo iſt

ae : eb = AE : EB. Es iſt aber ebenfalls nach der Verzeichn. eb : ce = EB : CE.

Folglich gleichförmig ae : ec = AE : EC, alſo ſind die Dreyeke aec, AEC gleichwinklicht, folglich der Winkel ACE gleich dem gegebenen ace. Eben ſo, weil

ae : ec = AE : EC, und
ec : ed = EC : ED; ſo iſt

ae : ed = AE : ED; folglich ſind die Dreyeke aed, AED gleichwinklicht, mithin der Winkel ADE gleich dem gegebenen ade. Für den Fall, wenn einer der beyden Oerter, oder beyde gerade Linien werden, hat die Kompoſition keine Schwierigkeit.

Berechnung.

Man findet durch die Formeln bey 2, II. Ap. die Linien HE, IE, ID, CI, CH. Vermittelſt der beyden lezten und des bekannten Winkels ICH findet man IH und den Winkel IHC; folglich, da in dem Dreyek IHE jezt alle Seiten bekannt ſind, findet man leicht die Winkel EIH, EHI, und weil die Winkel IHC, HIC vorher bekannt ſind; ſo hat man folglich leicht die Winkel EID, EHB. Und nun findet man den Abſtand des Punkts E von welchem der Punkte B, C, D man will, z. B. in dem Dreyek EDI, weil EI, ID nebſt dem eingeſchloſſenen Winkel bekannt ſind, ED und den Winkel EDI, und eben ſo bey jedem der übrigen Punkte.

Es erhellet von ſelbſt, daß, wenn die Punkte B, C, D auch in einer geraden Linie liegen, die Aufgabe noch auf die nemliche Art aufgelößt wird. Uebrigens vergleiche man von dieſer in der praktiſchen Geometrie ſehr nüzlichen Aufgabe Lamb. Beiträge, 1. Theil, S. 140

140 flg. wo man zugleich einige ähnliche Aufgaben, welche auch auf dieſe Art aufgelößt werden, von S. 129 an finden wird, Tempelhof. Anal. endlicher Gröſſen, S. 281 flg. vergl. S. 250 flg. Schulze Taſchenbuch, II. Theil, S. 454 flg. Newt. Arithm. Vniu. Probl. XXVII. S. 122 flg. der Graveſ. Ausgabe.

15. Aufgabe.

Fig. 103.

In dem Dreyek ABC iſt die Lage und Gröſſe der Grundlinie AB, und der gegen über ſtehende Winkel ACB gegeben, und die Summe der Quadrate der beyden übrigen Seiten hat zu dem Innhalt des Dreyeks ein gegebenes Verhältniß, das Dreyek zu finden.

Analyſe.

Man theile AB in E in zwey gleiche Theile, und errichte das Perpendikel ED; ſo iſt der Punkt E und die Lage der Linie ED gegeben. Es ſeye $2\times FE$ zu EB das gegebene Verhältniß, welches die Summe der Quadrate über AC, BC zu dem Innhalt des Dreyeks haben ſoll; ſo iſt, weil EB gegeben iſt, auch FE (2. D.) und der Punkt F (30. D.) gegeben. Aus C fälle man auf ED das Perpendikel CD; ſo iſt CD mit der der Lage nach gegebenen Linie AB gleichlauffend, und weil der Innhalt des Dreyeks ACB gleich iſt dem Rechk DEB; ſo iſt folglich $AC^2+BC^2 : DE\times EB = 2\times FE : EB = 2\times FE\times ED : BE\times ED$, mithin die Summe der Quadrate über AC, BC gleich dem doppelten Rechtek $FE\times ED$, d. h. dem Rechtek, das enthalten iſt zwiſchen einer der Gröſſe nach gegebenen Linie $2\times FE$ und zwiſchen demjenigen Stük ED der der Lage nach gegebenen

benen Linie EF, welches zwiſchen einem auf ihr gegebenen Punkt E, und zwiſchen der Linie CD abgeſchnitten wird, die aus C an EF mit der der Lage nach gegebenen Linie AB gleichlauffend gezogen wird: folglich berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis (6, II. Ap.). Weil aber auch der Winkel ACB gegeben iſt; ſo berührt der Punkt C noch einen andern der Lage nach gegebenen Umkreis (2, I. A.). Mithin iſt er gegeben (28. D.), folglich ſind die Linien AC, BC der Lage und Gröſſe nach gegeben (29. D.).

Kompoſition.

Man verzeichne den Ort (6, II. A.) ſo, daß $AC^2 + BC^2 = 2.FE \times ED$, d. h. man theile EF in G in 2 gleiche Theile, und beſchreibe aus dem Mittelpunkt G mit dem Halbmeſſer GF einen Halbkreis FHE, ziehe durch B mit ED gleichlauffend die Linie BH, die dem Halbkreis FHE in H begegne, und durch H mit AB gleichlauffend die Linie HK, die der Linie ED in K begegne, und beſchreibe aus G mit dem Halbmeſſer GK einen Kreis CKc. Ferner verzeichne man den Ort 2, I. A., d. h. man beſchreibe über AB einen Kreisabſchnitt ACcB, der des gegebenen Winkels ACB fähig ſeye (33, 3. E.). Die Kreiſe ACcB, CKc begegnen einander in den Punkten C, c, und man ziehe an einen derſelben, an welchen man will, z. B. an C die geraden Linien AC, BC; ſo wird das Dreyek ACB das verlangte ſeyn, d. h. es wird den gegebenen Winkel ACB haben, und die Summe der Quadrate über AC, BC wird ſich zu dem Innhalt des Dreyeks verhalten wie $2 \times FE$ zu EB. Daß der Winkel ACB der gegebene ſeye, erhellet von ſelbſt, aus der Verzeichnung. Daß aber die Summe der Quadrate über AC, BC ſich zu dem Innhalt des Dreyeks verhalte, wie 2. FE zu EB, kann folgen-

folgendermaſſen erwieſen werden. Man fälle aus C auf ED das Perpendikel CD, ziehe EC, und theile EG in dem Punkt I in 2 gleiche Theile; ſo iſt (6. Lehnſ. II. Ap.) $AC^2 + BC^2 = 2(EC^2 + EB^2)$. Aber $EC^2 - GC^2 = 2\,EG \times ID$ (1. Lehnſ. II. Ap.) $= EF \times ID$, oder $EC^2 = GC^2 + EF \times ID = GK^2 + EF \times ID = GF^2 - KH^2 + EF \times ID = GF^2 - EB^2 + EF \times ID$. Mithin iſt $AC^2 + BC^2 = 2\,(GF^2 + EF \times ID) = 2.\,(\frac{1}{4}\,EF^2 + EF \times ID) = 2\,EF\,(\frac{1}{4}\,EF + ID) = 2\,EF \times ED$. Weil nun der Innhalt des Dreyeks gleich iſt dem Rchtk $DE \times EB$; ſo iſt folglich $AC^2 + BC^2 : \Delta\,ACB = 2.\,FE \times ED : BE \times ED = 2.\,FE : BE$, d. i. in dem gegebenen Verhältniß.

Beſtimmung.

Weil, wenn die Aufgabe möglich ſeyn ſoll, die Linie BH dem über EF beſchriebenen Kreis wenigſtens in Einem Punkt begegnen muß; ſo darf FG oder EG nicht kleiner ſeyn, als EB. Iſt EG gleich EB; ſo fällt der Punkt K auf den Punkt G, und der einzige Punkt G iſt in dieſem Fall ſtatt des Kreiſes CKc. Nun muß, wenn die Aufgabe in dieſem Fall möglich ſeyn ſoll, auch der über AB beſchriebene Kreis durch den Punkt G gehen; folglich iſt der Winkel $AGE = \frac{1}{2}\,AGB = GAB = GBA$, alſo der Winkel AGB ein rechter, und das Dreyek AGB, das in dieſem Fall entſteht, gleichſchenklicht, oder unter allen möglichen Dreyeken, die über der gegebenen Grundlinie AB verzeichnet werden können, iſt das gleichſchenklichte, rechtwinklichte (deſſen rechter Winkel der Seite AB gegenüber ſteht) dasjenige, bey welchem die Summe der Quadrate der beyden übrigen Seiten zu dem Innhalt des Dreyeks das möglich kleinſte Verhältniß hat. Ueberhaupt aber wird in

allen Fällen, wenn die Aufgabe möglich seyn soll, noch weiter erfodert, daß die Kreise CKc, ACcB einander schneiden, oder wenigstens in Einem Punkt begegnen sollen, d. h. wenn der Kreis ACcB der Linie ED in O begegnet; so darf GK nicht kleiner seyn als GO, oder EK, d. h. HB nicht kleiner seyn als EO. Man beschreibe also zuerst den Kreis ACcB. Ist nun EO gröſser als HB; so ist die Aufgabe unmöglich, ist EO = HB; so berühren die beyden Kreise einander in O, ist EO < HB; so schneiden sie einander in 2 Punkten C, c. Noch könnte man denken, ob nicht vielleicht unter gewissen Umständen die Kreise CKc, ACcB in Einen Kreis zusammen fallen. Allein diß kann nie geschehen. Denn da $GK^2 = GH^2 - EB^2 = GE^2 - EB^2$; so kann nicht auch zugleich $GK^2 = GE^2 + EB^2$ seyn, wie seyn müßte, wenn die Kreise KCc, ACB zusammenfallen, folglich der Kreis KCc durch die Punkte A, B gehen sollte.

Berechnung.

Es seye S der Mittelpunkt des Kreises ACB; so findet man nach der Berechnung von 2, I. A. ES, folglich hat man, weil EG gegeben ist, auch SG. Ebenfalls nach der Berechnung von 2, I. A. findet man SC, und GC ist $= \sqrt{EG^2 - EB^2} = \sqrt{(EG+EB)(EG-EB)}$, folglich findet man in dem Dreyek SCG, da nun alle drey Seiten bekannt sind, leicht den Winkel CSG. Und, da der Winkel ASE = ACB gegeben ist; so hat man folglich auch den Winkel ASC, mithin in dem gleichschenklichten Dreyek ASC leicht die Seite AC. Eben so findet man den Winkel CSB, und die Seite CB.

Anmer-

Anmerkung.

Wäre ſtatt des Verhältniſſes, welches die Summe der Quadrate über AC, BC zu dem Innhalt des Dreyeks hat, das Verhältniß des Unterſchieds der Quadrate über AC, BC zu dem Innhalt des Dreyeks gegeben; ſo würde die Aufgabe nach dem Zuſaz von 6, II. A. im erſten Anhang des Ueberſezers aufgelöſt. Wäre ſtatt des Verhältniſſes, welches die Summe der Quadrate von AC, BC zu dem Dreyek hat, das Verhältniß von einem dieſer Quadrate zum Innhalt des Dreyeks gegeben; ſo brauchte man zu der Auflöſung 3, II. A. Wäre endlich die Summe oder der Unterſchied der Quadrate über AC, BC ſelbſt gegeben; ſo würde die Auflöſung nach 5, oder 1, II. A. gemacht werden. Ja man kann auch bey den hier vorkommenden Angaben die Aufgabe auf 5, II. A. bringen. Nemlich, weil der Winkel C gegeben iſt; ſo hat, wenn er ſpizig iſt nach 75. D., wenn er ſtumpf iſt, nach 74. D. der Unterſchied des Quadrats über AB, und der Summe der Quadrate über AC, BC zu dem Innhalt des Dreyeks ein gegebenes Verhältniß. Nach der Vorausſezung aber hat auch die Summe der Quadrate über AC, BC zu dem Innhalt des Dreyeks ein gegebenes Verhältniß. Mithin hat der Unterſchied des Quadrats über AB, und der Summe der Quadrate über AC, BC zu eben dieſer Summe der Quadrate über AC, BC ein gegebenes Verhältniß (9. D.). Folglich iſt auch das Verhältniß des Quadrats über AB zu der Summe der Quadrate über AC, BC gegeben (7. D.), mithin iſt, weil AB, folglich das Quadrat über AB gegeben iſt, auch die Summe der Quadrate über AC, BC gegeben (2. D.). Iſt der Winkel ACB ein rechter; ſo iſt ohnehin die Summe der Quadrate über AC, BC gleich dem Quadrat über AB, folglich gegeben.

16. Aufgabe.

Es ist der Innhalt des Fünfeks ABCDE, eine Seite AB der Lage und Grösse nach, das auf diese Seite von der gegenüber stehenden Spize gefällte Perpendikel DF der Grösse nach, ferner das Verhältniß der Seiten DE, EA und der Winkel DEA, und eben so das Verhältniß der Seiten DC, CB und der Winkel DCB gegeben: das Fünfek zu finden.

Analyse.

Weil AB, DF der Grösse nach gegeben sind; so ist das Rchtk AB×DF, d. h. der doppelte Innhalt des Dreyeks ADB, mithin dieser Innhalt selbst der Grösse nach gegeben, folglich berührt der Punkt D, weil auch die Lage von AB gegeben ist, eine der Lage nach gegebene mit AB gleichlauffende gerade Linie (3, I. A.). Und, weil der Winkel bey E, und das Verhältniß der ihn einschliessenden Seiten, und eben so der Winkel bey C und das Verhältniß der ihn einschliessenden Seiten gegeben sind; so sind die Dreyeke AED, BCD der Gattung nach gegeben (44. D.). Endlich, da der Innhalt des Fünfeks gegeben ist; so ist auch der Ueberschuß des Fünfeks über das gegebene Dreyek ABD gegeben, d. h. es ist die Summe der über AD, BD beschriebenen der Gattung nach gegebenen Dreyeke gegeben, folglich berührt der Punkt D einen der Lage nach gegebenen Umkreis (5, II. A.). Mithin ist dieser Punkt gegeben (28. D.); folglich sind die Linien AD, BD der Lage und Grösse nach gegeben (29. D.), und, weil die Winkel EAD, EDA, DBC, BDC gegeben sind; so sind die Linien AE, DE, BC, DC der Lage nach (33. D.), mithin die Punkte E, C (28. D.), folglich auch die Linien AE,

AE, DE, BC, DC der Gröſſe nach (29. D.) gegeben.

Kompoſition und Beſtimmung.

Es ſeye M der Ueberſchuß des gegebenen Innhalts des Fünfeks über die Hälfte des Rchtks AB×FD, und man beſchreibe den Ort 5, II. A. ſo, daß die Summe der der Gattung nach gegebenen über AD, BD beſchriebenen Figuren gleich ſeye dem Raum M. (Die weitere Entwiklung dieſer Kompoſition iſt überflüſſig, weil doch nur die Kompoſition von 5, II. A., welche doch nicht ſo ganz kurz iſt, abgeſchrieben werden müßte. Ich bemerke alſo nur um des folgenden willen, daß in der Fig. 104. P den Mittelpunkt des Kreiſes bedeuten ſolle, welcher der Ort iſt). Eben ſo beſchreibe man den Ort (3, I. A.) ſo, daß der Innhalt des Dreyeks gleich ſeye der Hälfte des Rechteks AB×DF. D ſeye der Punkt, in welchem die beyden Oerter einander begegnen. Man ziehe AD, BD, und auf dieſen Linien beſchreibe man die Dreyeke AED, BCD ſo, daß ſie die gegebenen Winkel E, C haben, und daß die Seiten AE, EC und eben ſo auch die Seiten BC, DC das gegebene Verhältniß unter einander haben; ſo iſt ABCDE das verlangte Fünfek. Der Beweis erhellet von ſelbſt. Weil aber erfodert wird, daß der aus P mit dem Halbmeſſer PD beſchriebene Kreis der Linie FD in D begegne; ſo darf PD nicht kleiner ſeyn, als FD, d. h. das Quadrat über DP oder eine Figur, die ſich zu dem Raum N (5, 2. A. Iſter Fall 3.) verhält, wie das dort vorkommende Quadrat über GH zu der Summe der Räume, die dort K, L heiſſen, darf nicht kleiner ſeyn, als das Quadrat über DF.

Berech-

Berechnung.

Man findet AP, BP, PD durch die Berechnung von 5, II. A. Da nun DF gegeben ist; so findet man in dem rechtwinklichten Dreyek PFD leicht den Winkel DPB, mithin kennt man nun in den Dreyeken APD, BPD die Seiten AP, PD, und BP, PD nebst den eingeschlossenen Winkeln, und findet hieraus AD, BD, woraus sich alles übrige leicht ergiebt.

Es ist begreiflich, daß bey Vieleken von mehreren Seiten ähnliche Aufgaben vorkommen, und auf ähnliche Art aufgelöst werden können.

Verbeſſerungen.

S. 16 Linie 3 Ω lies Ω.
— 41 — 11 BA und AE, lies BA, und AE,
— 67 — 15 X = AN lies = AN.
— 80 — 11 zu gleichende Linien lies zu ziehende Linien.
— — — 29 ef aequo lies ex aequo.
— 121 — 1 ſeyn lies ſeye.
— 127 — 27 der Seite AE lies der Linie AE.
— 129 — 27 AG× lies AG × γ.
— 130 — 16 HK: HK lies HK: HL.
— 131 — 19 BD lies BS.
— 133 — 5 nach lies noch.
— — — 10. 11 und 33 = DQ, CR lies DQ: CR.
— 135 — 5 QB lies QR.
— 142 — 19 Z lies Q.
— — — — AS×ζ lies AS×δ.
— — — 33 bey geraden Linien lies bey 4 geraden Linien.
— 144 — 8 Fig. 46. e. lies Fig. 40. e.
— 158 — 24 C'SA lies C''SA.
— 160 — 6 SB = SB lies SB'' = SB.
— — — 26 CSD lies CSB.
— 172 — 21 dieſem lies dieſen.
— 174 — 5 ſin. AED: ſin. (AFD + ADF)
lies ſin. AED. ſin. (AFD + ADF)
— 176 — 8 Pellgrmme lies Prllgrmme.
— 183 — 32 gerad lies gerade.
— 196 — 18 nach lies noch.
— 199 — 6 in lies an.
— 200 — 21 FD lies FP.
— 202 — 13 den lies der.
— 206 — 25 Winkeln lies Winkel.
— 236 — 2 ſeye lies ſeyn.
— 249 — 26 Linie lies Linien.

S. 253 Linie 4 BG lies BG =

— 254 — 1: $\frac{a}{2}$ lies $\frac{a}{2}$

— 253 — 23 Punkten lies Punkten.

— 259 — 16 Fall 37 lies Fall 3. 7.

— 302 — 2 $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ lies $\alpha+\beta+\gamma+\delta$, &c.

— — — 22 — : 2 $\alpha+\beta+\gamma$ $\alpha+\beta$ . . .
lies — $(\alpha+\beta+\gamma$ $\alpha+\beta)$ . . .

— 303 — 20. 21. 22. 23. c lies r.

— 304 — 23. 24. 25. 27. 32. c lies r.

— 305 — 1. 5. 10. 28. c lies r.

— 307 — 24 $\frac{a^2 a^2}{(a+\beta)^2} =$ lies $\frac{a^2 a^2}{(a+\beta)^2}$ —

— 308 — 12 fin. C. cosin. BCF lies = fin. C. cosin. BCF.

— 309 — 21. 22. c lies r.

— 310 — 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 10. 11. 12. 13. statt 6 lies σ.

— — — 15. 16 c lies r.

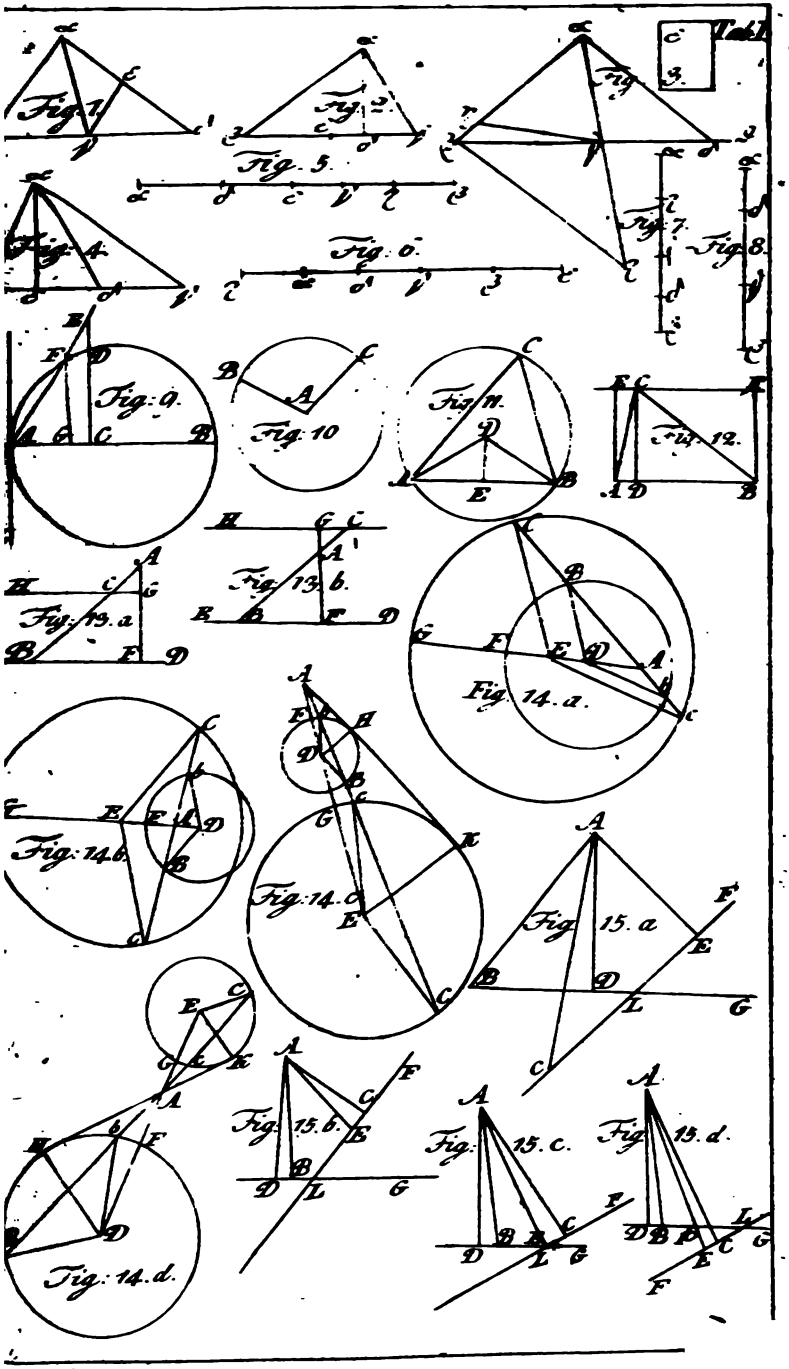
— 314 — 1 Fig. 65. c. lies Fig. 65. e.

— 333 — 10 den Punkt lies dem Punkt.

— — — 17 Lehnſaz lies Lehrſaz.

— 359 — 28 cb lies c, b.

Den S. 227 Linie 19 flg. und S. 231 Linie 22 flg. muß bemerkt werden, daß ſtatt der Fig. 54. c. vorkommenden kleinen punktirten Buchſtaben in dem gedruckten Text große Curſiv-Buchſtaben geſezt worden ſind.


Tab. I
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13. a
Fig. 13. b.
Fig. 14. a.
Fig. 14. b.
Fig. 14. c.
Fig. 14. d.
Fig. 15. a
Fig. 15. b.
Fig. 15. c.
Fig. 15. d.

S. 253 Linie 4 BG lies BG =

— 254 — 10 $\frac{a}{2}$ lies $\frac{a}{2}$

— 283 — 28 Punten lies Punkten.

— 299 — 16 Fall 3γ lies Fall 3, γ.

— 302 — 2 $(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\vartheta$ lies $(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\vartheta$ &c.

— — — 22 —: $2(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta)\ldots$
lies — $(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta)\ldots$

— 303 — 20. 21. 22. 23. e lies r.

— 304 — 23. 24. 25. 27. 30. e lies r.

— 305 — 1. 5. 10. 28. e lies r.

— 307 — 24 $\frac{\alpha^2 a^2}{(\alpha+\beta)^2}$ = lies $\frac{\alpha^2 a^2}{(\alpha+\beta)^2}$ —

— 308 — 12 sin. C. cosin. BCF lies = sin. C. cosin. BCF.

— 309 — 21. 22. e lies r.

— 310 — 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 10. 11. 12. 13. statt 6 lies σ.

— — — 15. 16 e lies r.

— 314 — 1 Fig. 65. c. lies Fig. 65. e.

— 333 — 10 den Punkt lies dem Punkt.

— — — 17 Lehnsaz lies Lehrsaz.

— 359 — 28 cb lies c, b.

Bey S. 227 Linie 19 flg. und S. 231 Linie 22 flg. muß bemerkt werden, daß statt der Fig. 54. c. vorkommenden kleinen punktirten Buchstaben in dem gedrukten Text große Cursiv-Buchstaben gesezt worden sind.

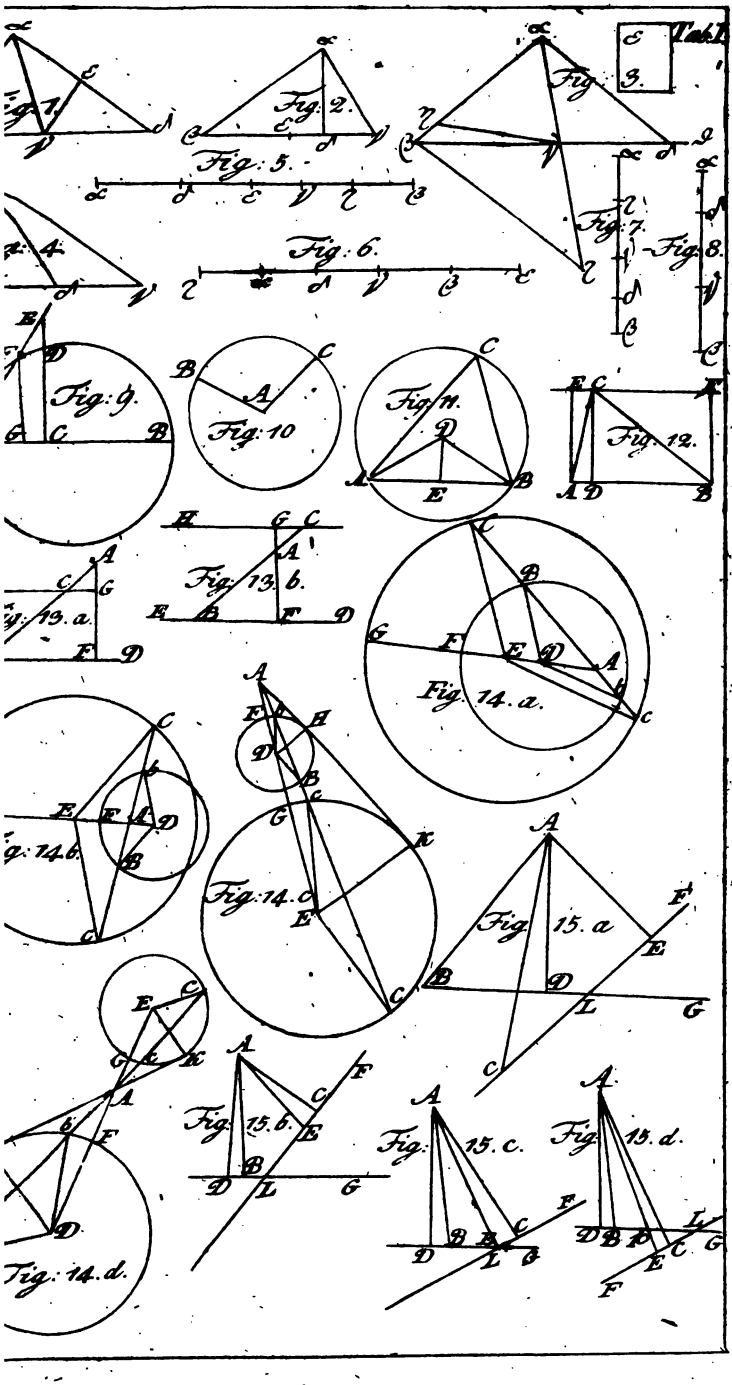


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13. a.
Fig. 13. b.
Fig. 14. a.
Fig. 14. b.
Fig. 14. c.
Fig. 14. d.
Fig. 15. a
Fig. 15. b.
Fig. 15. c.
Fig. 15. d.

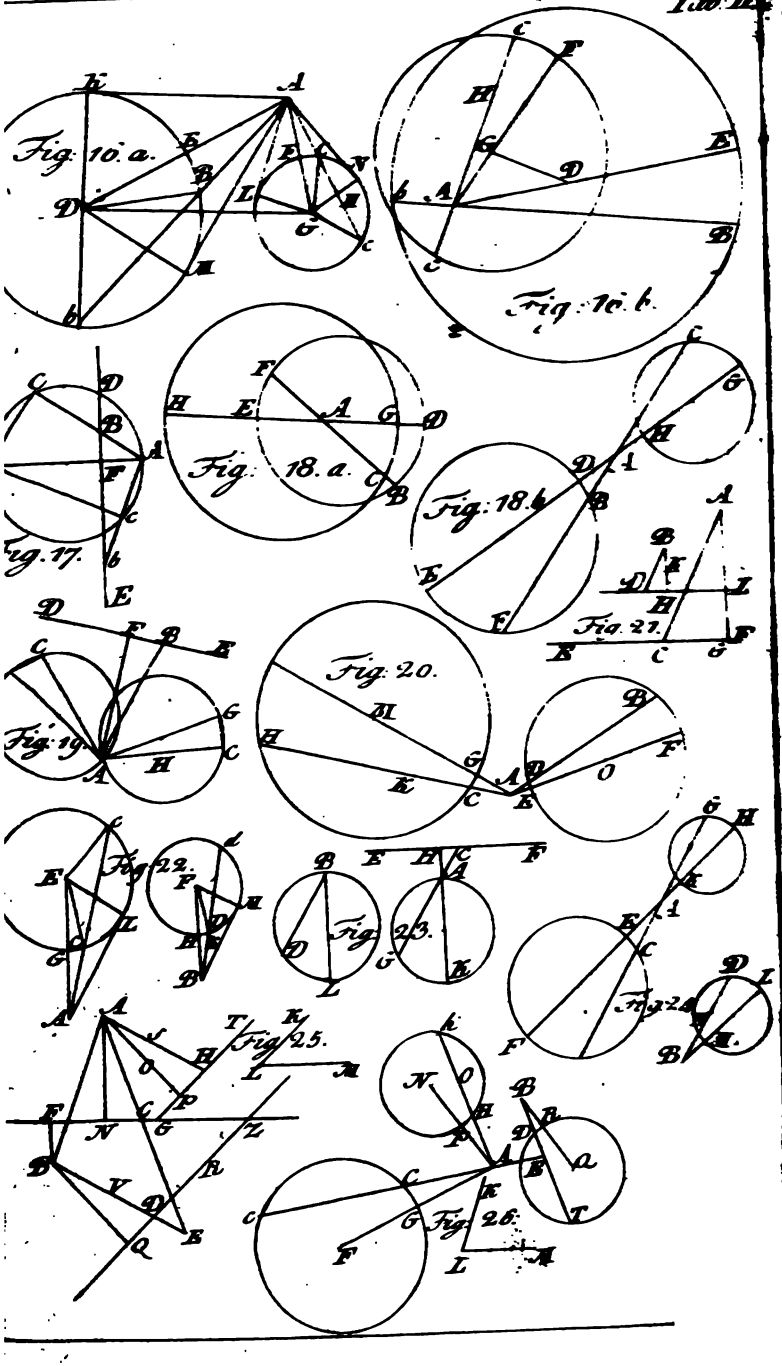


Fig. 16. a.
Fig. 16. b.
Fig. 17.
Fig. 18. a.
Fig. 18. b.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.

Tab. II.

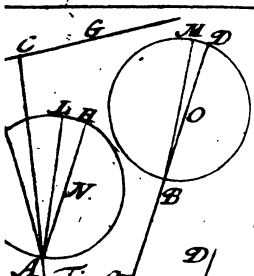


Fig. 27.

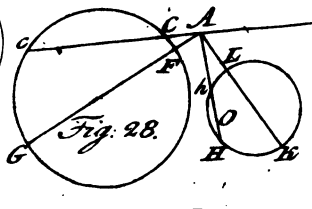
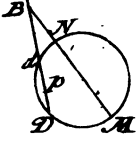


Fig. 28.



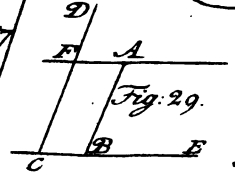


Fig. 29.

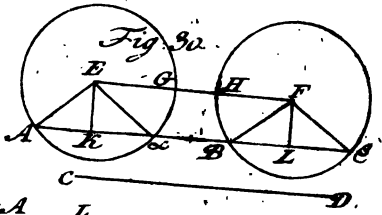


Fig. 30.

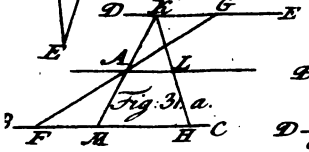


Fig. 31. a.

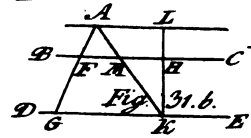


Fig. 31. b.

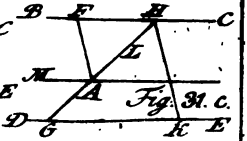


Fig. 31. c.

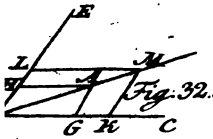


Fig. 32. a.

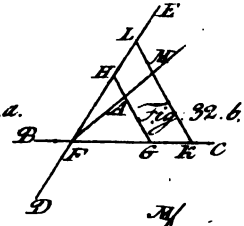


Fig. 32. b.

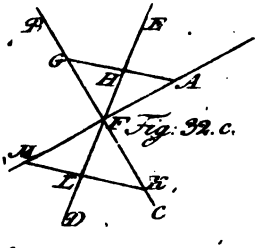


Fig. 32. c.

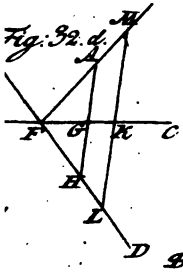


Fig. 32. d.

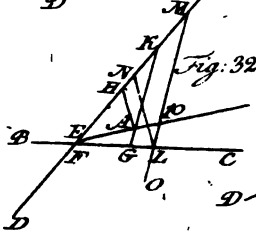


Fig. 32. e.

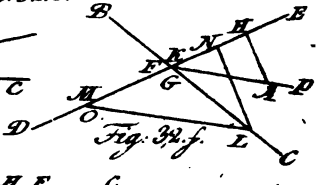


Fig. 32. f.

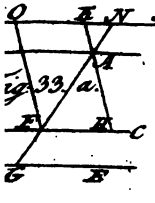


Fig. 33. a.

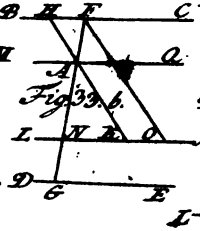


Fig. 33. b.

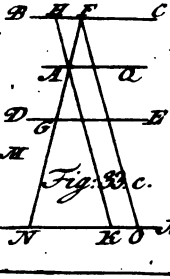


Fig. 33. c.

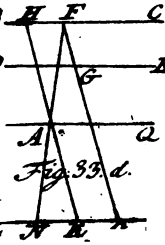


Fig. 33. d.

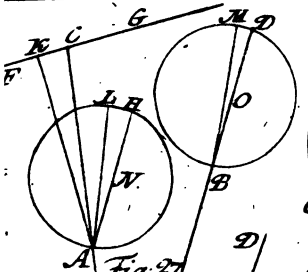


Fig. 27.

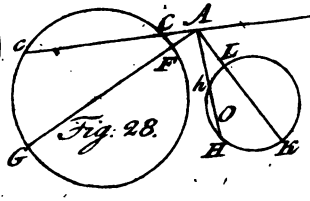


Fig. 28.

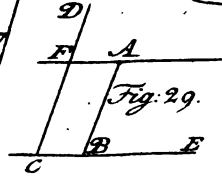


Fig. 29.

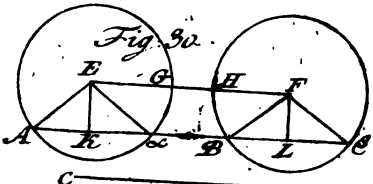
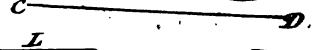


Fig. 30.



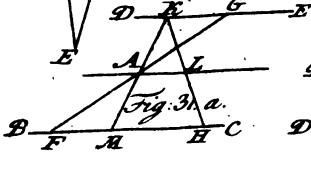


Fig. 31. a.

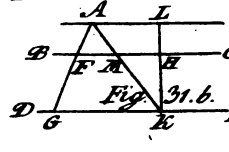


Fig. 31. b.

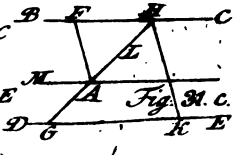


Fig. 31. c.

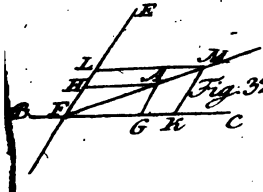


Fig. 32. a.

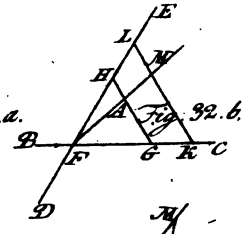


Fig. 32. b.

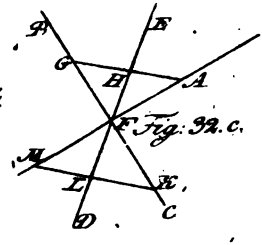


Fig. 32. c.

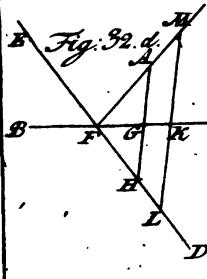


Fig. 32. d.

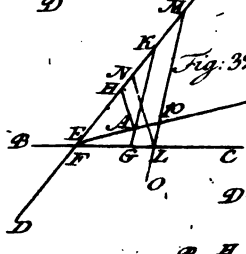


Fig. 32. e.

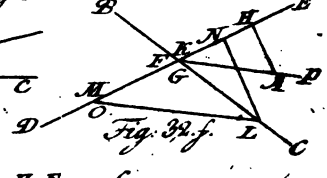


Fig. 32. f.

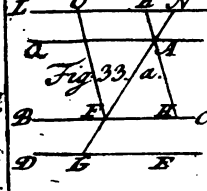


Fig. 33. a.

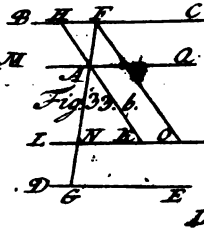


Fig. 33. b.

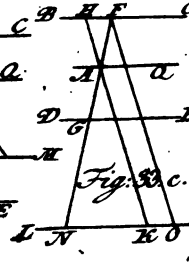


Fig. 33. c.

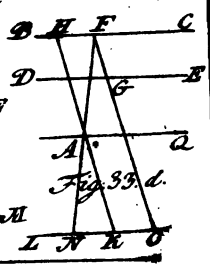
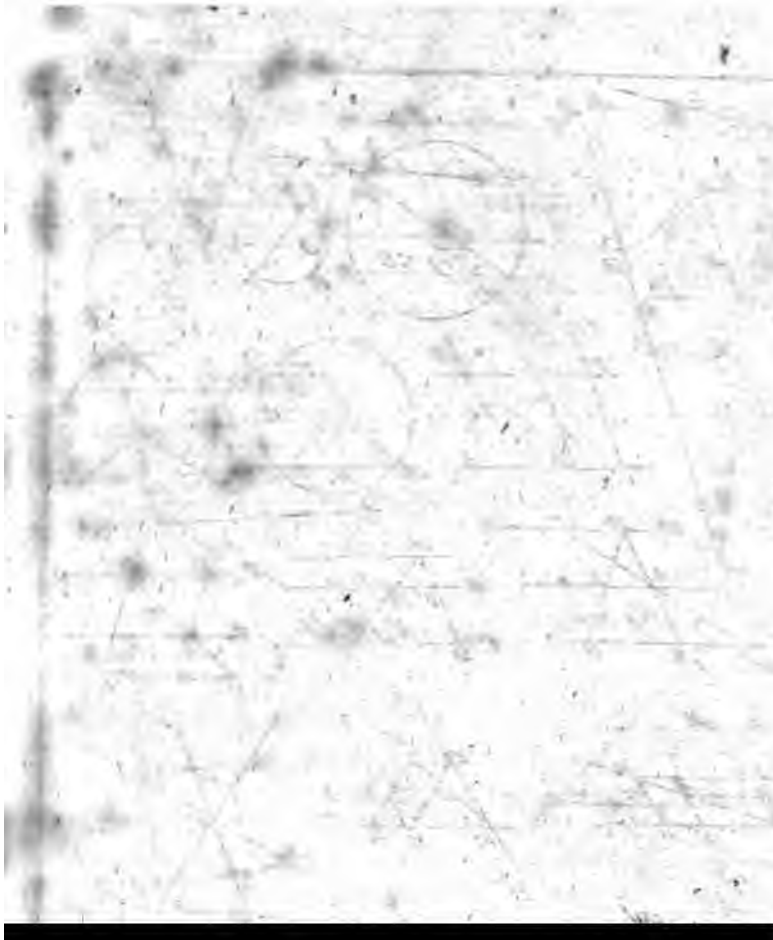


Fig. 33. d.



Tab. IV.

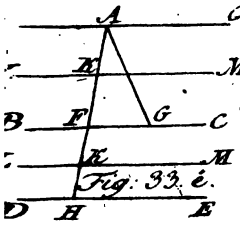


Fig. 33. e.

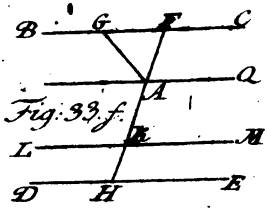


Fig. 33. f.

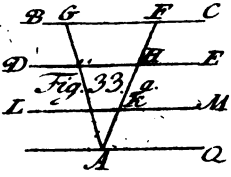


Fig. 33. g.

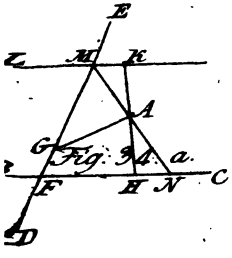


Fig. 34. a.

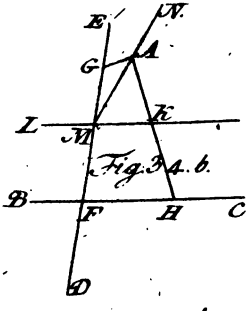


Fig. 34. b.

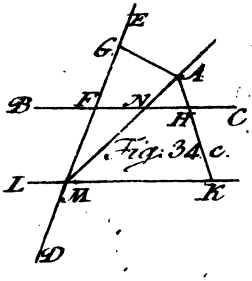


Fig. 34. c.

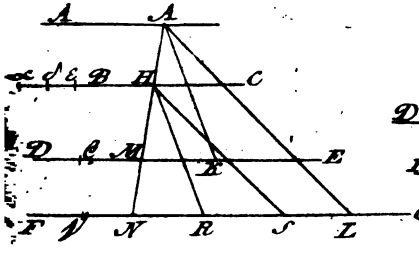


Fig. 35. a.

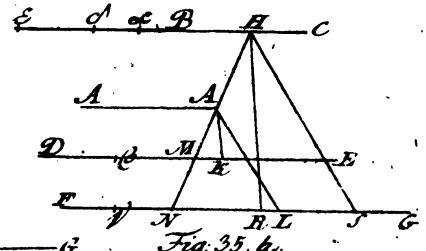
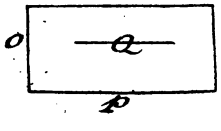
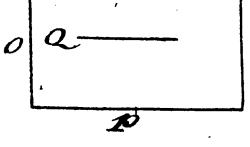


Fig. 35. b.





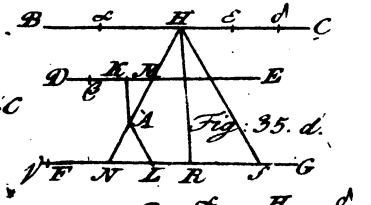


Fig. 35. d.

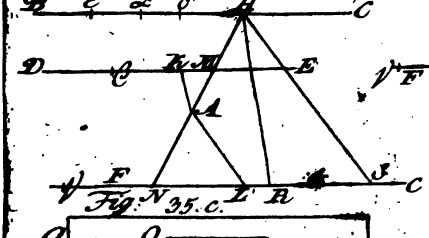


Fig. 35. c.

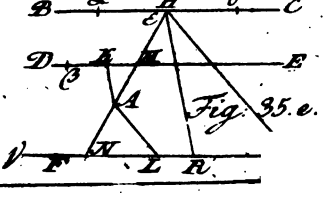
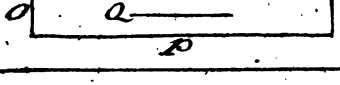


Fig. 35. e.



Tab. IV.

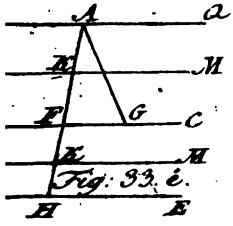


Fig. 33. e.

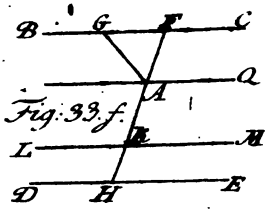


Fig. 33. f.

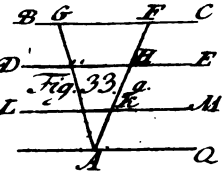


Fig. 33. g.

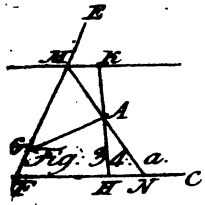


Fig. 34. a.

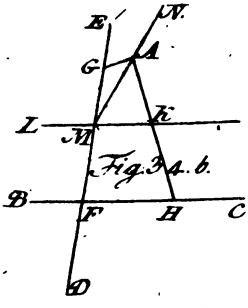


Fig. 34. b.

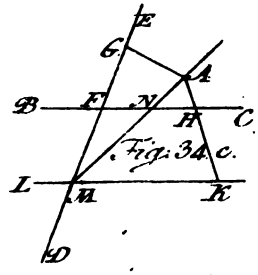


Fig. 34. c.

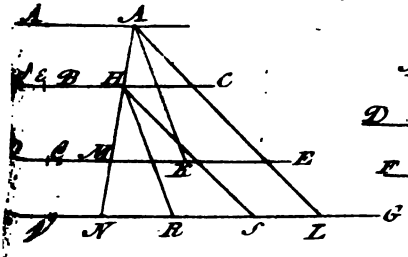


Fig. 35. a.

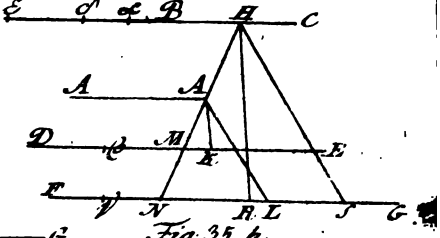
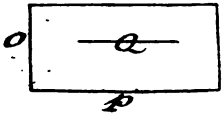
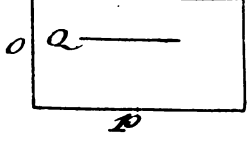


Fig. 35. b.





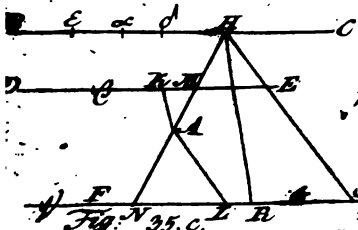


Fig. 35. c.

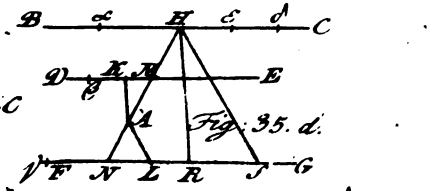


Fig. 35. d.

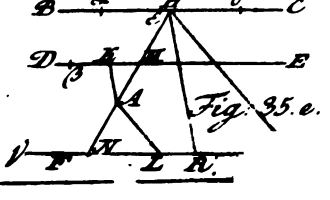
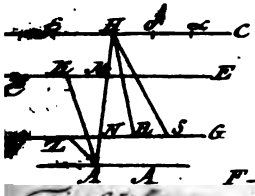
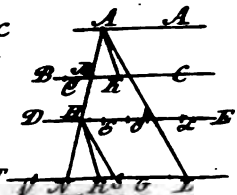


Fig. 35. e.

Tab. V.





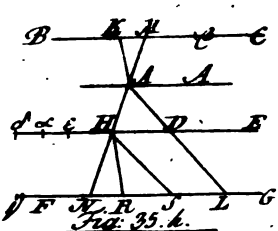


Fig. 35. f.

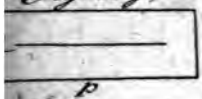


Fig. 35. g.

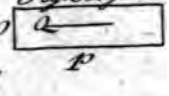


Fig. 35. h.

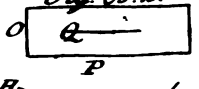


Fig. 36.

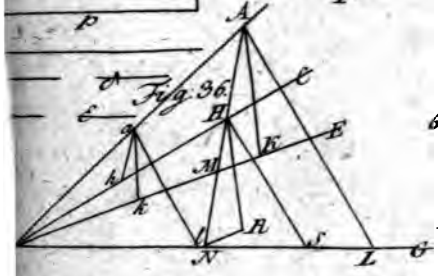


Fig. 37.

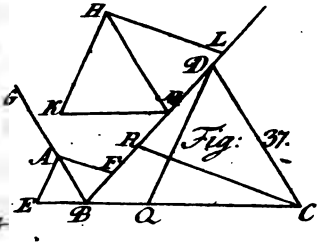


Fig. 38.

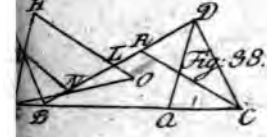


Fig. 39. a.

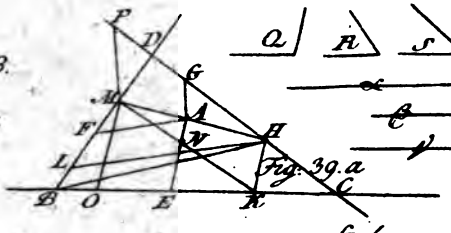


Fig. 39. b.

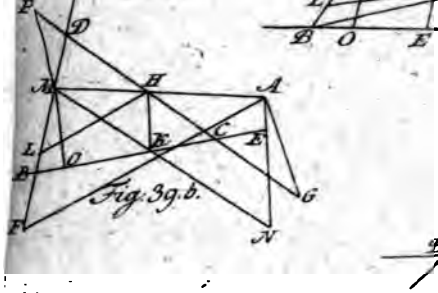


Fig. 39. c.

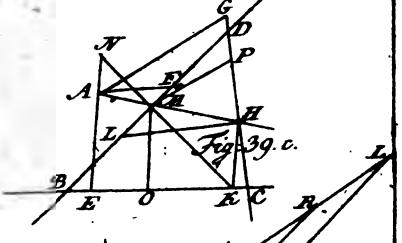


Fig. 39. d.

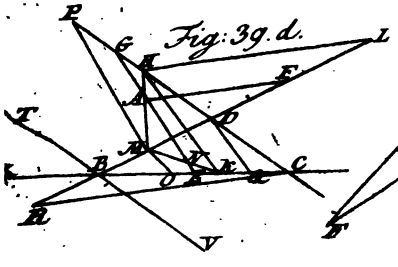
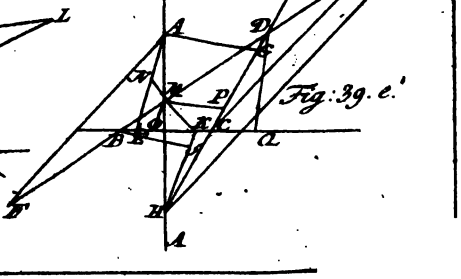
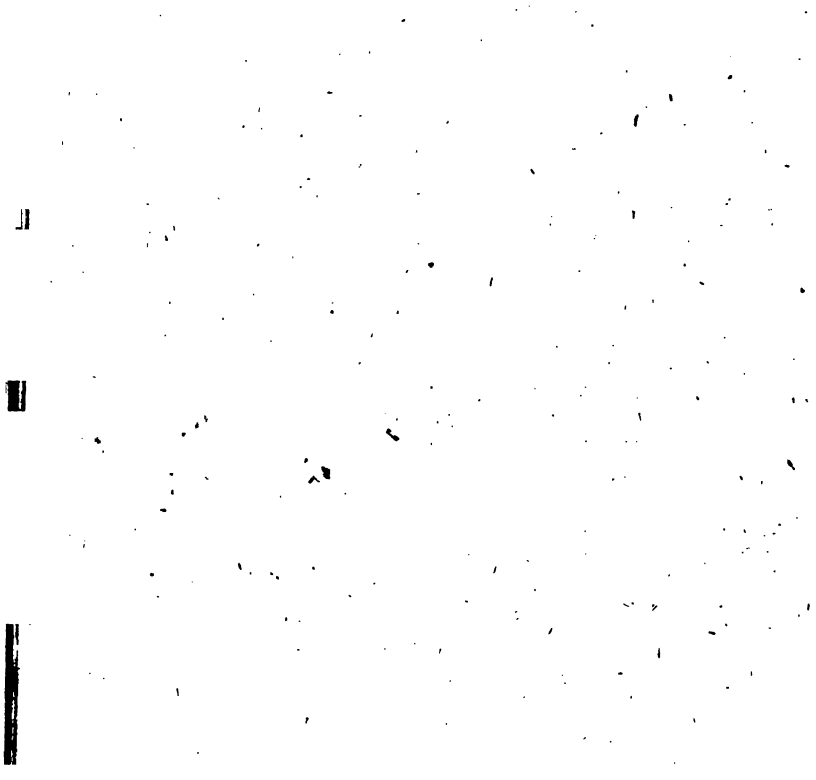


Fig. 39. e.





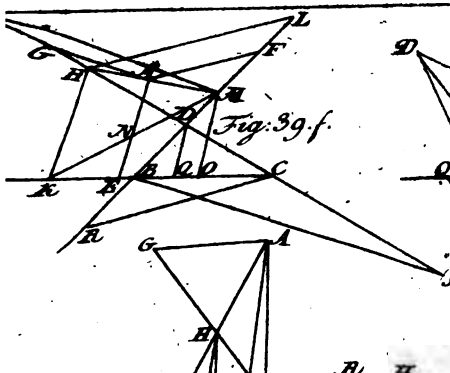


Fig. 39. f.

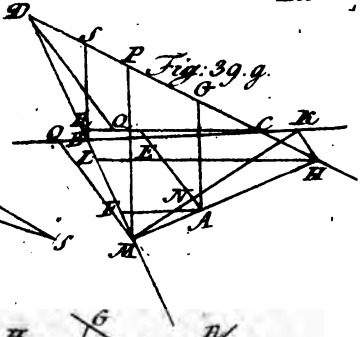


Fig. 39. g.

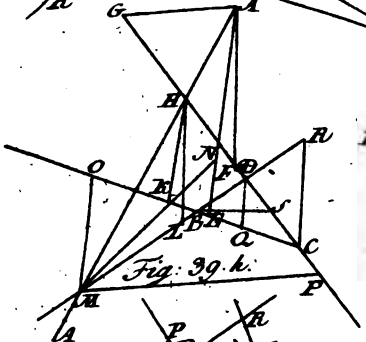


Fig. 39. k.

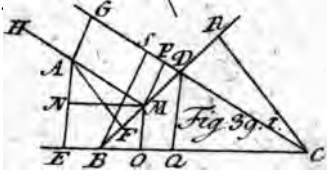


Fig. 39. l.

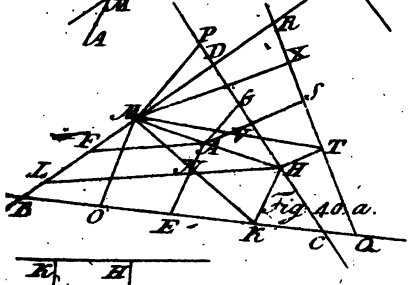


Fig. 40. a.

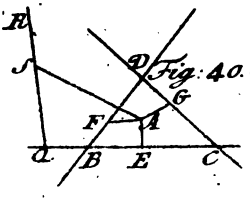


Fig. 40. b.

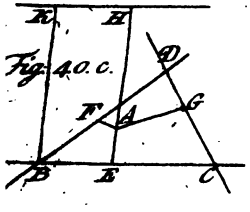


Fig. 40. c.

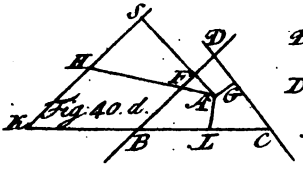


Fig. 40. d.

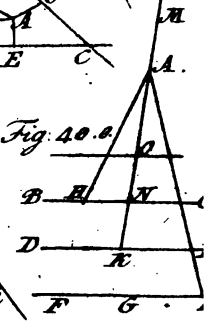


Fig. 40. e.

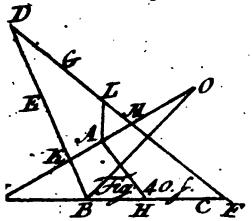


Fig. 40. f.

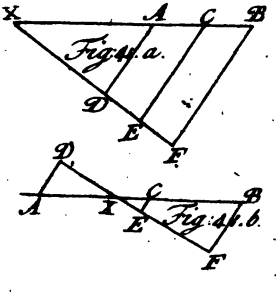


Fig. 41. a.

Fig. 41. b.

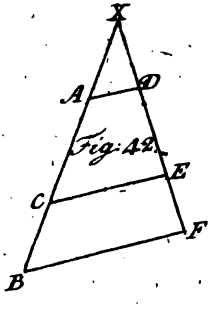
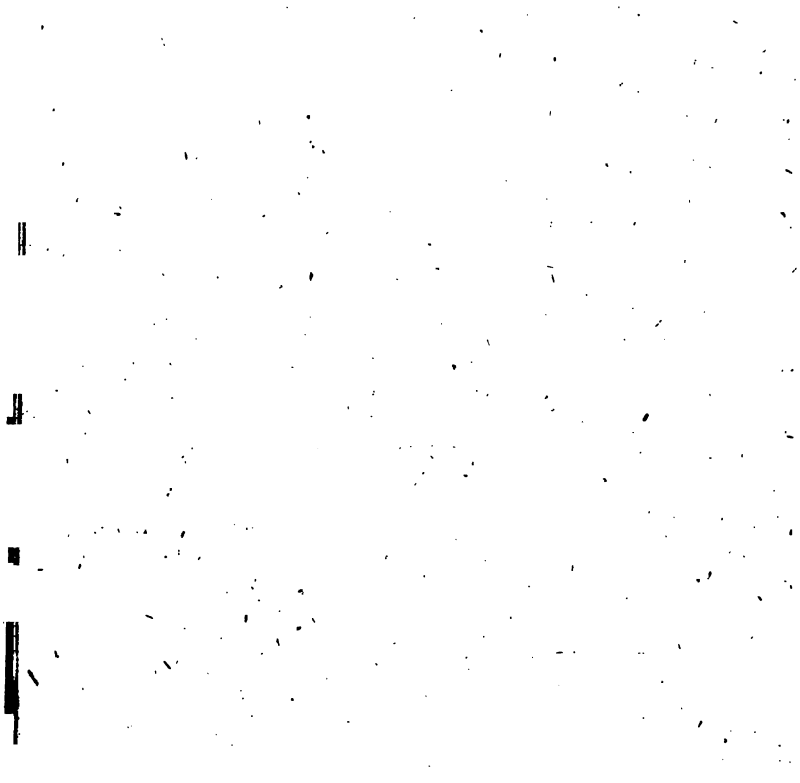


Fig. 42.



Tab. VII.

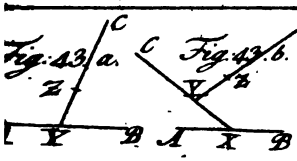


Fig. 43. a.
Fig. 43. b.

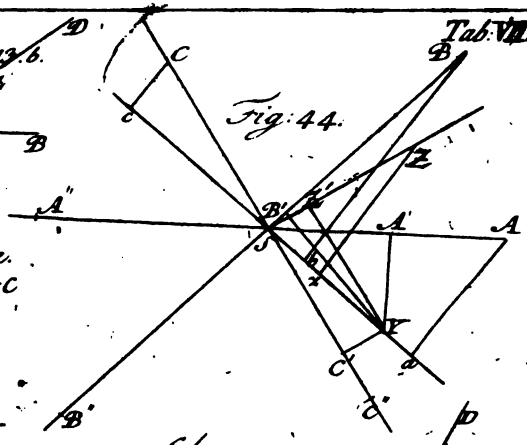


Fig. 44.

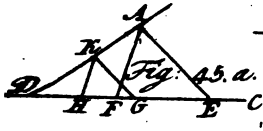


Fig. 45. a.

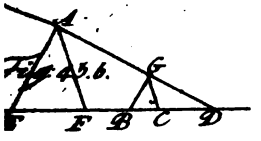


Fig. 45. b.

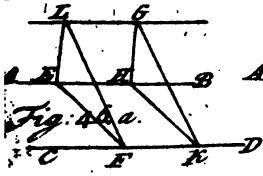


Fig. 46. a.

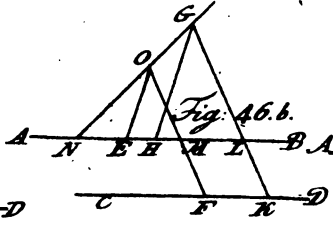


Fig. 46. b.

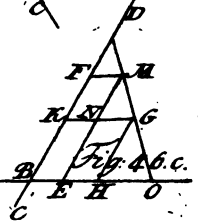


Fig. 46. c.

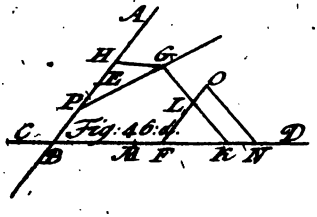


Fig. 46. d.

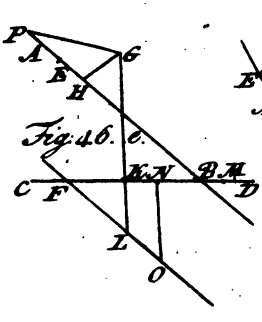


Fig. 46. e.

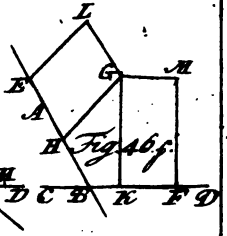


Fig. 46. f.

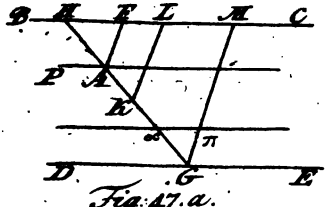
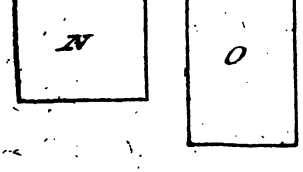


Fig. 47. a.


N
O

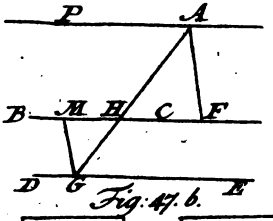
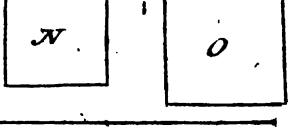


Fig. 47. b.


N
O

Tab. VII

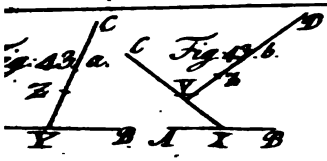


Fig. 43. a.

Fig. 43. b.

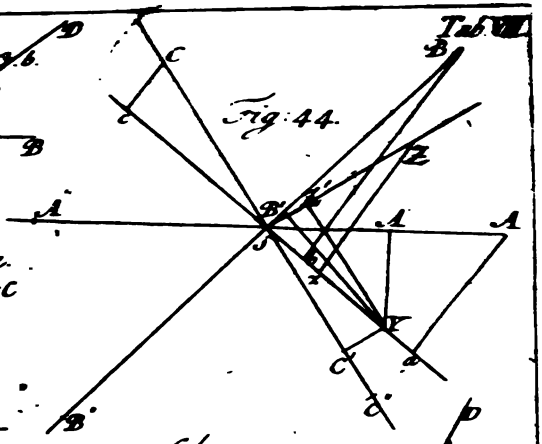


Fig. 44.

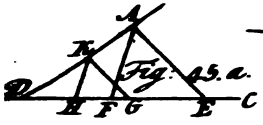


Fig. 45. a.

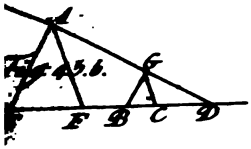


Fig. 45. b.

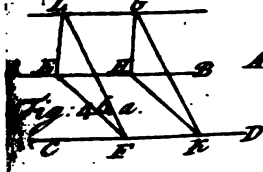


Fig. 46. a.

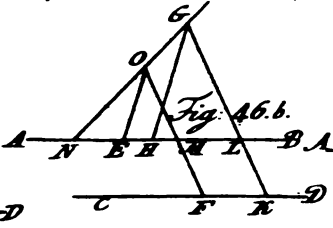


Fig. 46. b.

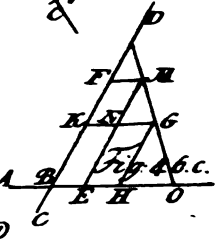


Fig. 46. c.

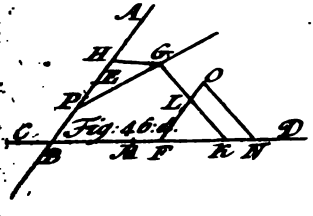


Fig. 46. d.

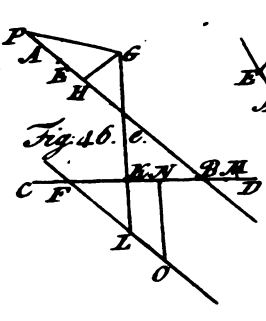


Fig. 46. e.

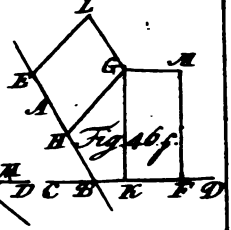


Fig. 46. f.

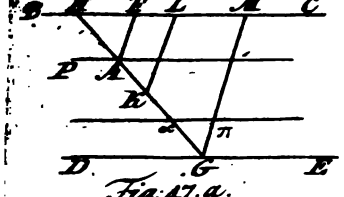
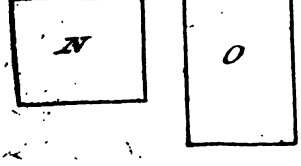


Fig. 47. a.



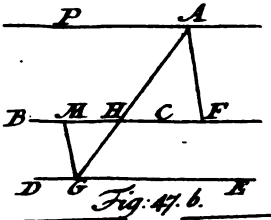
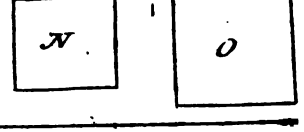
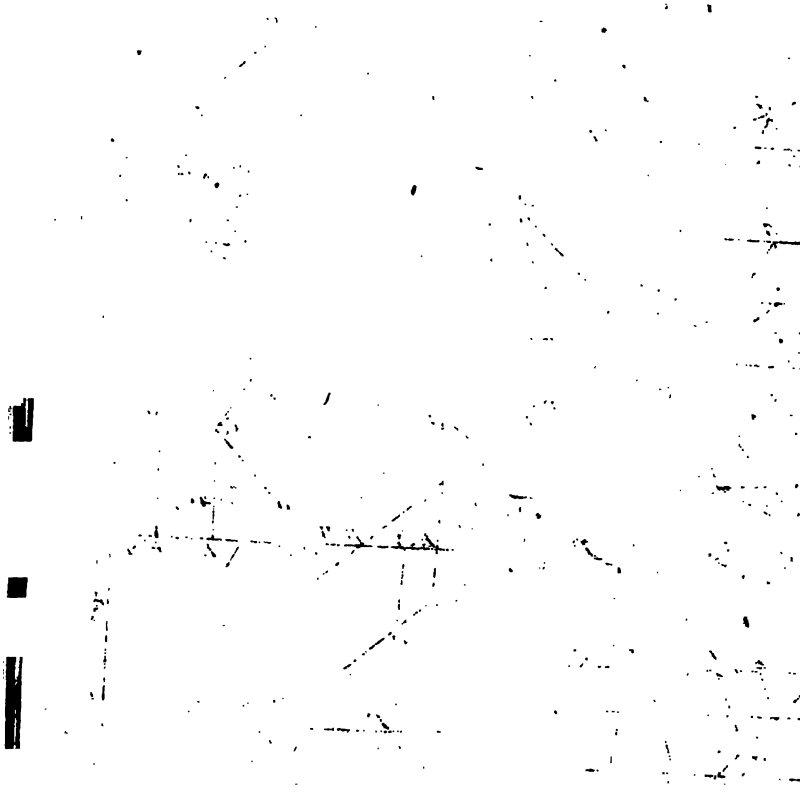


Fig. 47. b.





Tab. VIII.

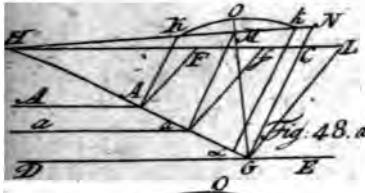


Fig. 48. a.

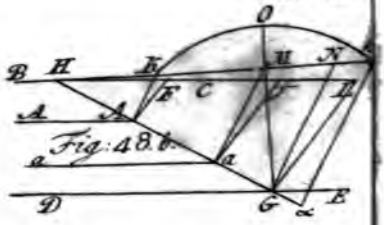


Fig. 48. b.

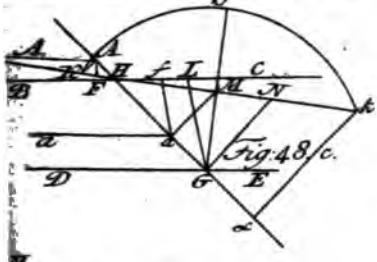


Fig. 48. c.

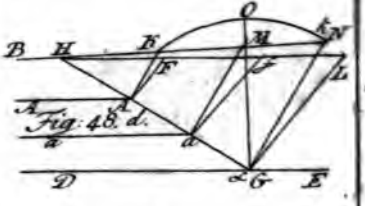


Fig. 48. d.

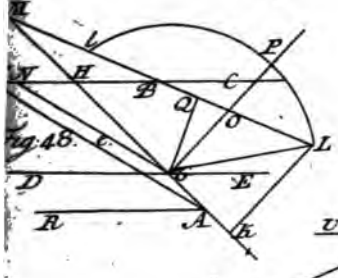


Fig. 48. e.

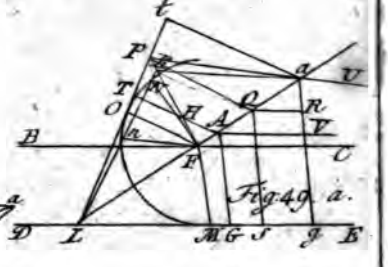


Fig. 49. a.

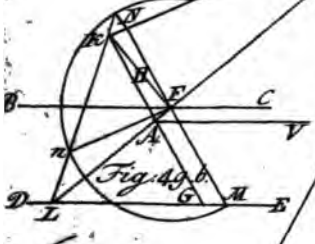


Fig. 49. b.

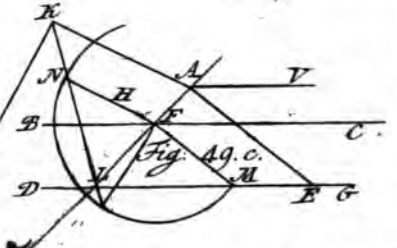


Fig. 49. c.

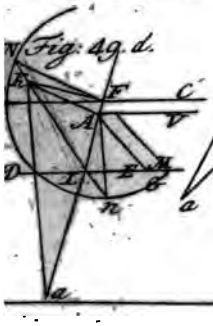


Fig. 49. d.

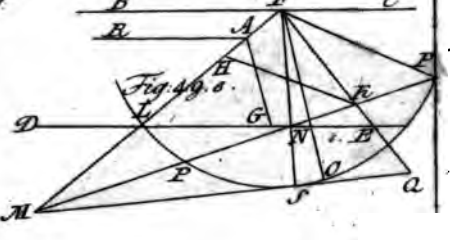
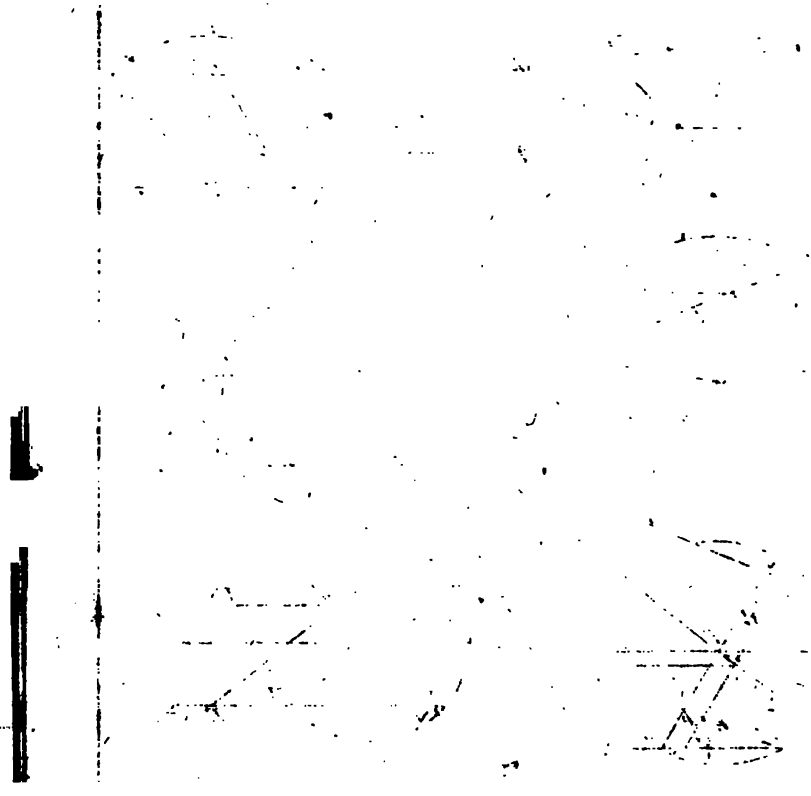


Fig. 49. e.



Tab. IX.

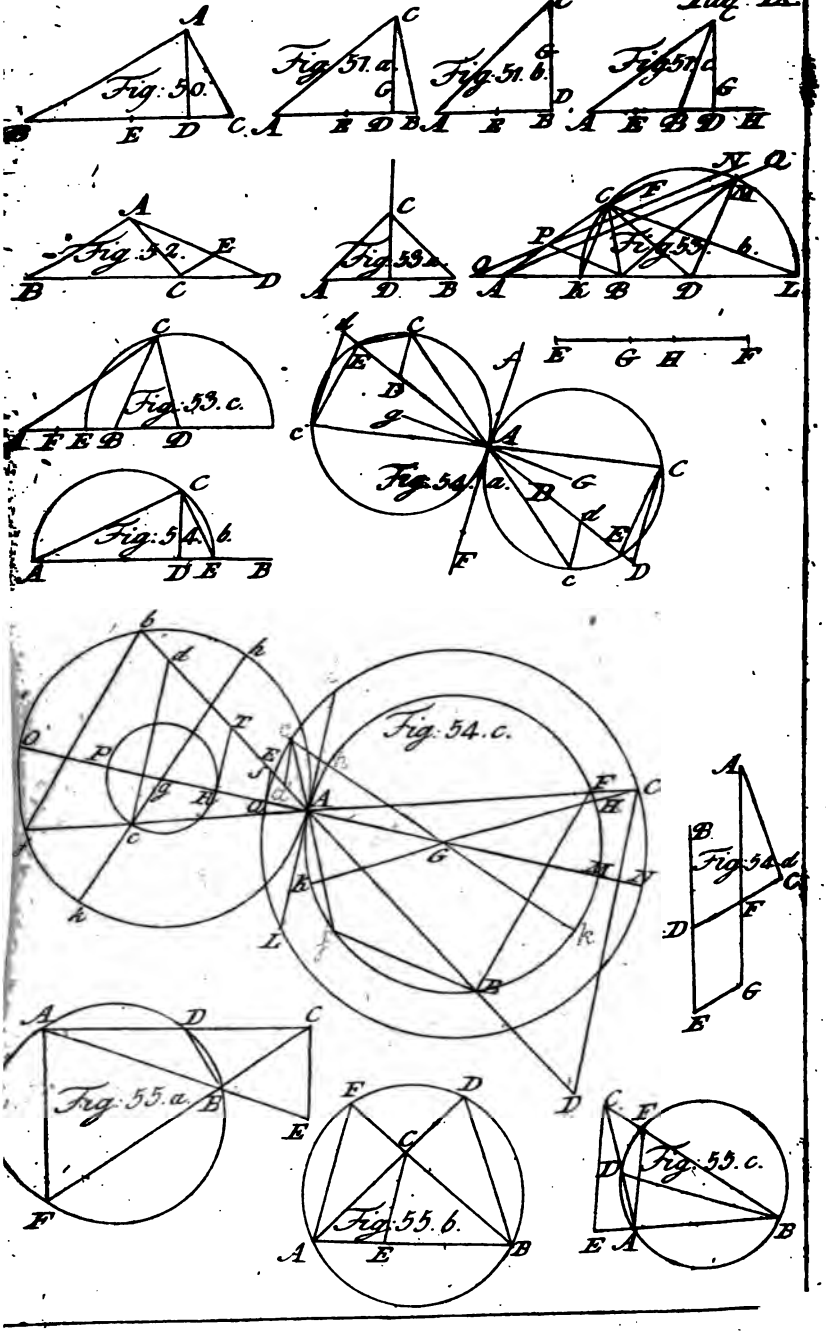
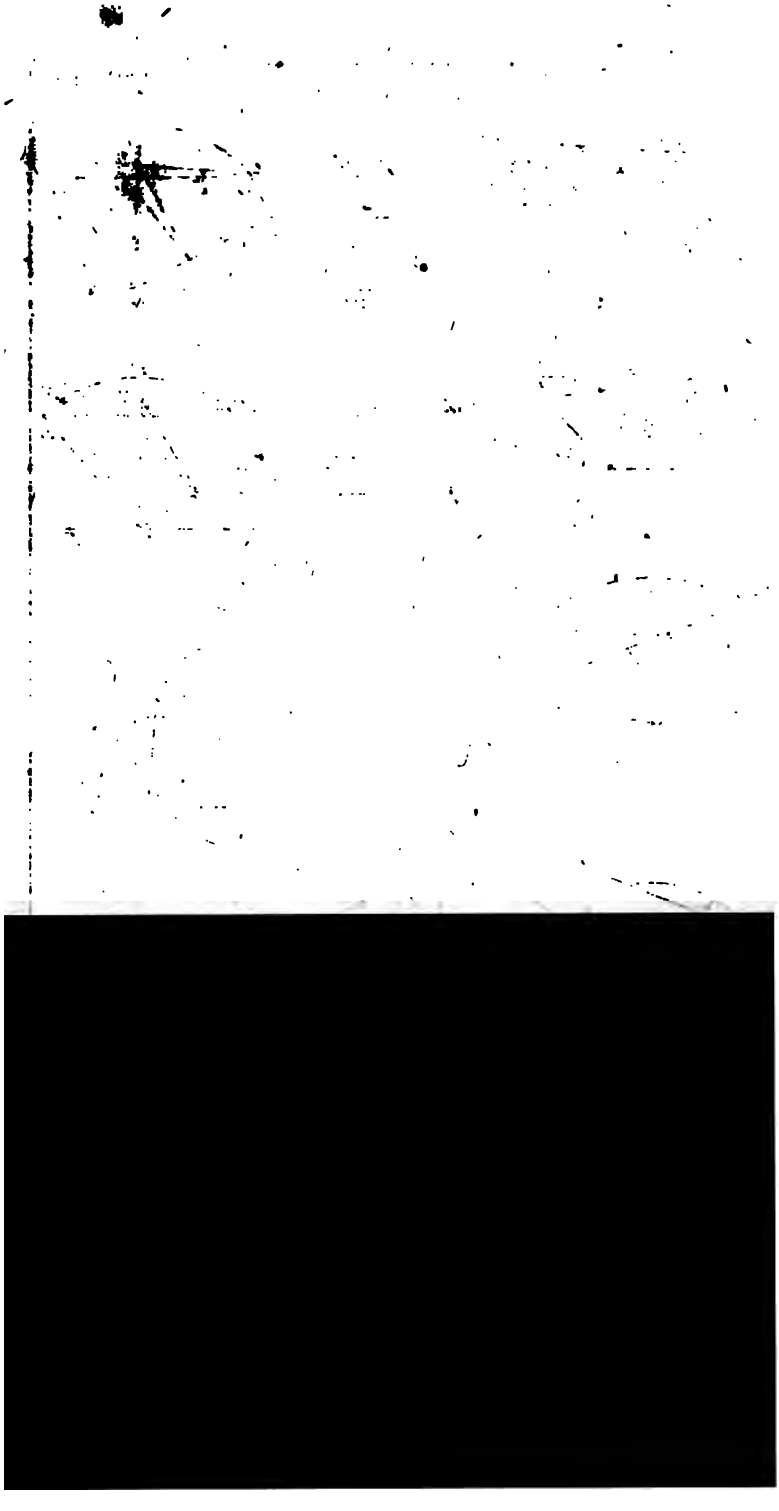
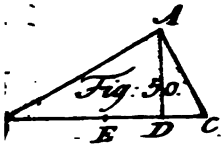
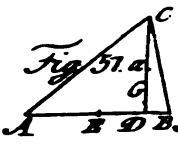
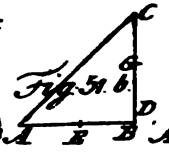


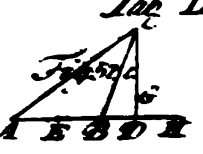
Fig. 50.
Fig. 51. a.
Fig. 51. b.
Fig. 51. c.
Fig. 52.
Fig. 53.
Fig. 53. a.
Fig. 53. b.
Fig. 53. c.
Fig. 54.
Fig. 54. a.
Fig. 54. b.
Fig. 54. c.
Fig. 54. d.
Fig. 55. a.
Fig. 55. b.
Fig. 55. c.

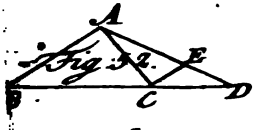


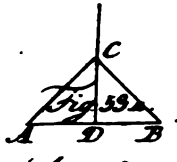

A
Fig. 50.
E D C


C
Fig. 51. a.
G
A E D B


C
Fig. 51. b.
G
D
A E B


C
Fig. 51. c.
G
A E B D


A
Fig. 52.
E
C D


C
Fig. 53. a.
A D B

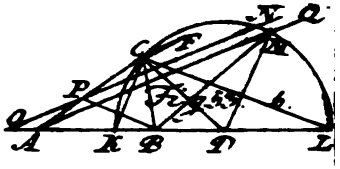
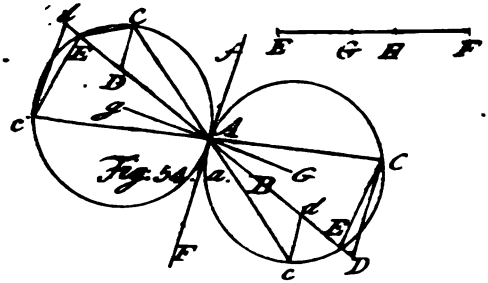


Fig. 53. b.
A X B D L

C
Fig. 53. c.
F E B D

C
Fig. 54. b.
D E B


E F G H
Fig. 54. a.

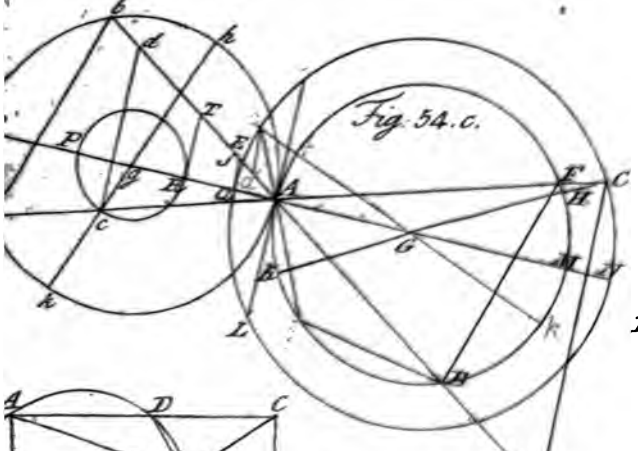


Fig. 54. c.

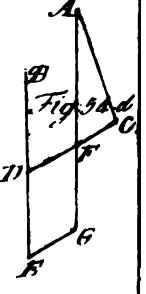


Fig. 54. d.

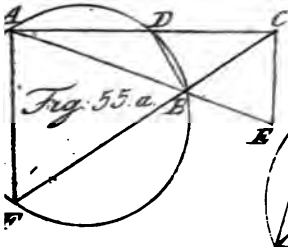


Fig. 55. a.

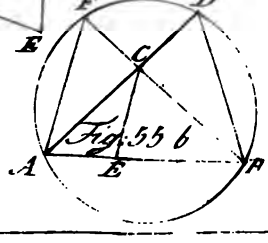


Fig. 55. b.

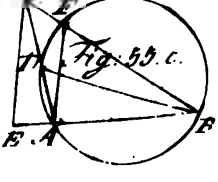


Fig. 55. c.

Tab. X.

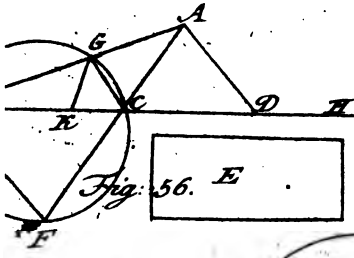


Fig. 56.

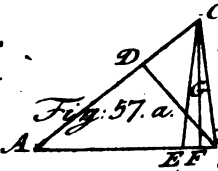


Fig. 57. a.

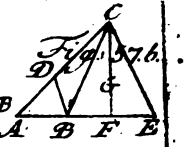


Fig. 57. b.

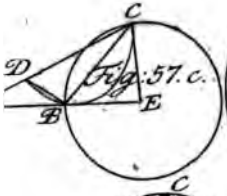


Fig. 57. c.

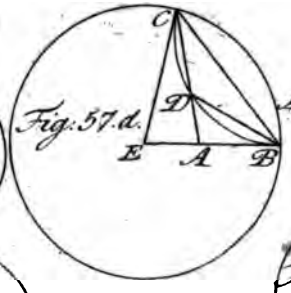


Fig. 57. d.

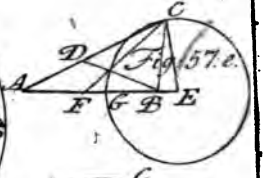


Fig. 57. e.

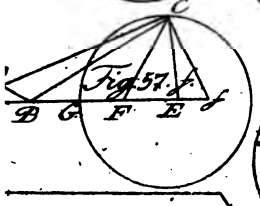


Fig. 57. f.

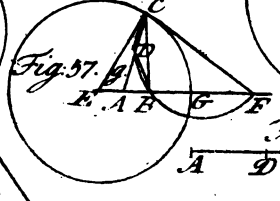


Fig. 57.

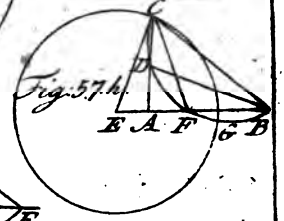


Fig. 57. h.

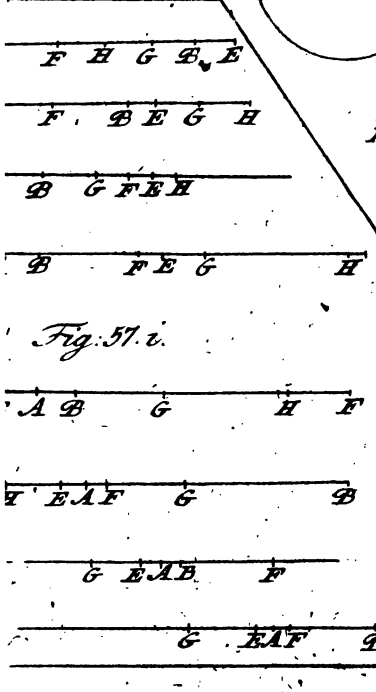


Fig. 57. i.

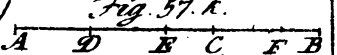


Fig. 57. k.

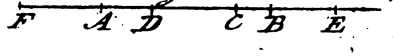


Fig. 57. l.

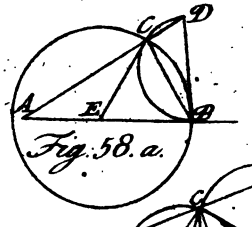


Fig. 58. a.

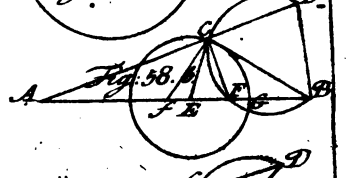


Fig. 58. b.

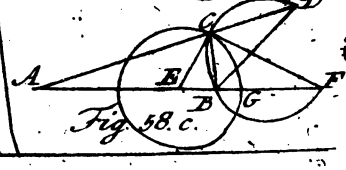
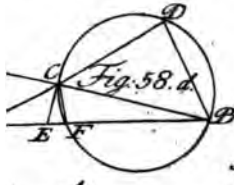
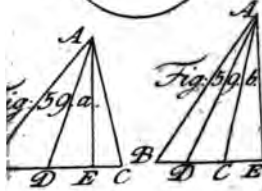


Fig. 58. c.

Tab. XI.


D
C
Fig. 58. d.
E F B


A
Fig. 59. a.
D E C
A
Fig. 59. b.
B
D C E

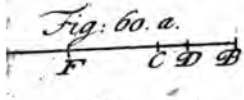
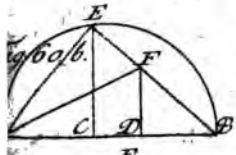
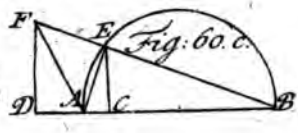
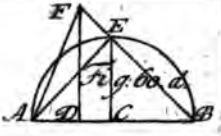
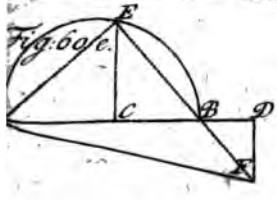


Fig. 60. a.
F C D B


E
Fig. 60. b.
F
C D B


F
E
Fig. 60. c.
D A C B


F
E
Fig. 60. d.
A D C B


E
Fig. 60. e.
C B D
F

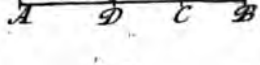
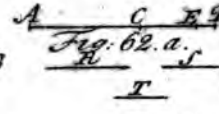
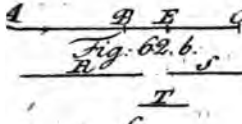
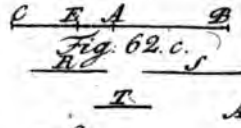
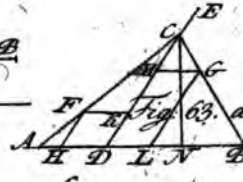


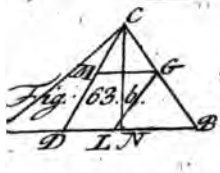
Fig. 61.
A D C B

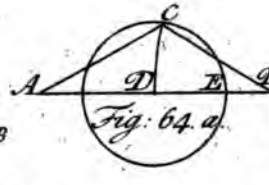

A C E B
Fig. 62. a.
R S
T


A B E C
Fig. 62. b.
R S
T

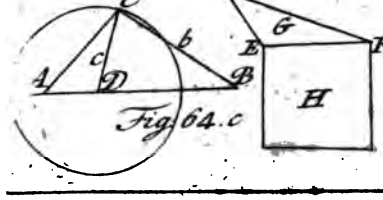

C E A B
Fig. 62. c.
R S
T

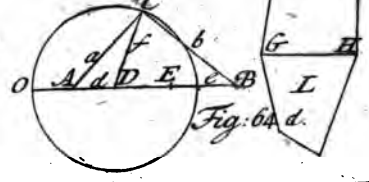

C
E
G
F
E
Fig. 63. a.
A H D L N B

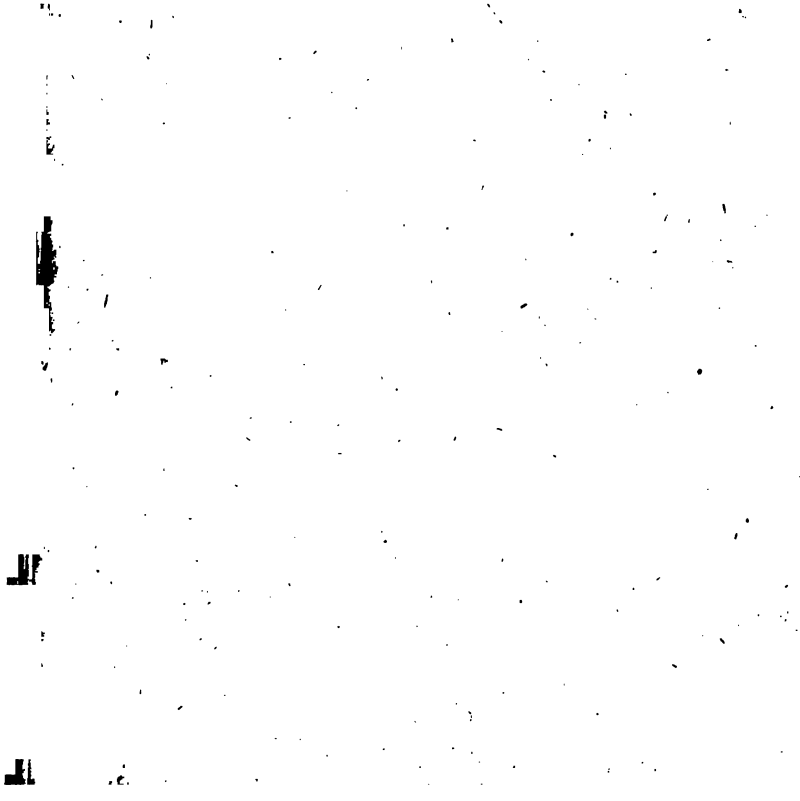

C
G
Fig. 63. b.
D L N B


C
A D E B
Fig. 64. a.

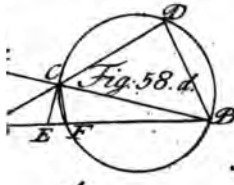
C
A D B E
Fig. 64. b.

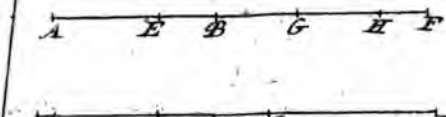

C
b
c
A D B
Fig. 64. c
G
E F
H


C
a
f
b
o A d D E c B
Fig. 64. d.
K
G H
L



Tab. XI.





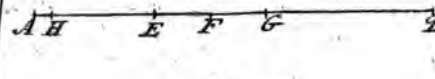
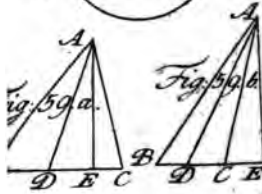
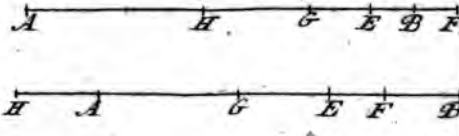
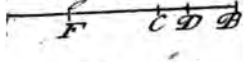
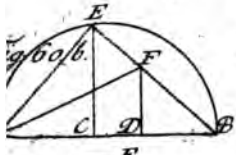


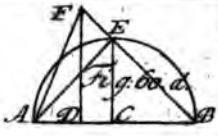
Fig. 58. e.

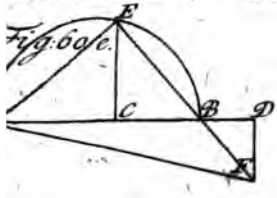


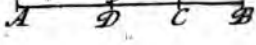


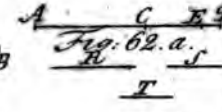


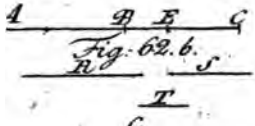


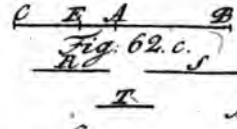


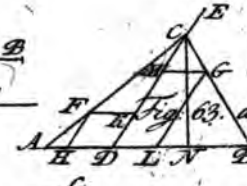


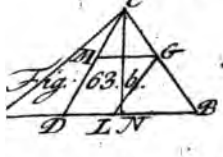


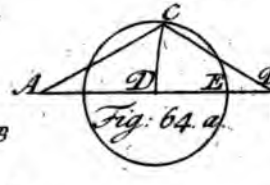


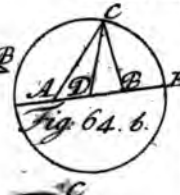


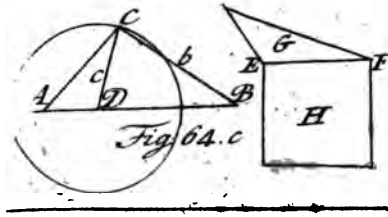


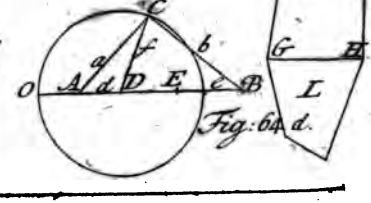












Tab. IX.

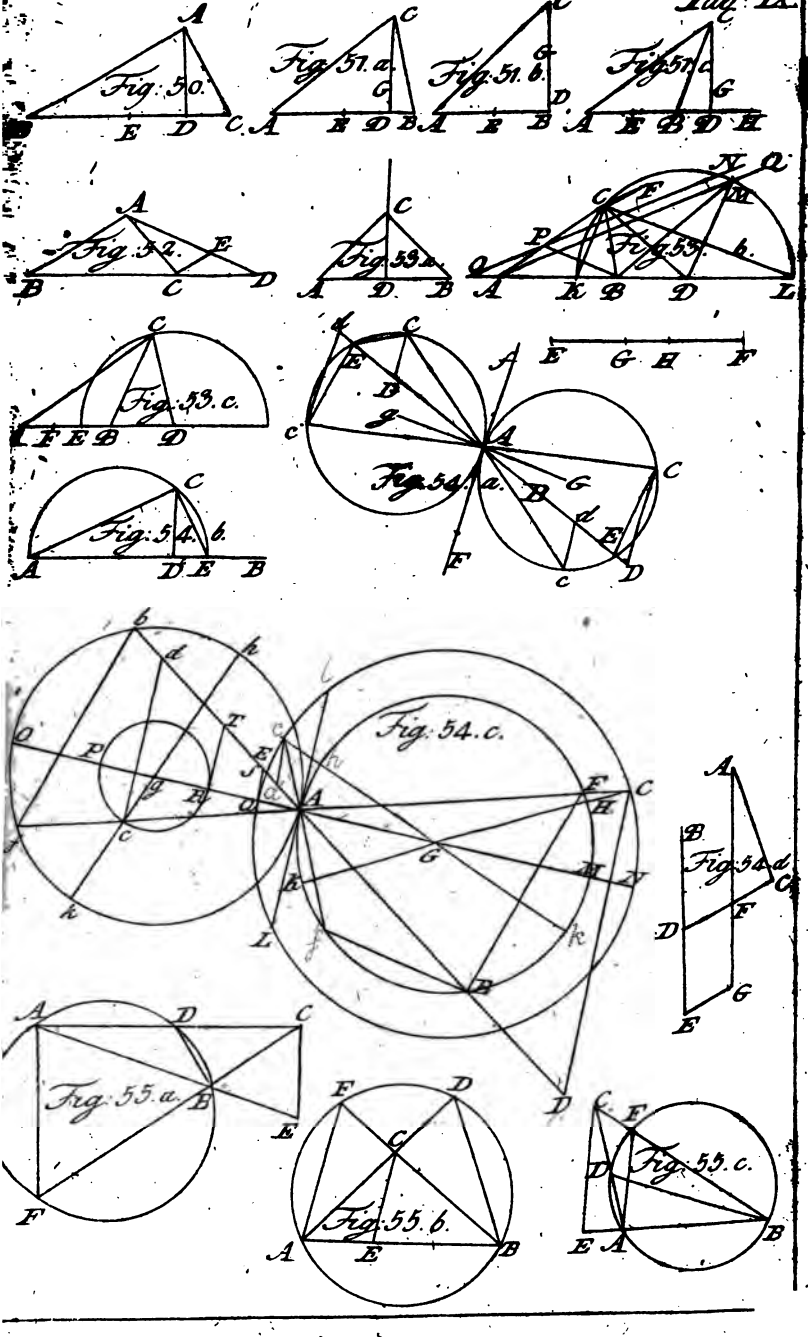


Fig. 50.
Fig. 51. a.
Fig. 51. b.
Fig. 51. c.
Fig. 52.
Fig. 53. a.
Fig. 53. b.
Fig. 53. c.
Fig. 54. a.
Fig. 54. b.
Fig. 54. c.
Fig. 54. d.
Fig. 55. a.
Fig. 55. b.
Fig. 55. c.

Tab. IX.

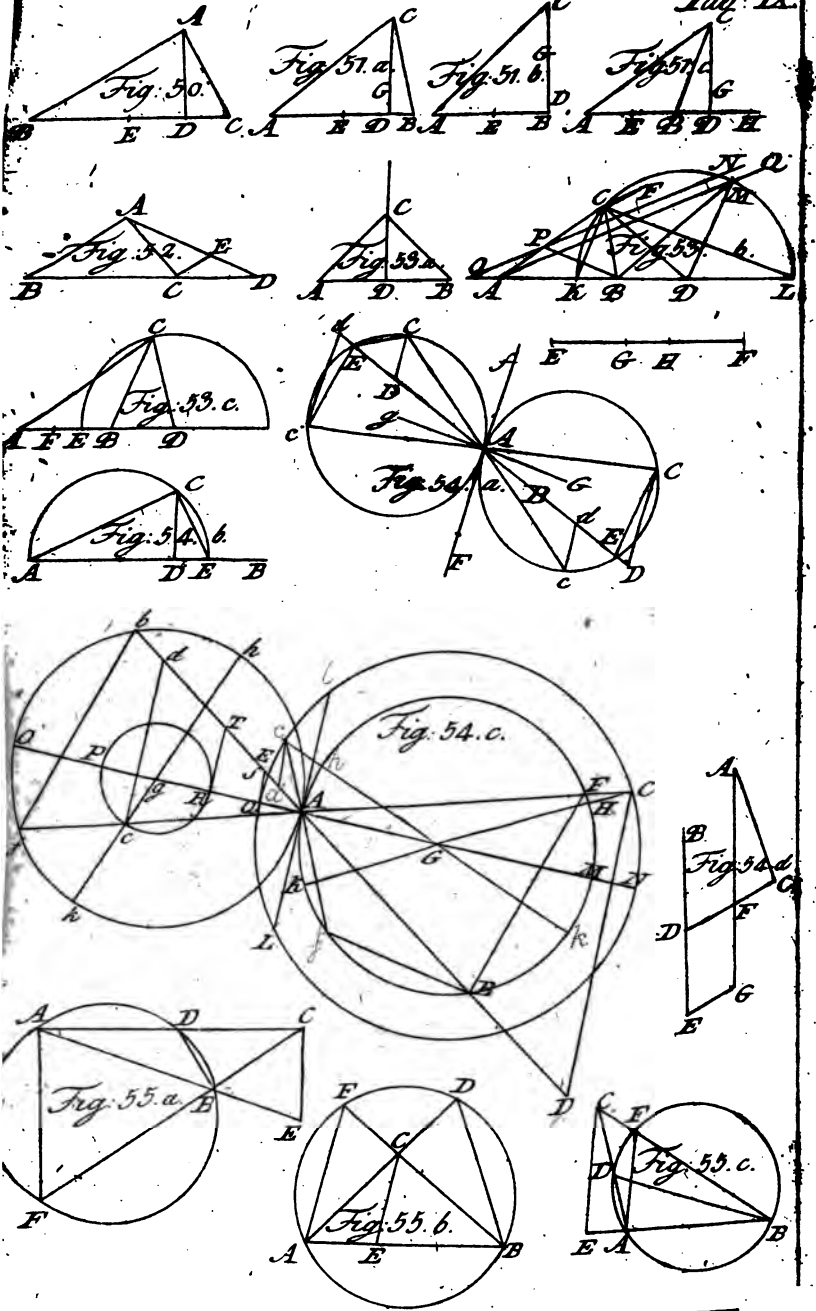


Fig. 50.
Fig. 51. a.
Fig. 51. b.
Fig. 51. c.
Fig. 52.
Fig. 53. a.
Fig. 53. b.
Fig. 53. c.
Fig. 54. a.
Fig. 54. b.
Fig. 54. c.
Fig. 54. d.
Fig. 55. a.
Fig. 55. b.
Fig. 55. c.

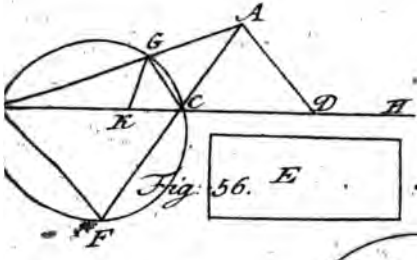


Fig. 56.

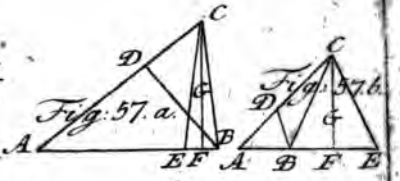


Fig. 57. a. Fig. 57. b.

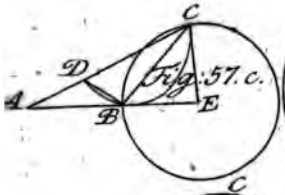


Fig. 57. c.

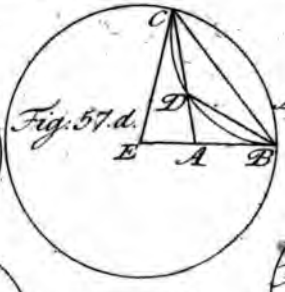


Fig. 57. d.

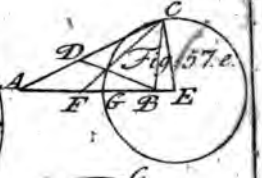


Fig. 57. e.

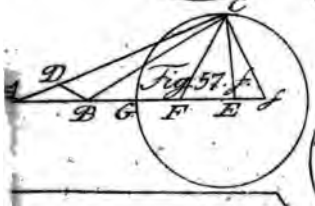


Fig. 57. f.

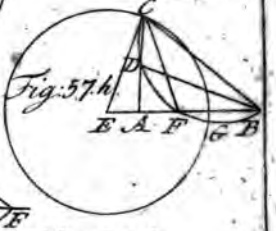


Fig. 57. h.

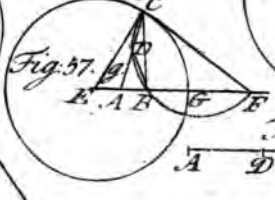


Fig. 57. g.

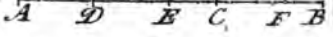


Fig. 57. k.

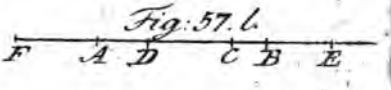


Fig. 57. l.

Fig. 57. i.

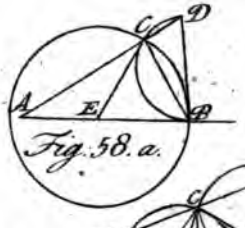


Fig. 58. a.

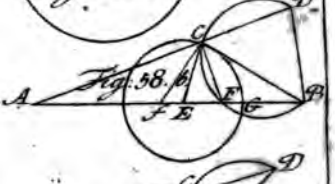


Fig. 58. b.

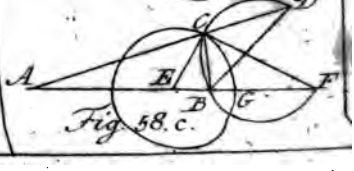


Fig. 58. c.

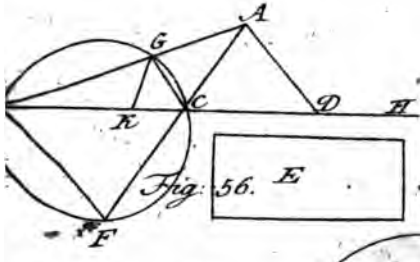


Fig. 56.

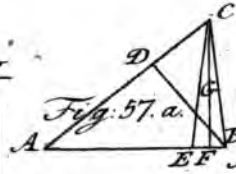


Fig. 57. a.

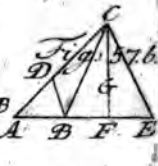


Fig. 57. b.

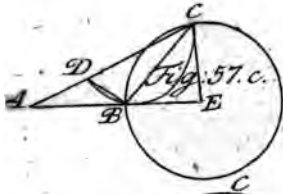


Fig. 57. c.

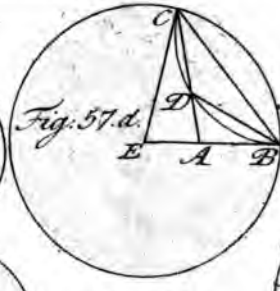


Fig. 57. d.

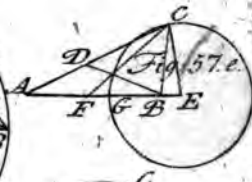


Fig. 57. e.

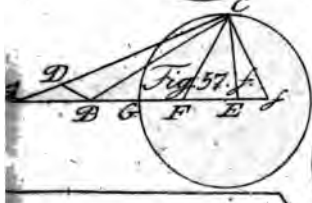


Fig. 57. f.

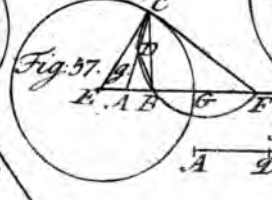


Fig. 57. g.

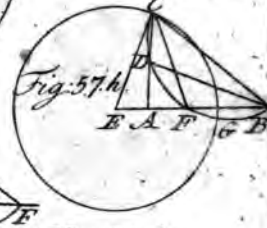


Fig. 57. h.

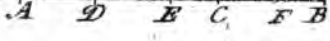


Fig. 57. k.

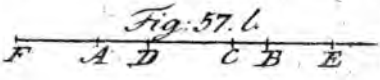


Fig. 57. l.

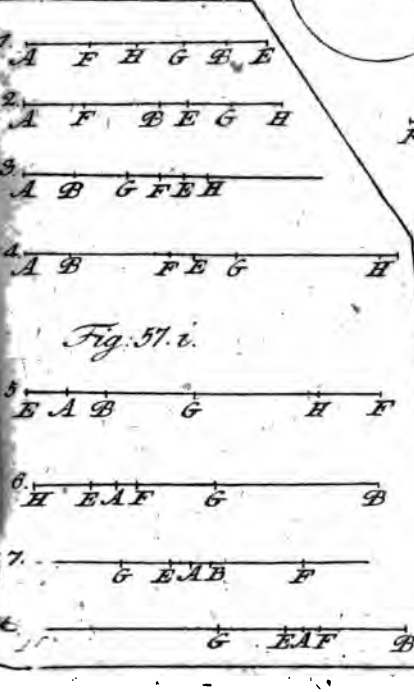


Fig. 57. i.

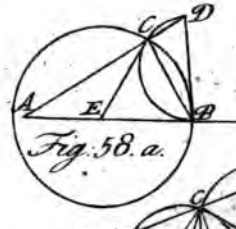


Fig. 58. a.

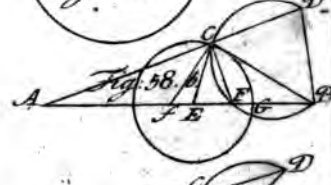


Fig. 58. b.

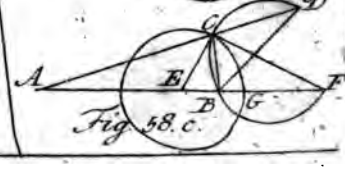
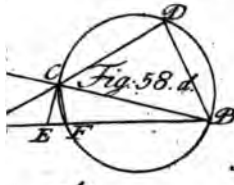
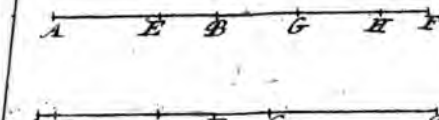


Fig. 58. c.

Tab. XI.





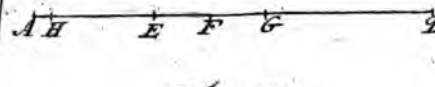
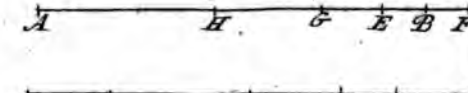
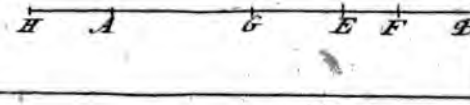
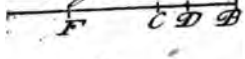
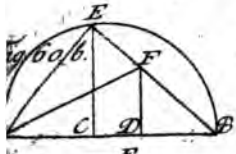


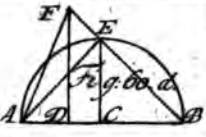
Fig. 58. e.

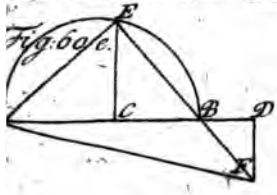


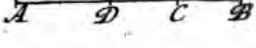


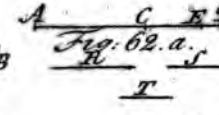


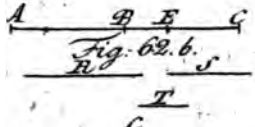


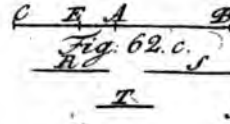


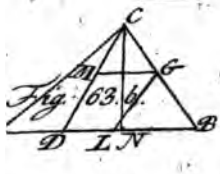


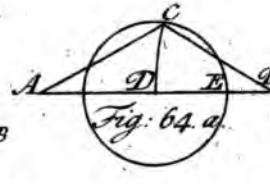


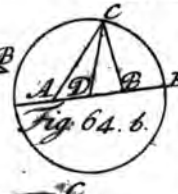


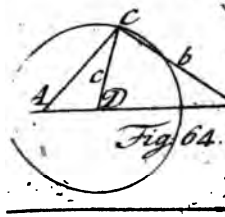


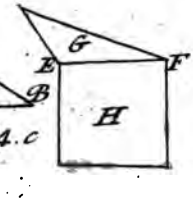


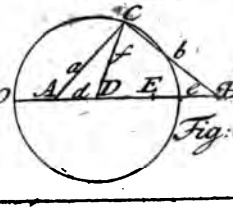


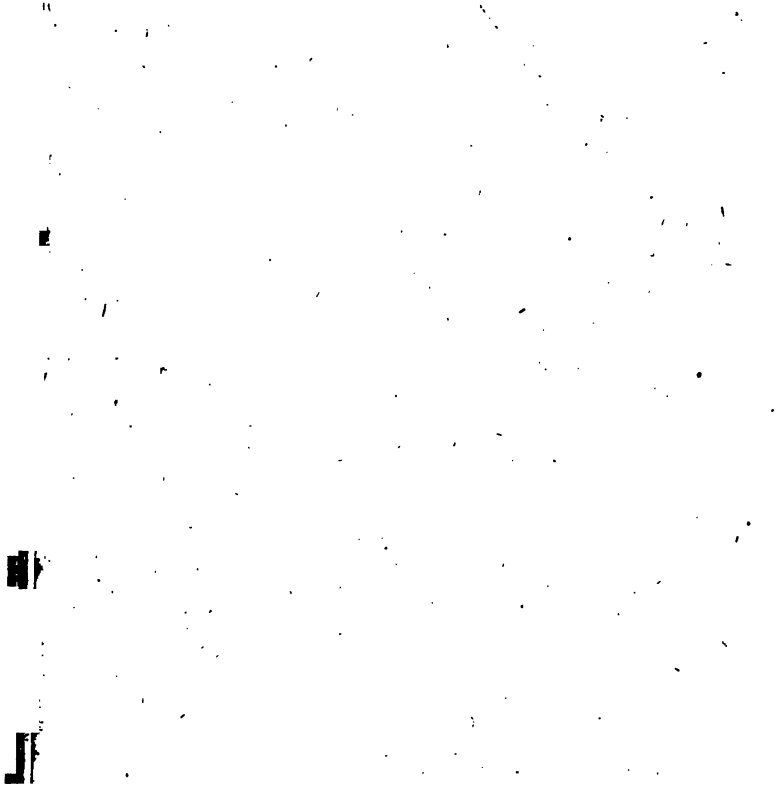




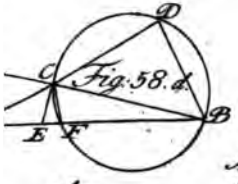


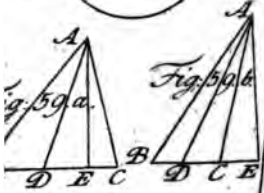






Tab. XI.


D
C
Fig. 58. d.
E F B


A
Fig. 59. a.
D E C B
A
Fig. 59. b.
D C E B

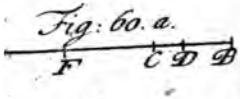
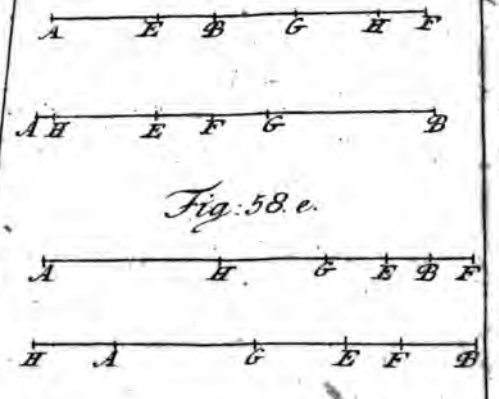
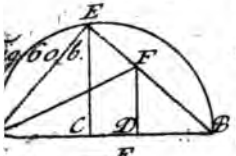
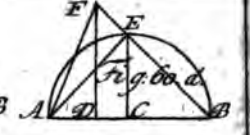


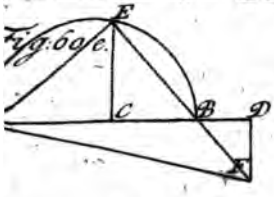
Fig. 60. a.
F C D B


A E B G H F
A H E F G B
Fig. 58. e.
A H G E B F
H A G E F B


E
Fig. 60. b.
F
C D B

F
E
Fig. 60. c.
D A C B


F
E
Fig. 60. d.
A D C B


E
Fig. 60. e.
C B D
E

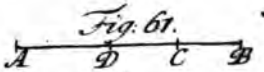
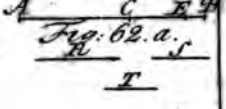
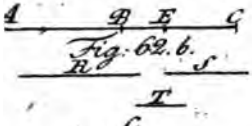
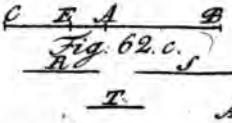


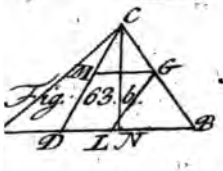
Fig. 61.
A D C B

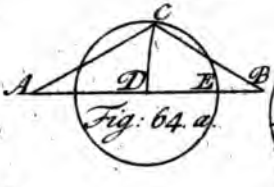

A C E B
Fig. 62. a.
R S
T


A D E C
Fig. 62. b.
R S
T

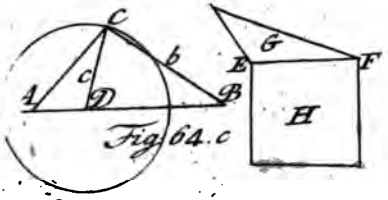

C E A B
Fig. 62. c.
R S
T

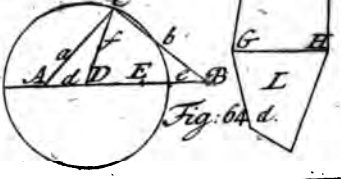
C
E
F
E
G
Fig. 63. a.
A H D L N B

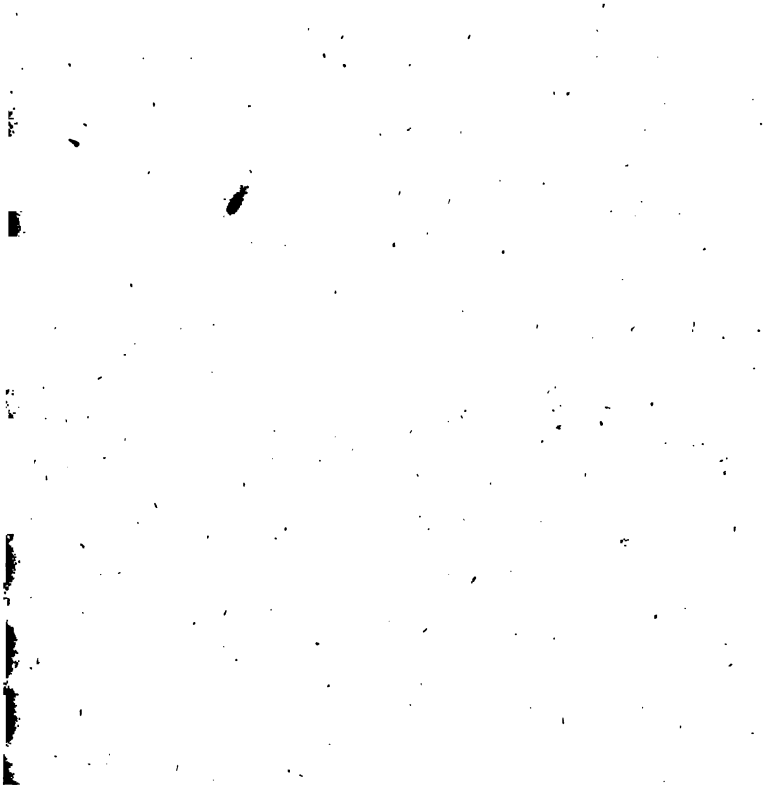

C
m
G
Fig. 63. b.
D L N B


C
A D E B
Fig. 64. a.

C
A D B E
Fig. 64. b.


C
b
c
A D B
Fig. 64. c
G
E F
H


C
a
f
b
o A d D E c B
Fig. 64. d.
K
G H
L



Tab. XII

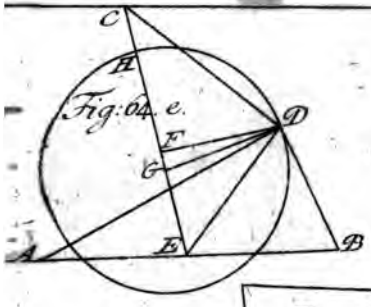


Fig: 64. e.

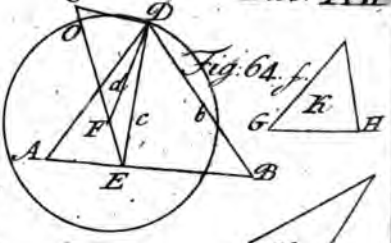


Fig: 64. f.

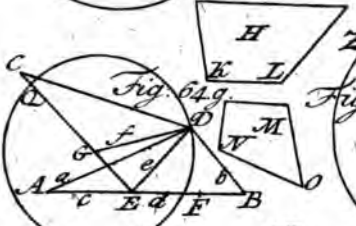


Fig: 64. g.

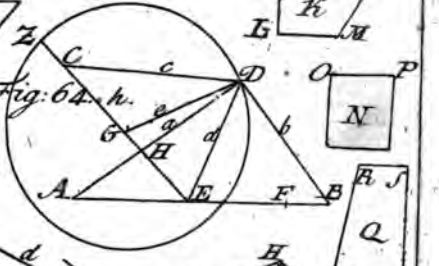


Fig: 64. h.

Fig: 64. i.

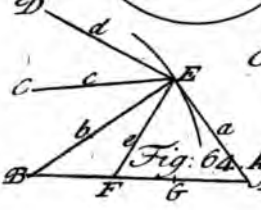


Fig: 64. k.

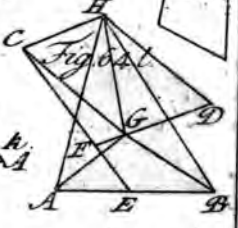


Fig: 64. l.

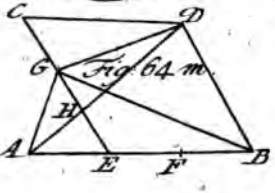


Fig: 64. m.

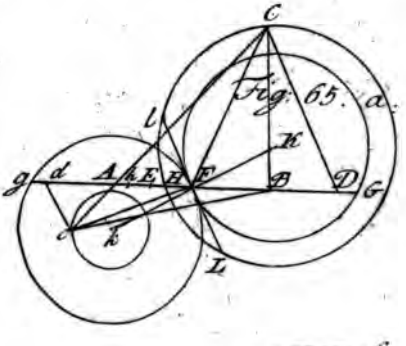


Fig: 65. a.

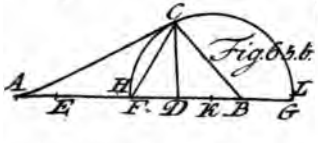


Fig: 65. b.

Fig: 65. c.

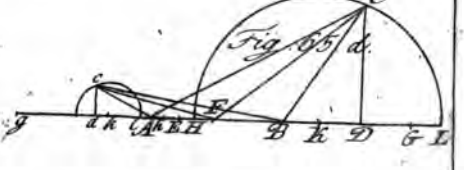
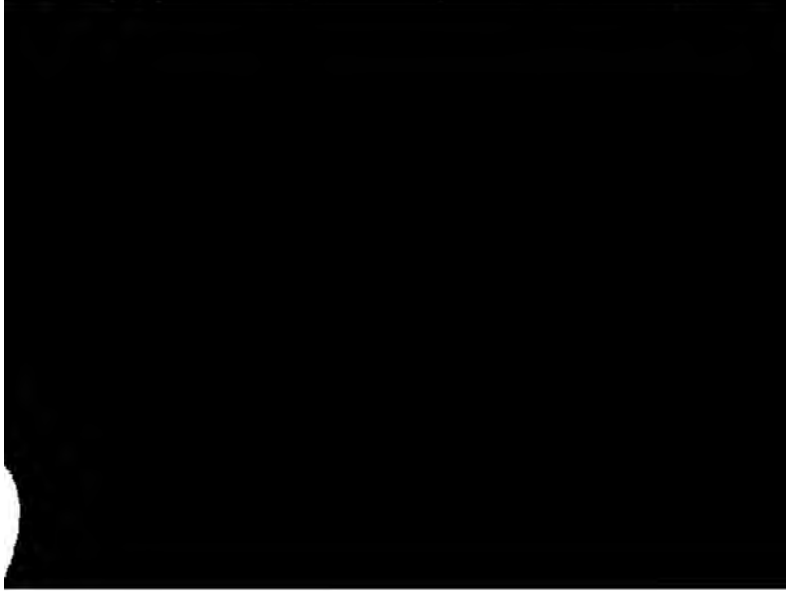


Fig: 65. d.



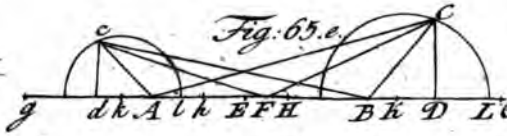
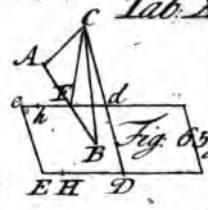
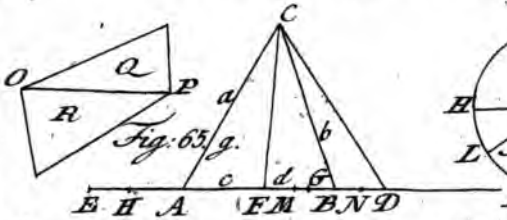
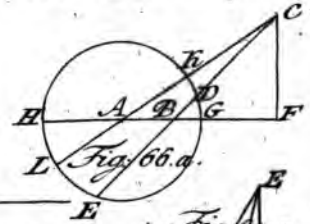
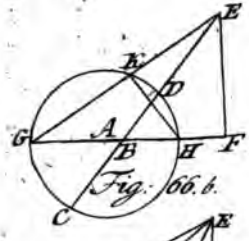


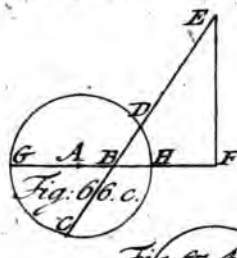
Fig: 65. e.
g d k A l h E F H B k D L G

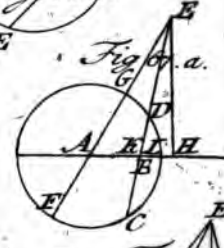

C A E d c h B
Fig: 65. f.
E H D

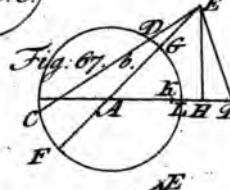

O Q P R
Fig: 65. g.
C a b c d G
E H A F M B N D E

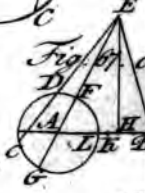

C F D H A B G F L
Fig: 66. a.

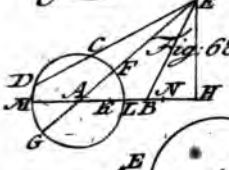

E F D G A B H F C
Fig: 66. b.

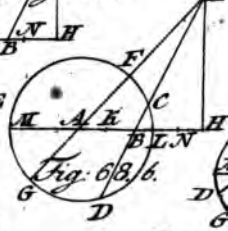

E D G A B H F C
Fig: 66. c.

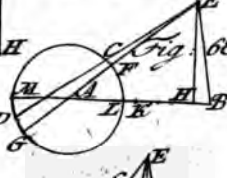

E G D A K L H B F C
Fig: 67. a.

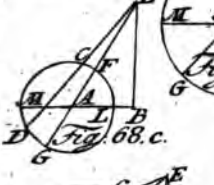

E D G C A K L H B F
Fig: 67. b.


E D F A H C K L B G
Fig: 67. c.

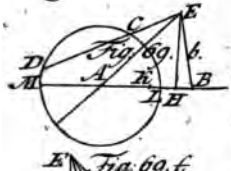

E C F D A N H M E L B G
Fig: 68. a

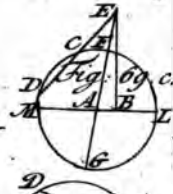

E F C M A K B L N H G D
Fig: 68. b.


E C F M A H L K B D G
Fig: 68. d.

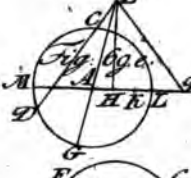

E C F M A L B D G
Fig: 68. c.

E C F D A K H M L G
Fig: 69. a.


E C D A K B M L H
Fig: 69. b.


E C E D A B M L G
Fig: 69. c.

E C F M A B H L D G
Fig: 69. d.

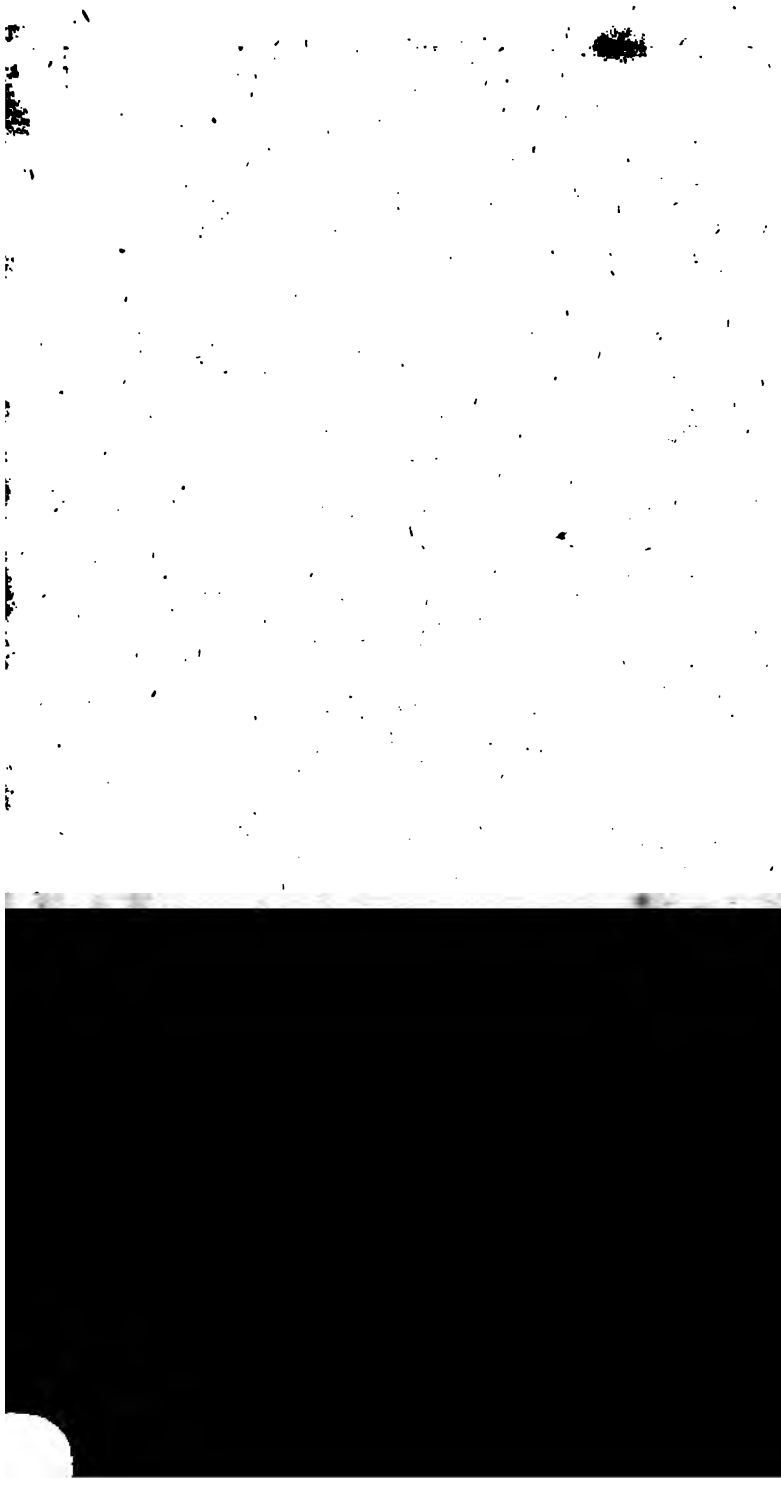

E C F D M A K H L G
Fig: 69. e.

E C F D M H A B K L G
Fig: 69. f.

D F E C M A K B H L G
Fig: 70. a.

D F E C M A H B L G
Fig: 70. b.

E C D F M H A K B L G
Fig: 70. c.



Tab. XIV

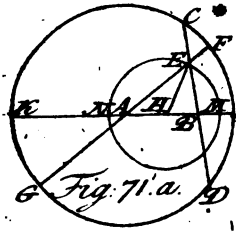


Fig. 71. a.

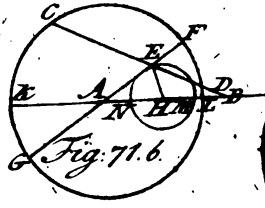


Fig. 71. b.

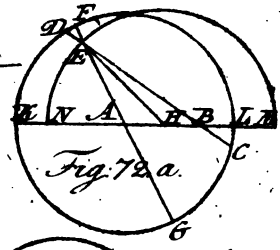


Fig. 72. a.

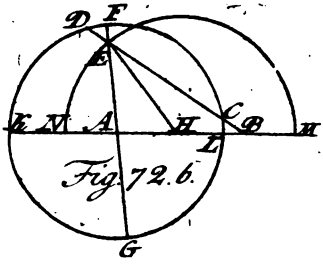


Fig. 72. b.

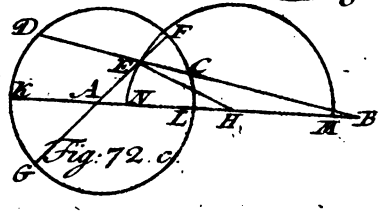


Fig. 72. c.

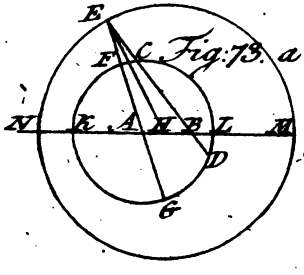


Fig. 73. a

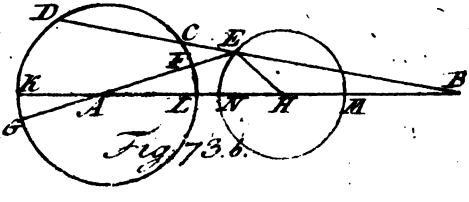


Fig. 73. b.

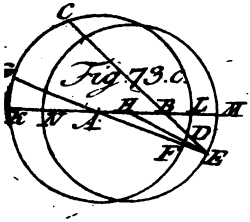


Fig. 73. c.

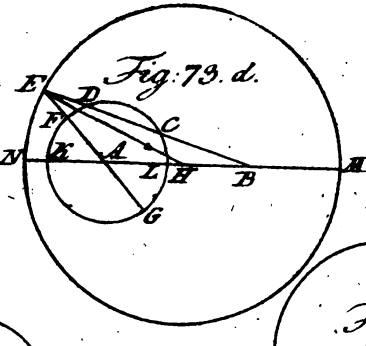


Fig. 73. d.

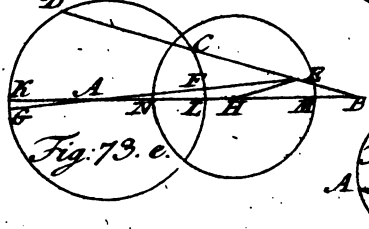


Fig. 73. e.

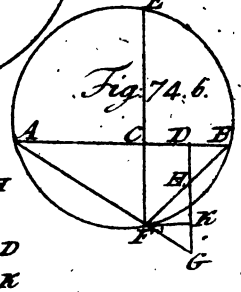


Fig. 74. b.

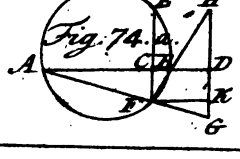


Fig. 74. a.

Tab. XIV

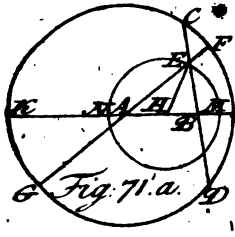


Fig. 71. a.

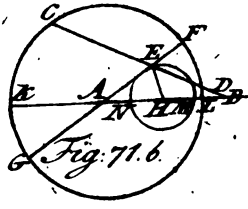


Fig. 71. b.

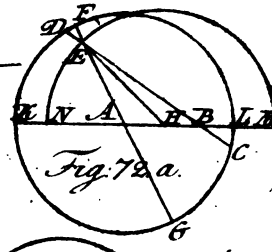


Fig. 72. a.

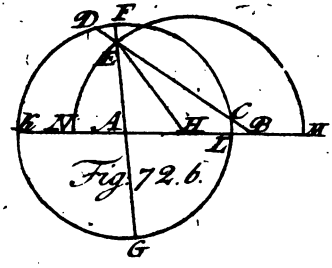


Fig. 72. b.

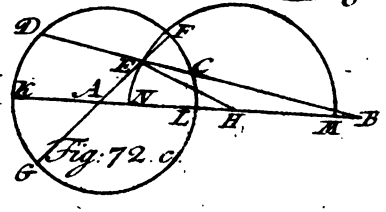


Fig. 72. c.

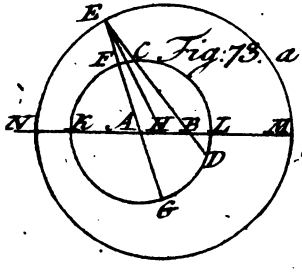


Fig. 73. a

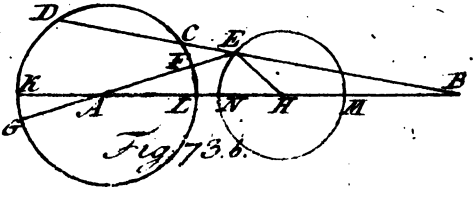


Fig. 73. b.

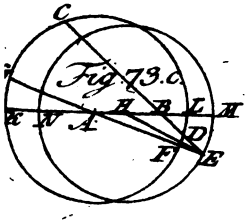


Fig. 73. c.

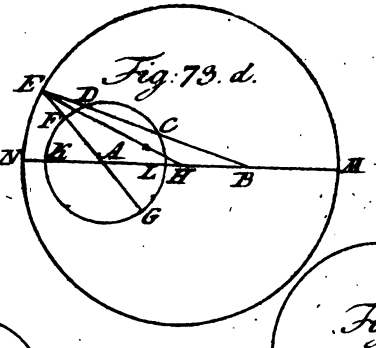


Fig. 73. d.

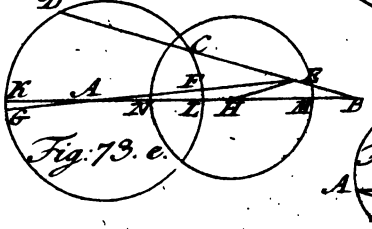


Fig. 73. e.

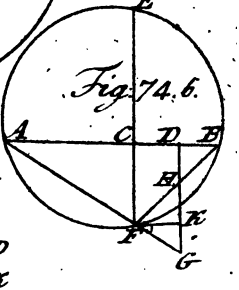


Fig. 74. b.

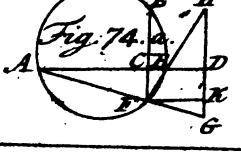
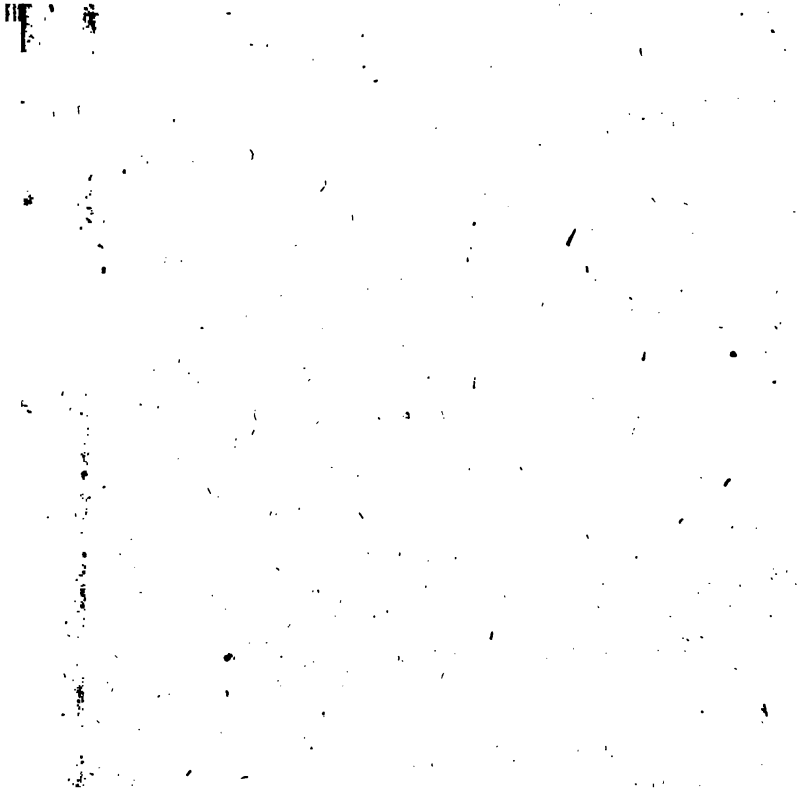


Fig. 74. a.



Tab. XV.

Fig. 75.

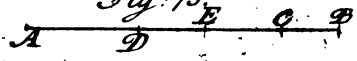
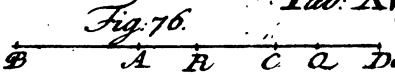


Fig. 76.



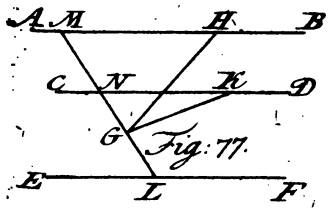


Fig. 77.

Fig. 78.

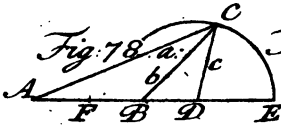
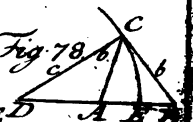


Fig. 78. b.



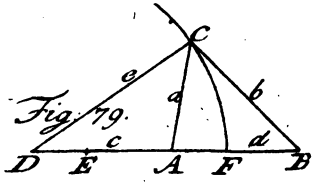


Fig. 79.

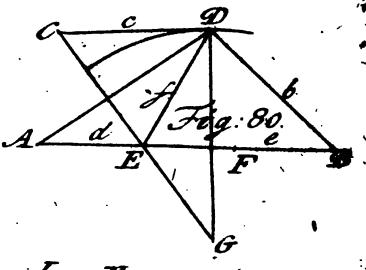


Fig. 80.

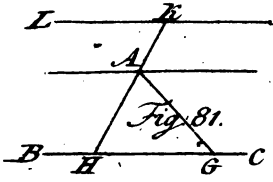


Fig. 81.

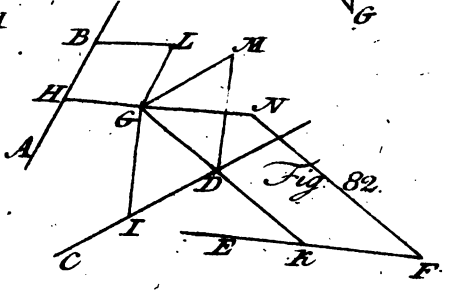


Fig. 82.

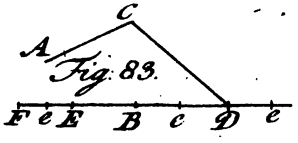


Fig. 83.

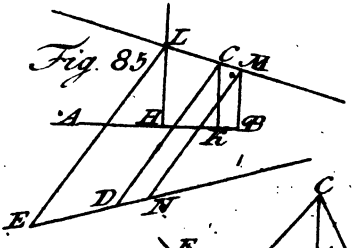


Fig. 85.

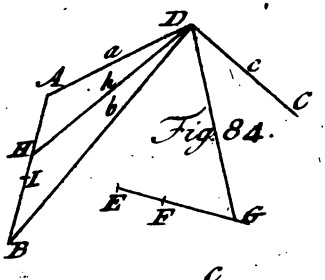


Fig. 84.

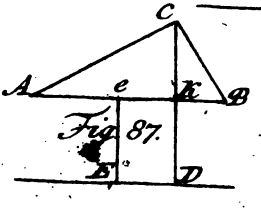


Fig. 87.

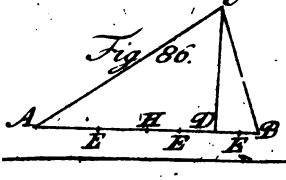


Fig. 86.

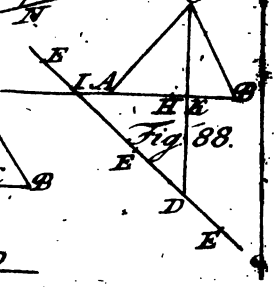
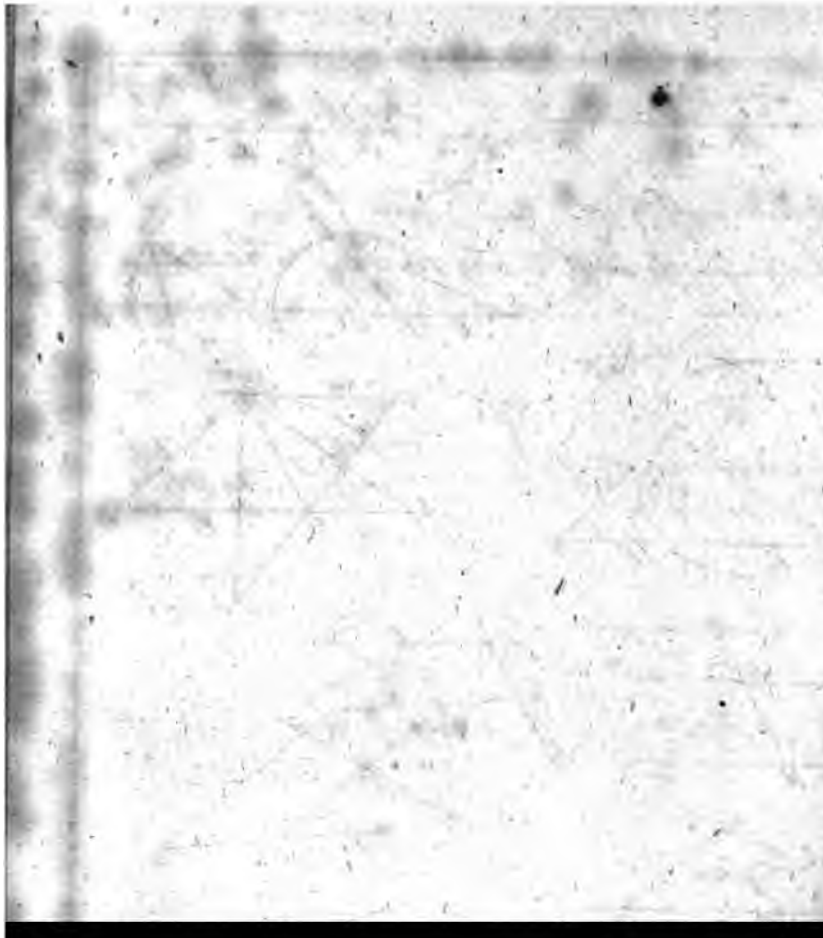


Fig. 88.



Tab. XV.

Fig. 75.

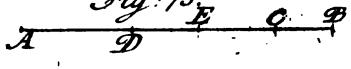
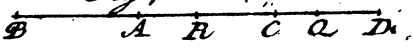


Fig. 76.



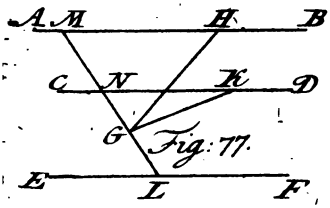


Fig. 77.

Fig. 78.

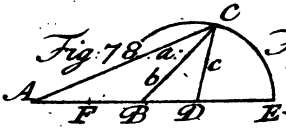
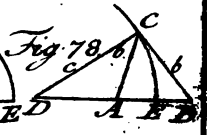


Fig. 78.



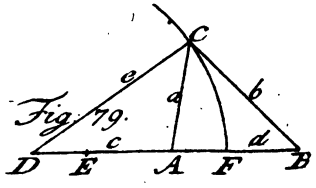


Fig. 79.

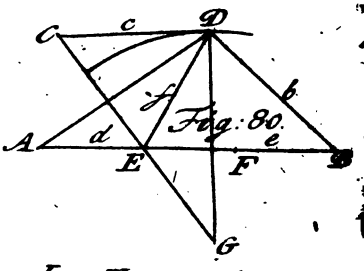


Fig. 80.

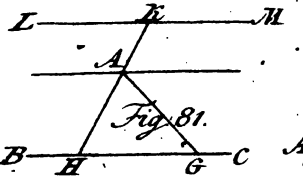


Fig. 81.

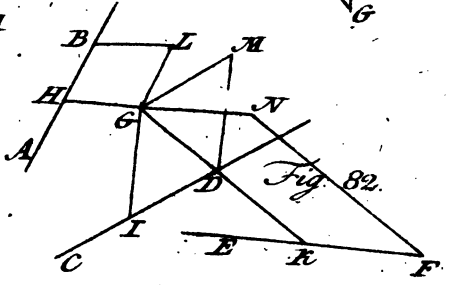


Fig. 82.

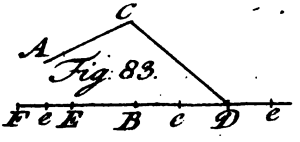


Fig. 83.

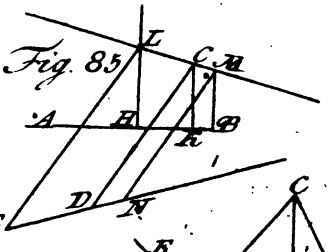


Fig. 85.

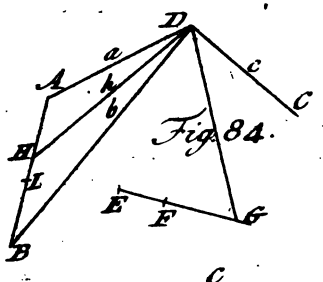


Fig. 84.

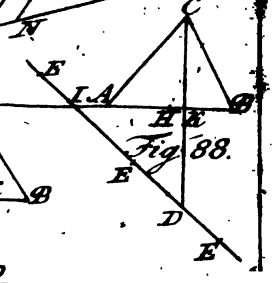


Fig. 88.

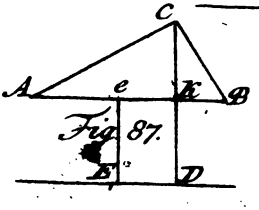


Fig. 87.

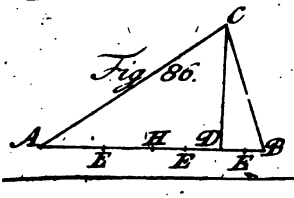


Fig. 86.

Fig. 75.

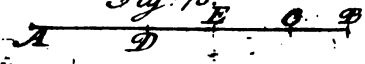
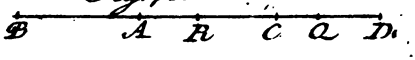


Fig. 76.



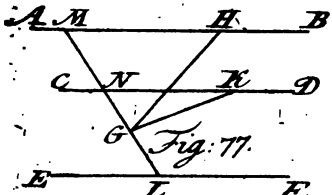


Fig. 77.

Fig. 78. a.

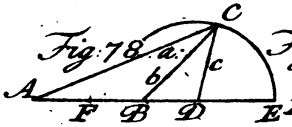
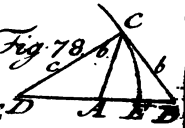


Fig. 78. b.



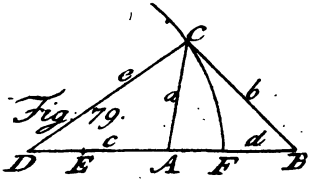


Fig. 79.

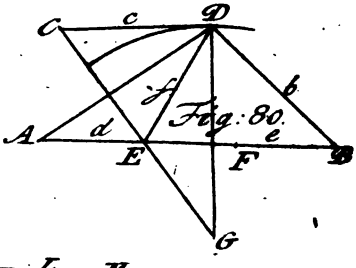


Fig. 80.

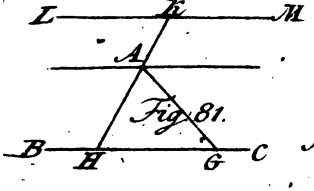


Fig. 81.

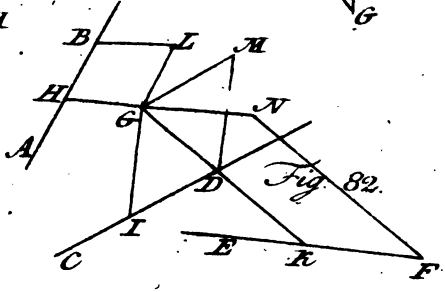


Fig. 82.

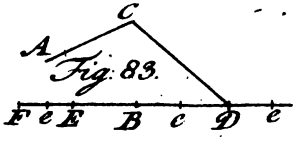


Fig. 83.

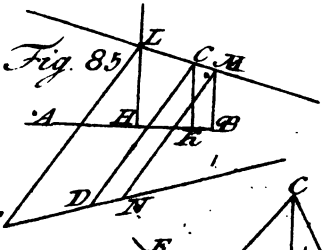


Fig. 85.

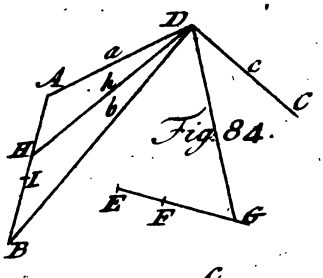


Fig. 84.

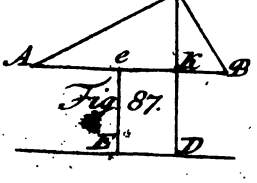


Fig. 87.

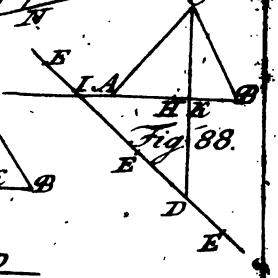


Fig. 88.

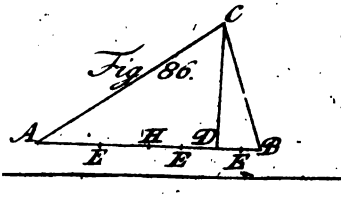


Fig. 86.

Tab. XVI.

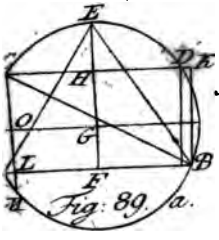


Fig. 89. a.

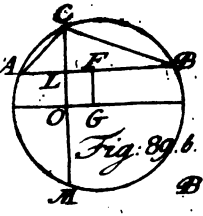


Fig. 89. b.

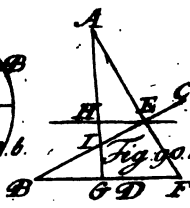


Fig. 90. a.

Fig. 90. b.

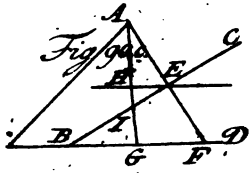


Fig. 90. c.

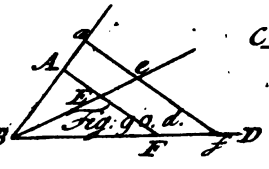


Fig. 90. d.

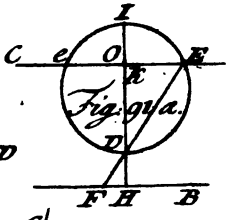


Fig. 91. a.

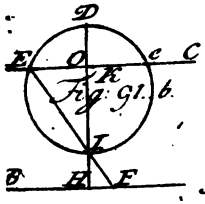


Fig. 91. b.

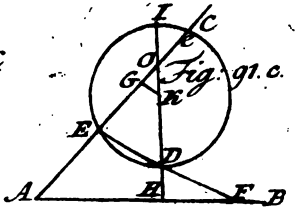


Fig. 91. c.

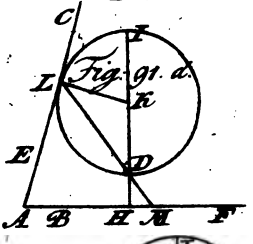


Fig. 91. d.

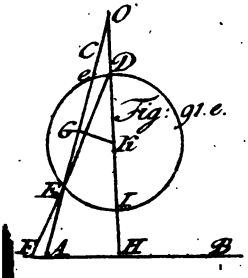


Fig. 91. e.

Fig. 91. f.

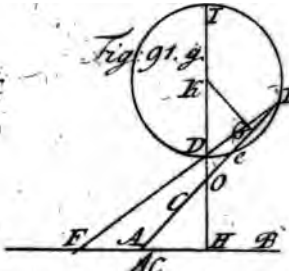


Fig. 91. g.

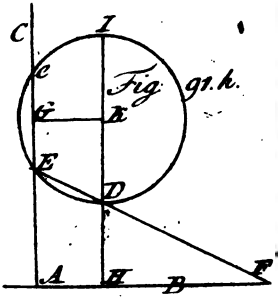


Fig. 91. h.

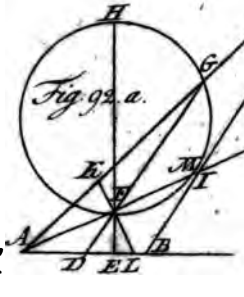
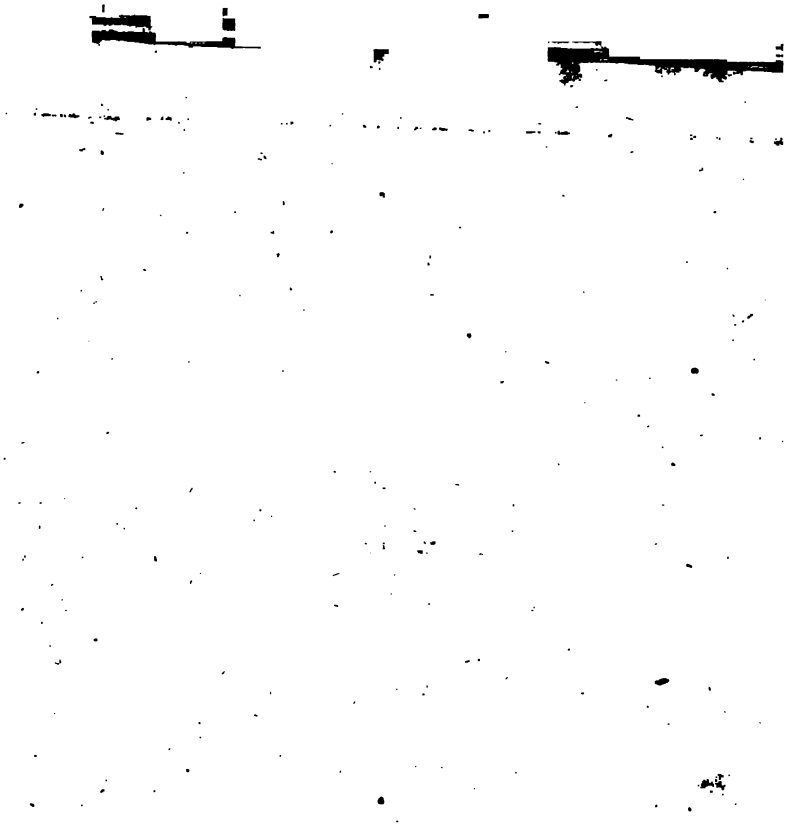


Fig. 92. a.

Fig. 92. b.



Tab. XV

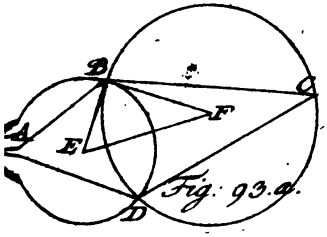


Fig. 93. a.

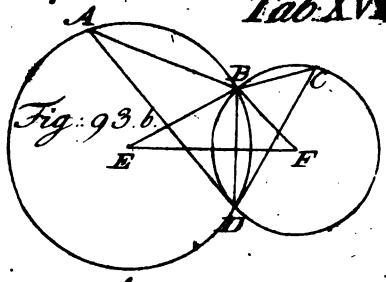


Fig. 93. b.

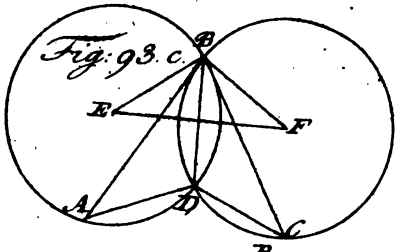


Fig. 93. c.

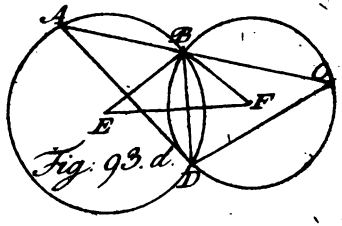


Fig. 93. d.

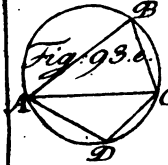


Fig. 93. e.

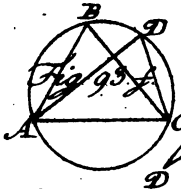


Fig. 93. f.

Fig. 93. g.

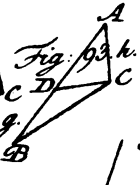


Fig. 93. h.

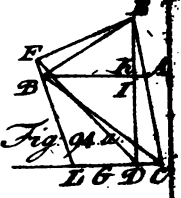


Fig. 94. a.

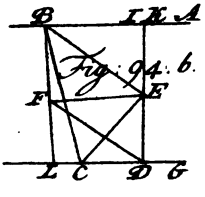


Fig. 94. b.

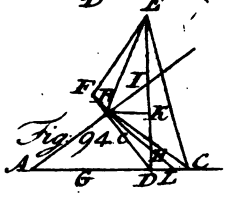


Fig. 94. c.

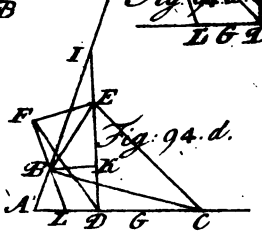


Fig. 94. d.

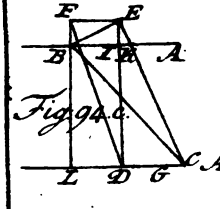


Fig. 94. e.

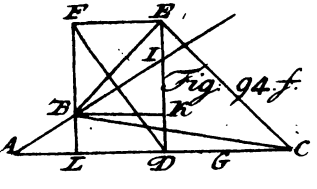


Fig. 94. f.

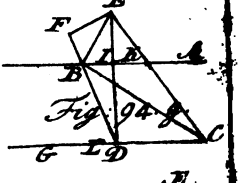


Fig. 94. g.

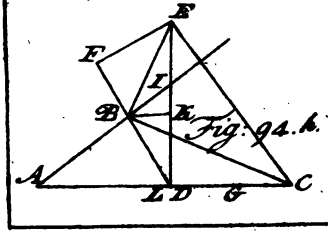


Fig. 94. h.

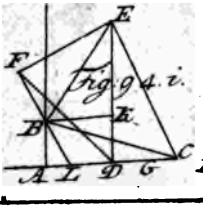


Fig. 94. i.

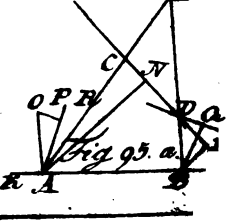
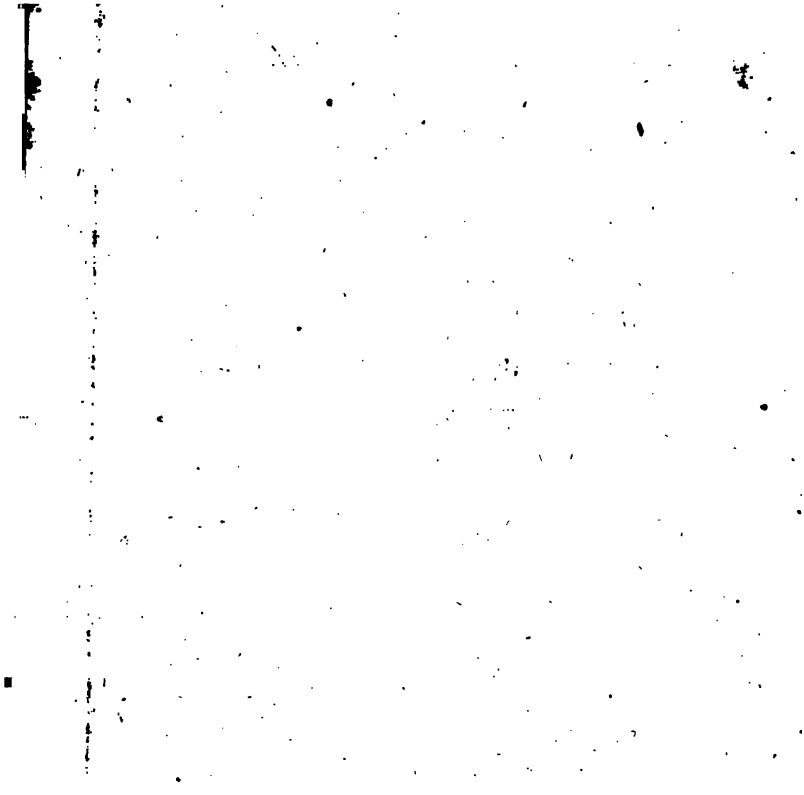


Fig. 95. a.



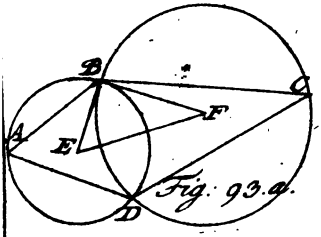


Fig. 93. a.

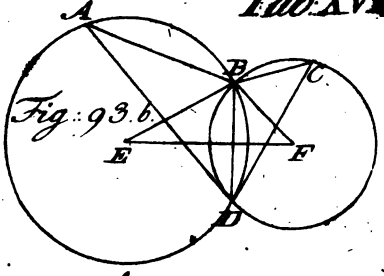


Fig. 93. b.

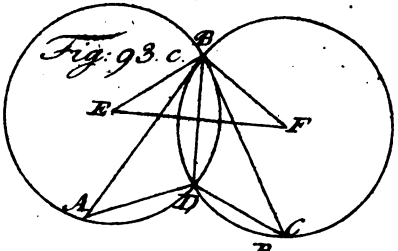


Fig. 93. c.

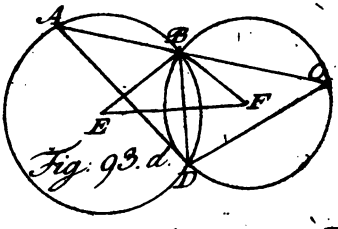


Fig. 93. d.

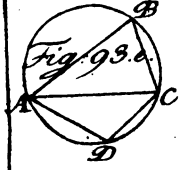


Fig. 93. e.

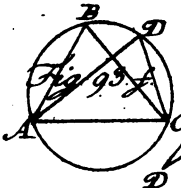


Fig. 93. f.

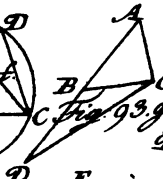


Fig. 93. g.

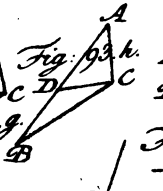


Fig. 93. h.

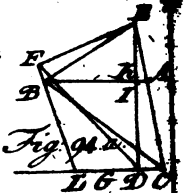


Fig. 94. a.

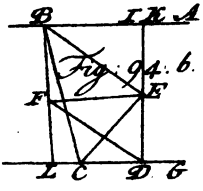


Fig. 94. b.

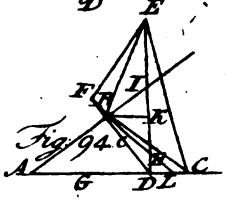


Fig. 94. c.

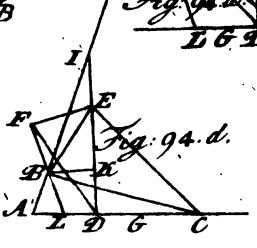


Fig. 94. d.

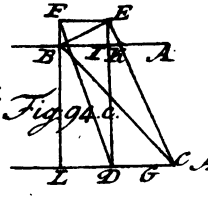


Fig. 94. e.

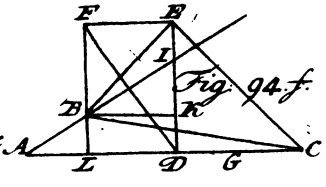


Fig. 94. f.

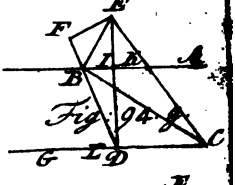


Fig. 94. g.

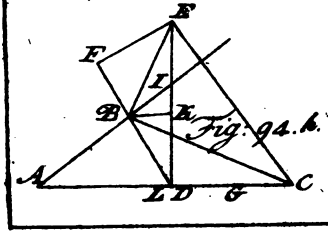
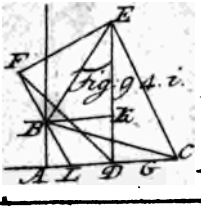


Fig. 94. h.



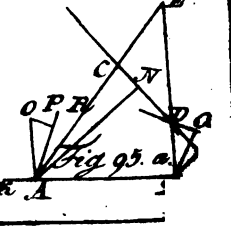


Fig. 95. a.

Tab. XVIII

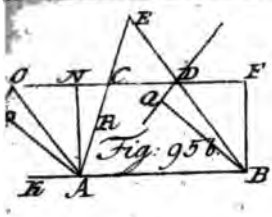


Fig. 95 b.

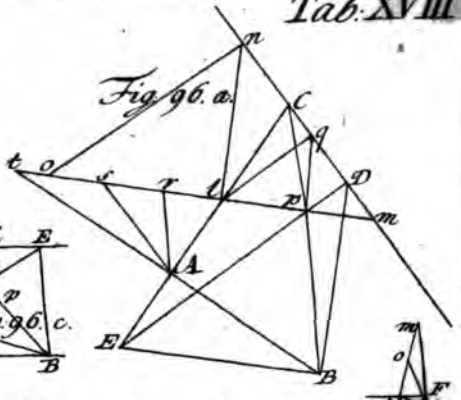


Fig. 96. a.

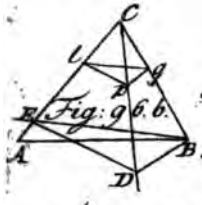


Fig. 96. b.

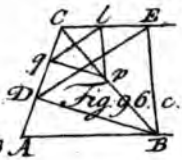


Fig. 96. c.

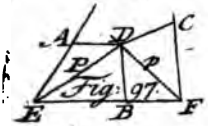


Fig. 97.

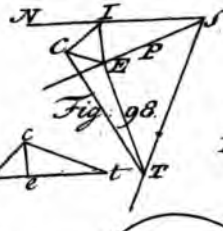


Fig. 98.

Fig. 99

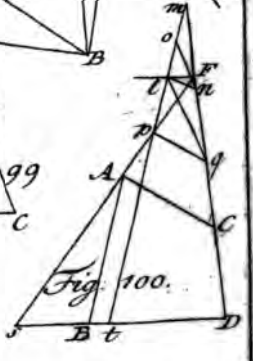


Fig. 100.

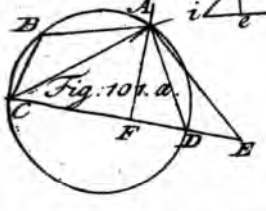


Fig. 101. a.

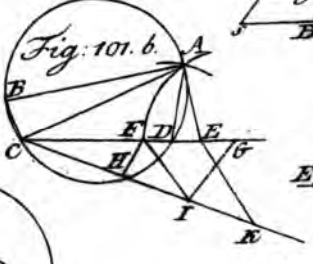


Fig. 101. b.

Fig. 101. d.

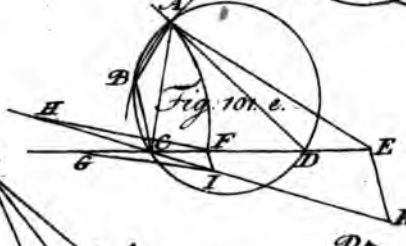


Fig. 101. e.

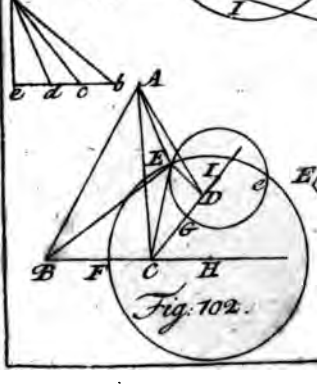


Fig. 102.

Fig. 104.

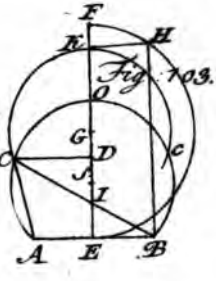
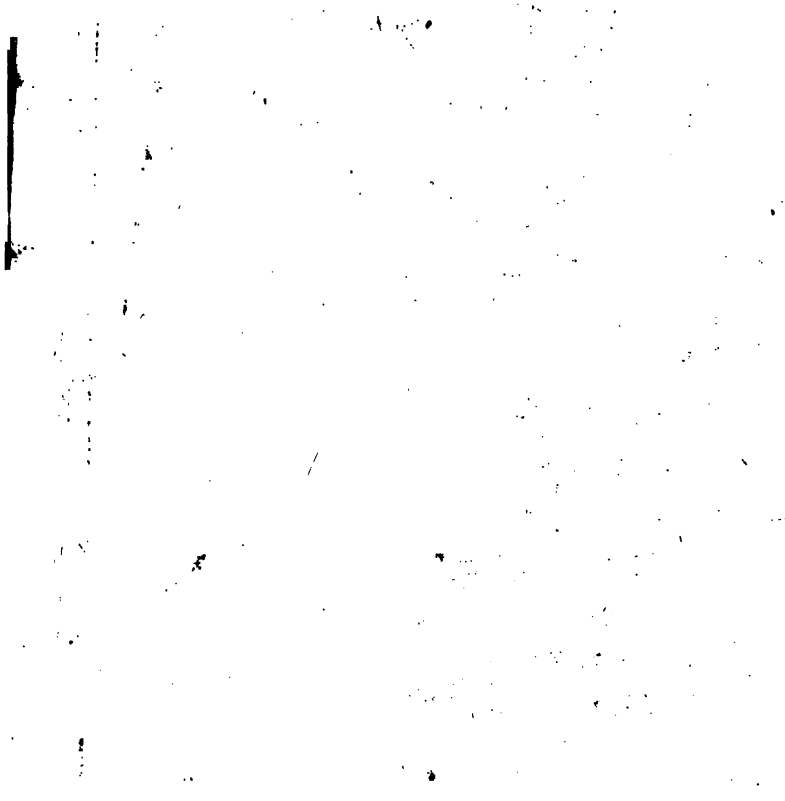
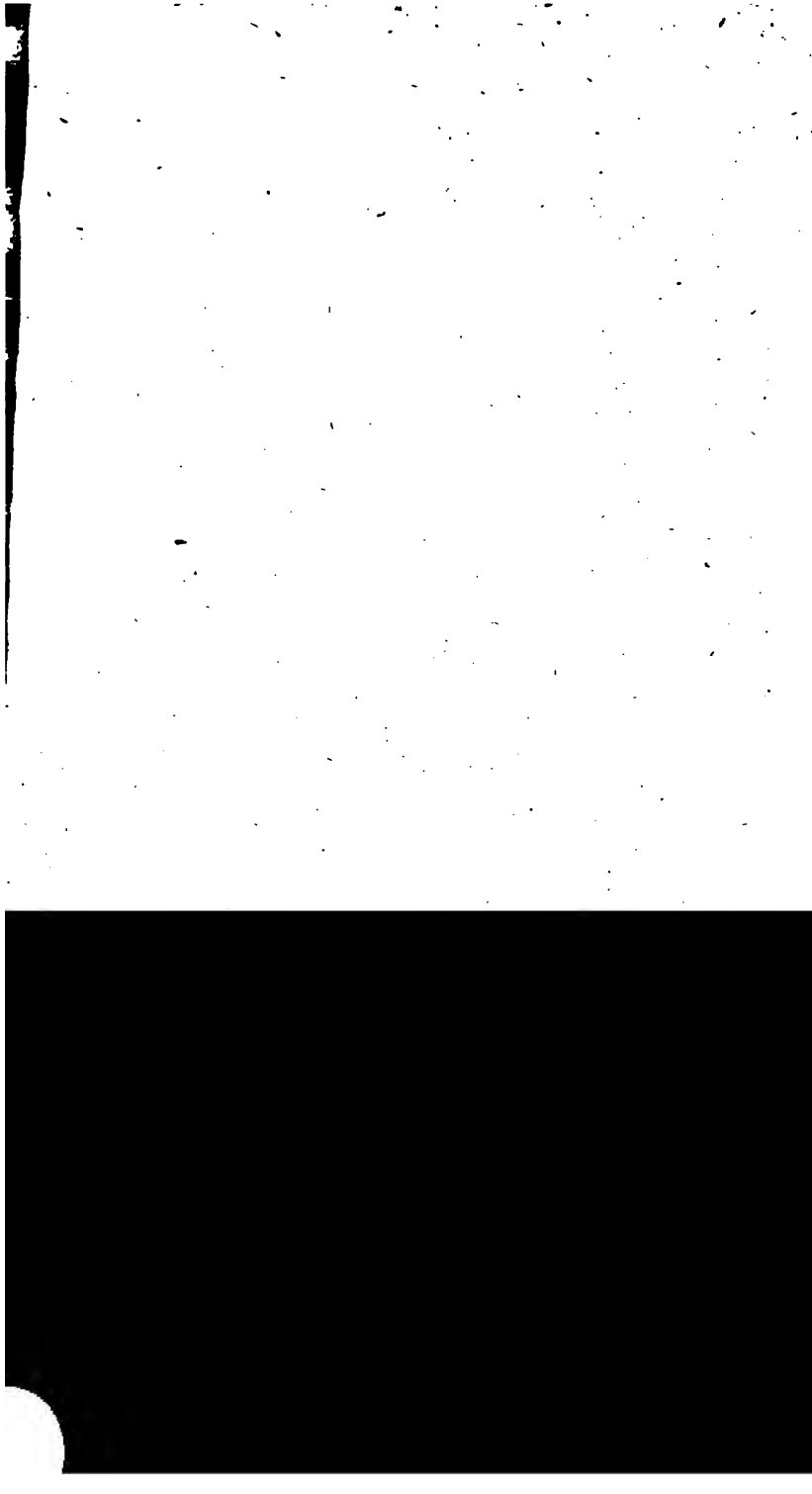
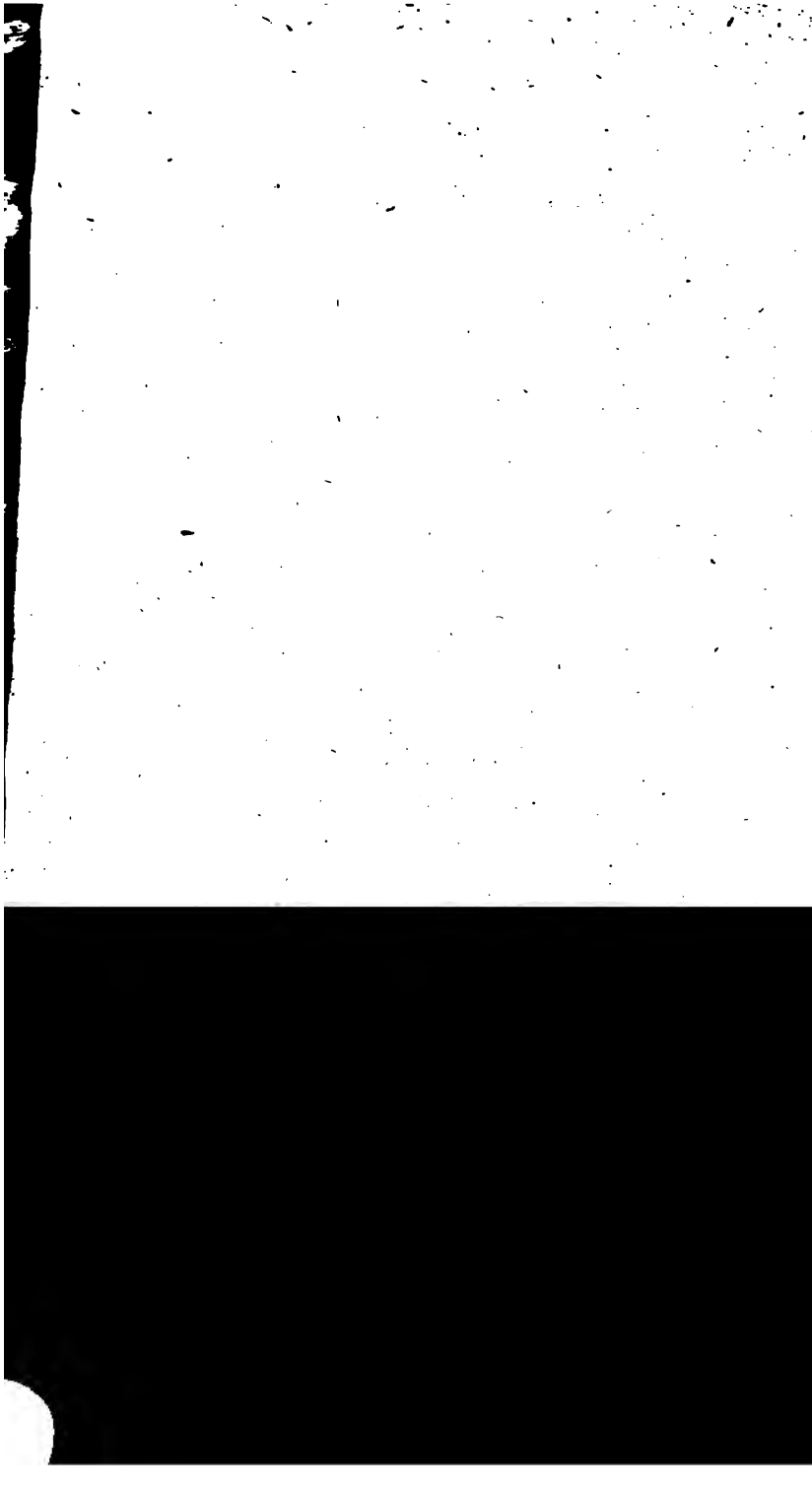
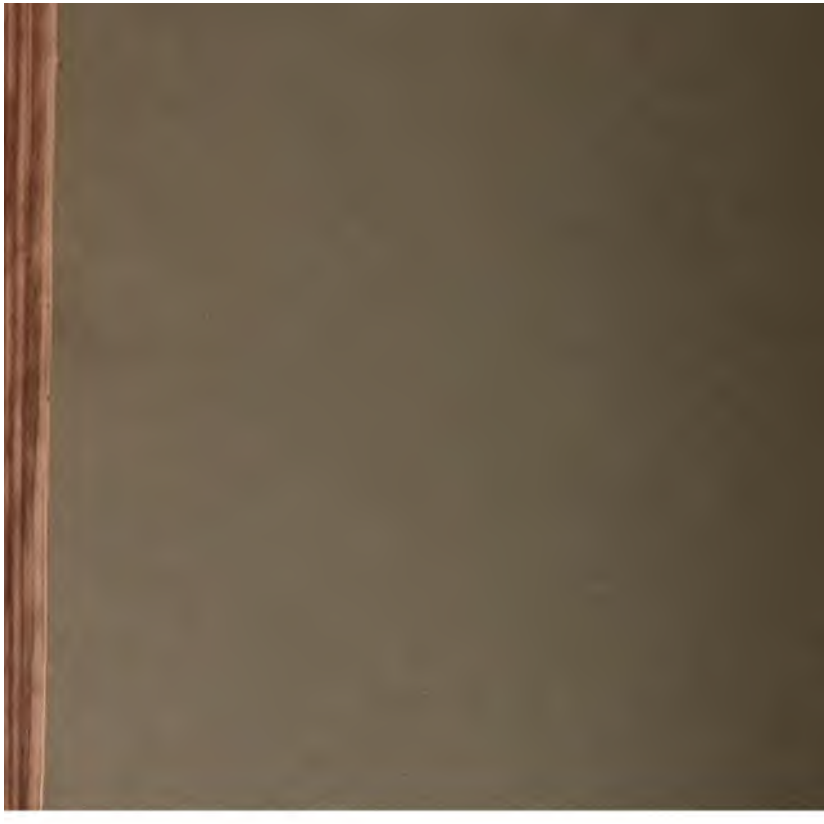


Fig. 103.









SEP 26 1930